



KORELASI LINEAR SEDERHANA DAN REGRESI LINEAR

Perhatikan ilustrasi berikut:

Seorang guru ingin mengetahui hubungan atau kaitan prestasi belajar siswa dengan faktor lainnya atau faktor yang satu dipengaruhi oleh faktor lainnya. Misalnya mengetahui hubungan antara prestasi belajar dengan lama waktu belajar siswa di rumah. Mengetahui hubungan prestasi belajar dengan lama waktu belajar siswa di rumah. Mengetahui hubungan prestasi IPA dengan prestasi belajar matematika kelas V di SD. Memprediksi IQ tau kecerdasan dengan prestasi belajar Bahasa Indonesia di SMA.

Berdasarkan ilustrasi tersebut, terpikir tidak bagaimana sih cara guru mengetahui hubungan antara faktor-faktor tersebut? Lalu teknik apa yang dilakukan oleh guru untuk mengetahui bahwa faktor-faktor yang diteliti itu memiliki hubungan atau tidak?

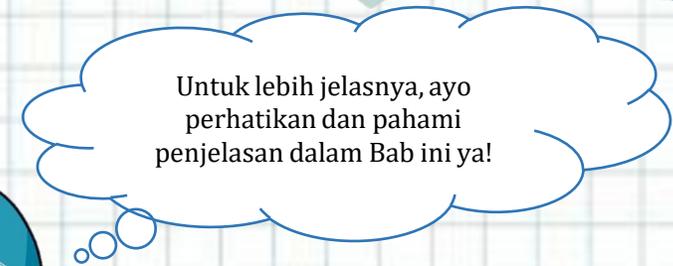


Untuk mengetahui hubungan atau kaitan antar faktor satu dengan lainnya dapat dilakukan dengan menggunakan teknik analisis korelasi atau regresi linear.



Korelasi merupakan hubungan dua variabel X dengan variabel Y , yang kedua variabel dapat dipertukarkan untuk menjadi variabel X dan variabel Y yang disebut dengan hubungan timbal balik.

Sedangkan jika regresi itu kedua variabel tidak dapat dipertukarkan yang biasanya disebut dengan hubungan yang searah.



Untuk lebih jelasnya, ayo perhatikan dan pahami penjelasan dalam Bab ini ya!

A. Korelasi Linear Sederhana

1. Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi merupakan angka yang menunjukkan tinggi atau rendahnya hubungan antara dua variabel atau lebih kecil.

Koefisien korelasi yang tinggi menandakan besarnya hubungan diantara kedua variabel.

Besarnya koefisien korelasi berkisar $-1 \leq r \leq +1$

Koefisien korelasi sebesar 1 dengan tanpa memperhatikan tanda positif dan negatif menunjukkan hubungan yang tinggi diantara variabel yang dihubungkan.

Koefisien korelasi sebesar 1 menunjukkan terjadinya hubungan yang sangat tinggi atau sempurna.

Korelasi yang membahas hubungan dua variabel dinamakan dengan korelasi linear sederhana.

Koefisien korelasi untuk sampel dilambangkan dengan r dan ρ untuk populasi.

Koefisien korelasi linear sederhana menunjukkan dua hal yaitu arah dan besarnya hubungan antara dua variabel.

Arah hubungannya dinyatakan dengan tanda positif dan negatif didepan angka koefisien korelasi.



Tahukah kalian?

- Tanda positif didepan
- angka koefisien korelasi
- menunjukkan hubungan
- yang searah, sedangkan
- tanda negatif
- menunjukkan hubungan
- yang berlawanan arah.

Agar lebih jelas, perhatikan beberapa pasangan data yang menghasilkan berbagai koefisien korelasi berikut!

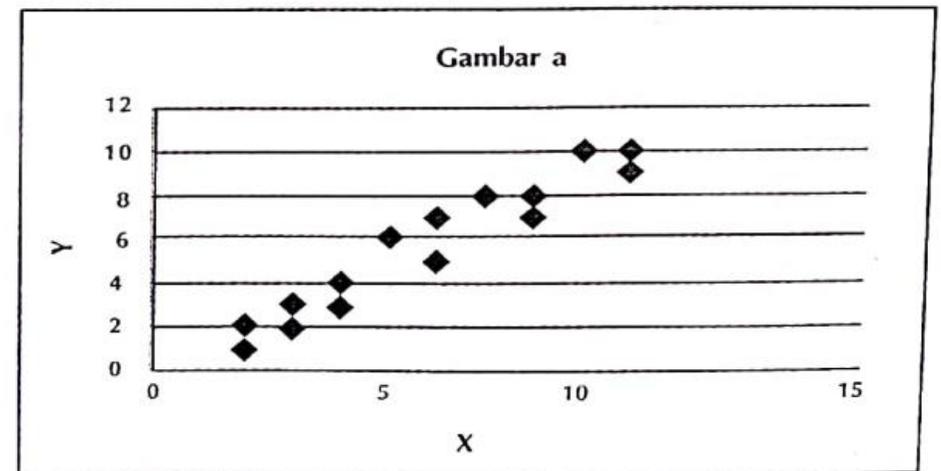
Pasangan data pada gambar a menghasilkan koefisien korelasi $+1,00$ artinya motivasi belajar yang tinggi pada siswa diikuti pula oleh prestasi belajar yang tinggi pula.

- ❑ Gambar a yang berbentuk grafik jika diperhatikan distribus bersama atau titik-titik pertemuan antara variabel X dengan Y membentuk garis lurus yang arahnya positif.
- ❑ Gambar b pasangan data menghasilkan koefisien korelasi negatif $-1,00$ artinya motivasi belajar yang tinggi sebaliknya prestasi belajar rendah dan grafik atau titik-titik pertemuan antara variabel X dan Y membentuk garis lurus tetapi arahnya negatif.
- ❑ Gambar c pasangan data yang menghasilkan koefisien mendekati $0,00$ artinya tidak terdapat hubungan antara motivasi dengan prestasi belajar matematika, maka titik-titik pertemuan antara variabel X dengan Y tidak membentuk garis lurus atau tidak memiliki hubungan yang linear.

Tabel
Data Pasangan untuk Korelasi Mendekati 1,00

Nomor	X	Y
1	10	9
2	2	1
3	3	2
4	7	8
5	8	8
6	4	4
7	5	6
8	6	5
9	9	10
10	3	3
11	8	7
12	4	3
13	2	2
14	10	10
15	6	7

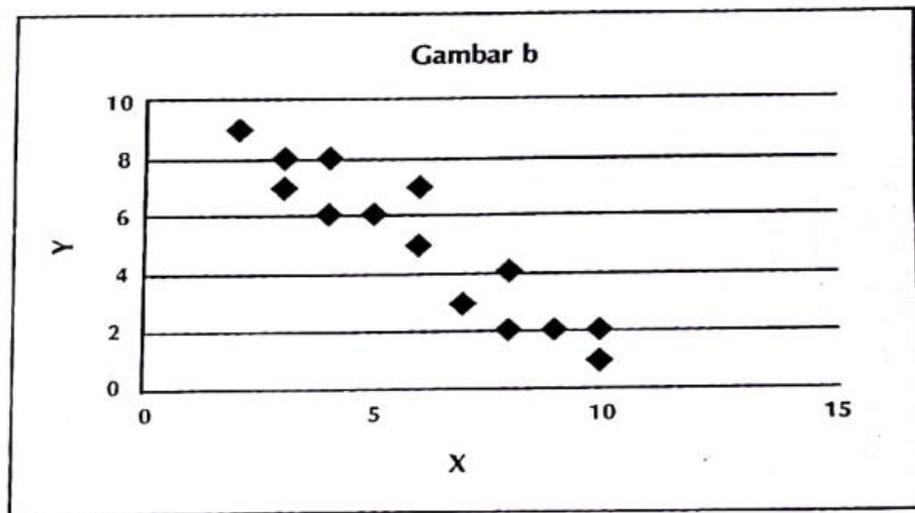
Grafik



Tabel
Data Pasangan untuk Korelasi Mendekati -1,00

Nomor	X	Y
1	10	1
2	2	9
3	3	8
4	7	3
5	8	4
6	4	6
7	5	6
8	6	5
9	9	2
10	3	7
11	8	2
12	4	8
13	2	9
14	10	2
15	6	7

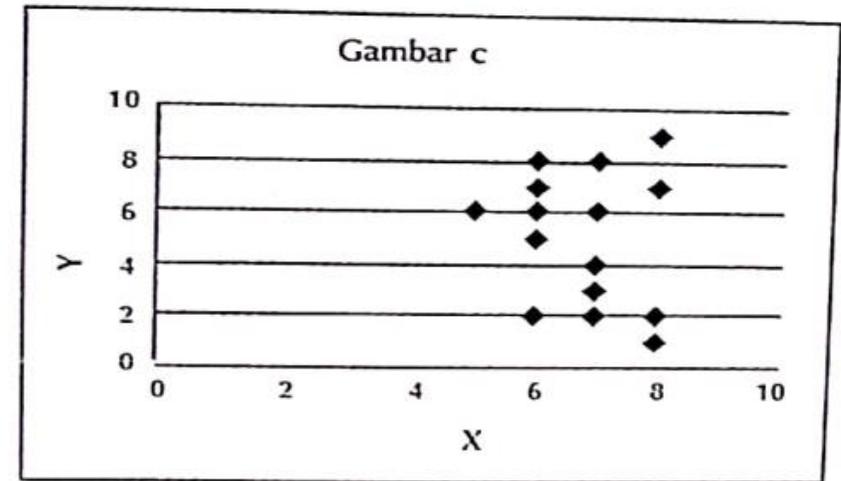
Grafik



Tabel
Data Pasangan untuk Korelasi Mendekati 0,00

Nomor	X	Y
1	8	1
2	8	9
3	6	8
4	7	3
5	8	7
6	6	6
7	5	6
8	6	5
9	6	2
10	7	4
11	8	2
12	7	8
13	7	2
14	7	6
15	6	7

Grafik





PENTING!!!

Menurut Goildford, klasifikasi koefisien korelasi tanpa memperhatikan tanda positif dan negatif sebagai berikut:

- 0,00 s/d 0,20 tidak ada korelasi
- 0,21 s/d 0,40 rendah atau sedang
- 0,41 s/d 0,70 cukup
- 0,71 s/d 0,90 tinggi
- 0,91 s/d 1,00 sangat tinggi (sempurna)

2. Teknik Korelasi

a. Korelasi Product Moment

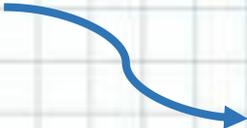
Korelasi product moment dikemukakan oleh Pearson menggunakan bentuk perkalian-perkalian terhadap variabel-variabelnya. Perkalian dalam rumus ini terjadi antara variabel X dengan Y baik pada skor asli secara langsung atau perkalian pada simpangan baku bersama (kovarian).

Beberapa teknik korelasi product moment, yaitu:

❑ Perkalian Skor Simpangan

Teknik untuk menghitung koefisien korelasi menggunakan hasil perkalian antara kedua variabel X dengan Y pada skor simpangan (xy). Perhitungan menggunakan simpangan dari masing-masing variabel dan perkalian antar simpangan.

Berikut ini adalah contoh perhitungan koefisien korelasi r (sampel):



Tabel
Perhitungan Kovariansi Menggunakan Skor Simpangan

No	X	Y	$x = X - \bar{X}$	x^2	$y = Y - \bar{Y}$	y^2	xy
1	10	9	4,2	17,64	3	9	12,6
2	2	1	-3,8	14,44	-5	25	19
3	3	2	-2,8	7,84	-4	16	11,2
4	7	8	1,2	1,44	2	4	2,4
5	8	8	2,2	4,84	2	4	4,4
6	4	4	-1,8	3,24	-2	4	3,6
7	5	6	-0,8	0,64	0	0	0
8	6	5	0,2	0,04	-1	1	-0,2
9	9	10	3,2	10,24	4	16	12,8
10	3	6	-2,8	7,84	0	0	0
11	8	3	2,2	4,84	1	1	2,2
12	4	7	-1,8	3,24	-3	9	5,4
13	2	4	-3,8	14,44	-2	4	7,6
14	10	10	4,2	17,64	4	16	16,8
15	6	7	0,2	0,04	1	1	0,2
Jumlah	87	90	0,00	1108,40	0,00	110,00	98

Rata-rata $\bar{X} = 5,80$ $\bar{Y} = 6,00$

Simpangan Baku $s_x = 2,78$ $s_y = 2,80$

Adapun rumus untuk menghitung koefisien korelasi adalah:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x)^2 (\sum y)^2}}$$

$$r = \frac{98}{\sqrt{(108,40)(110)}} = 0,897$$

Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh koefisien korelasi $(r) = 0,897$.

□ Simpangan Baku dan Kovariansi

Teknik untuk menghitung koefisien korelasi menggunakan simpangan baku pada variabel X (s_x), variabel Y (s_y), dan simpangan baku bersama (s_{xy}). Adapun rumus yang digunakan untuk menghitung koefisien korelasi adalah:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Simpangan baku dapat dihitung melalui simpangan masing-masing variabel X dan variabel Y secara kovarian dihitung dengan perkalian simpangan.

$$s_{xy} = \frac{\sum xy}{N}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}}$$

Contoh perhitungan koefisien korelasi r (sampel) pada yang sama pada perhitungan contoh sebelumnya.

$$s_{xy} = \frac{98}{15} = 6,53 \quad s_x = \sqrt{\frac{108}{15}} = 2,68 \quad s_y = \sqrt{\frac{110}{15}} = 2,71$$

$$r = \frac{6,53}{2,68 \times 2,71} = 0,898$$

Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh koefisien korelasi $r = 0,898$.



Tahukah kalian?

Analisis korelasi merupakan sarana yang digunakan untuk mengukur keamatan hubungan dua variabel atau lebih.

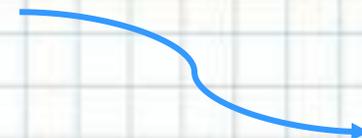
❑ Perhitungan Dengan Skor Asli

Teknik untuk menghitung koefisien korelasi dapat langsung menggunakan skor asli dari kedua variabel X dan Y. Perhitungan menggunakan perkalian dari masing-masing variabel X dan Y atau XY. Perhitungan skor asli ini biasanya digunakan pada berbagai program pengolahan data seperti SPSS atau Excel.

Adapun rumus yang digunakan untuk perhitungan dengan skor asli adalah:

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

Berikut ini, contoh perhitungan koefisien korelasi r (sampel) pada data yang sama pada contoh sebelumnya.



Tabel
Data Hasil Ujian Mata Pelajaran IPS

No	X	Y	X ²	Y ²	XY
1	10	9	100	81	90
2	2	1	4	1	2
3	3	2	9	4	6
4	7	8	49	64	56
5	8	8	64	64	64
6	4	4	16	16	16
7	5	6	25	36	30
8	6	5	36	25	30
9	9	10	81	100	90
10	3	6	9	36	18
11	8	3	64	9	24
12	4	7	16	49	28
13	2	4	4	16	8
14	10	10	100	100	100
15	6	7	36	49	42
Jumlah	87	90	613	650	620

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{15 \times 620 - (87)(90)}{\sqrt{[(15 \times 613) - (87)^2][(15 \times 650) - (90)^2]}} \\
 &= \frac{9300 - 7830}{\sqrt{[9195 - 7569][9750 - 8100]}} \\
 &= \frac{1461}{\sqrt{(1626)(1650)}} = \frac{1461}{\sqrt{2682900}} = \frac{1461}{1637,96} = 0,891
 \end{aligned}$$

b. Koefisien Determinasi

Koefisien korelasi yang dikuadratkan dinamakan dengan koefisien determinasi atau koefisien penentu. Koefisien determinasi merupakan proporsi untuk menentukan terjadinya persentase variansi bersama antara variabel X dan Y jika dikalikan dengan 100%. Oleh karena itu, besarnya koefisien determinasi adalah $0 \leq r^2 \leq 1$ dan tidak ada koefisien determinasi yang bertanda negatif dengan dikuadratkan.

Untuk lebih jelasnya, diberikan gambaran visualisasi dengan memisalkan variabel motivasi (X) merupakan predictor untuk variabel prestasi (Y), maka koefisien determinasi menunjukkan berapa persen variansi variabel prestasi (Y) dijelaskan oleh variabel motivasi (X).

Hubungan antar motivasi dengan prestasi belajar diperoleh $r = 0,70$ akan diperoleh koefisien determinasinya sebesar $0,70^2 = 0,49 \times 100\% = 49\%$. Dengan demikian dapat dikatakan 49% variansi prestasi dapat dijelaskan oleh motivasi belajar dan sebesar 15 sisanya dijelaskan oleh variabel-variabel lain di luar motivasi belajar yang dinamakan koefisien aliansi.

B. Regresi Linear Sederhana

Analisis regresi merupakan sara yang dipergunakan untuk mempelajari hubungan fungsional antara variabel- variabel yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matematik dan garis.

Persamaan matematik dan garis yang diperoleh tersebut disebut dengan persamaan regresi yang dapat berbentuk garis lurus (linear) atau tidak lurus (nonlinear).

Hubungan fungsional terdiri dari dua jenis variabel yaitu variabel bebas atau variabel predictor (dependent) umumnya dinyatakan dengan X dan variabel terikan atau variabel repson (dependent) dinyatakan dengan Y.

Analisis regresi dan korelasi dapat berbentuk sederhana, berganda dan parsial. Analisis regresi dan korelasi sederhana menunjukkan hubungan dua variabel yaitu satu variabel bebas dan satu variabel terikat.

Analisis regresi ganda atau parsial menggunakan tiga atau lebih variabel, terdiri dari satu variabel terikat dan dua atau lebih variabel bebas.

Analisi regresi linear sederhana pada sampel digunakan persamaan untuk garis regresi sebagai berikut:

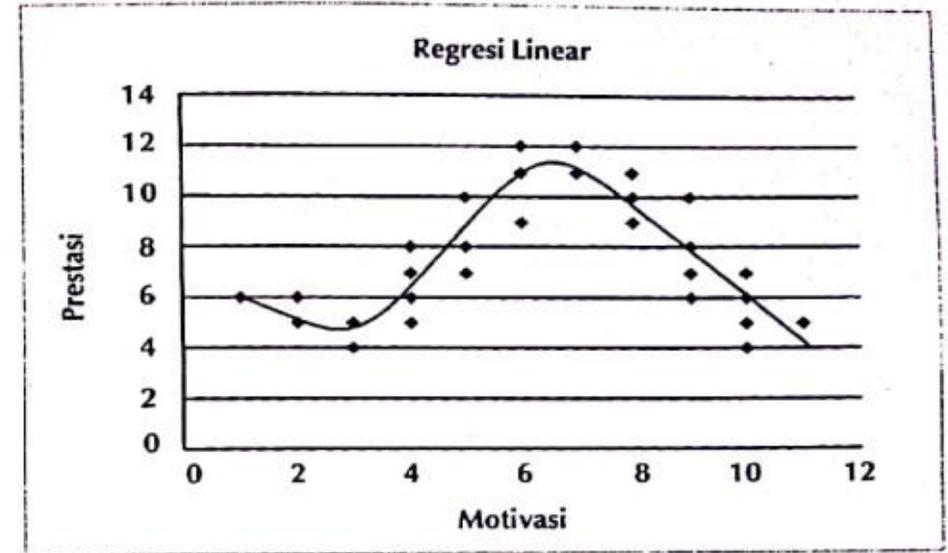
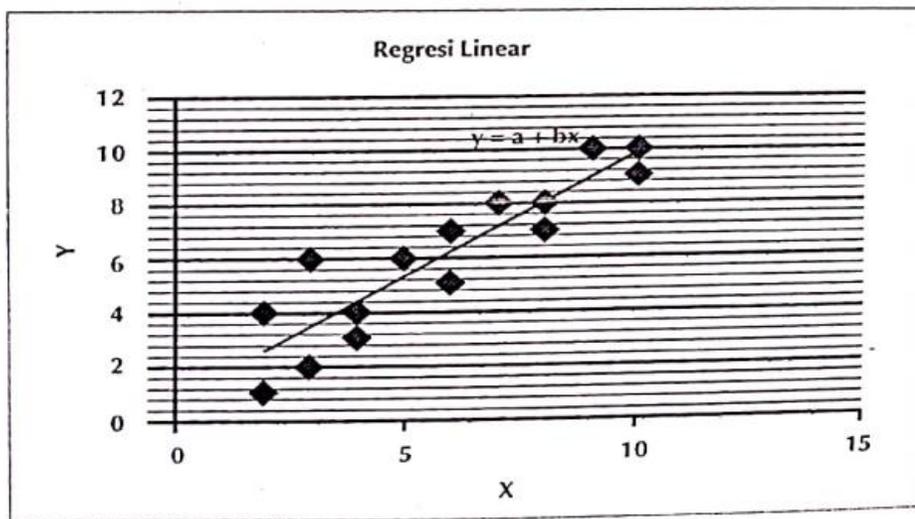
$$\hat{Y} = a + bX$$

Ada dua cara yang digunakan untuk menghitung regresi linear yaitu dengan metode tangan bebas (*free hand graphical method*) dan metode kuadrat kecil (*lest squares*).

a. Metode Tangan Bebas

Analisis regresi dengan menggunakan metode tangan bebas yang terbaik dilakukan melalui diagram pencar. Pada diagram pencar, distribusi bersama antara variabel X dan Y digambarkan dalam bentuk titik-titik, setiap garis yang ditarik belum tentu melalui semua titik-titik pada diagram pencar. Jika garis lurus tidak tepat pada titik-titik diagram pencar akan terdapat deviasi setiap skor Y terhadap persamaan garis lurus.

Berikut ini bentuk analisis regresi linear dengan menggunakan metode tangan bebas secara visual terlihat pada gambar grafik:



Gambar pertama menunjukkan hubungan lurus yang linear, sedangkan garis lurus merupakan garis persamaan $\hat{Y} = a + bX$ dan gambar bawah merupakan korelasi yang tidak menunjukkan garis lurus atau nonlinear.

b. Metode Kuadrat Kecil

Metode kuadrat kecil bertitik tolak pada kenyataan bahwa jumlah kuadrat daripada deviasi antar titik yang sedang dicari harus harus sekecil mungkin. Menggunakan kalimat lain garis regresi yang berdasarkan metode kuadrat kecil ditunjukkan oleh penyimpangan tiap-tiap angka dengan garis regresi akan sama dengan rata-rata hitungnya atau disimbolkan ditulis $\sum(Y - \hat{Y})^2 = 0$. Disamping itu jumlah deviasi kuadrat tiap-tiap data terhadap garis regresi paling kecil atau $\sum(Y - \hat{Y})^2$ lebih kecil dibandingkan dengan $\sum(Y - \text{garis lurus yang lain})^2 = 0$

Persamaan regresi linear sederhana seperti yang telah tertulis dislide sebelumnya, yaitu:

$$\hat{Y} = a + bX$$

Dari persamaan diatas perlu dicari koefisien-koefisien regresi a dan b dengan formula

$$a = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum (XY)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$b = \frac{n \sum (XY) - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

Jika dihitung koefisien b, maka koefisien a dapat dicari dengan formula:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Konstanta a adalah titik potong (*intercept*), yaitu pertemuan garis ordinat dengan sumbu Y pada X, jika X sama dengan Nol, maka a + b (0).

Konstanta b adalah kemiringan garis lurus (*slope*). Angka b yang semakin besar maka semakin miring garis lurus dan sebaliknya. Besarnya konstanta b akan menunjukkan dua hal yaitu arah hubungan positif atau negatif dan perubahan Y yang akan terjadi karena perubahan pada variabel X.

Contoh:

Tabel
Data Motivasi Belajar dan Prestasi Belajar

No	X	X ²	Y	Y ²	XY
1	10	100	9	81	90
2	2	4	1	1	2
3	3	9	2	4	6
4	7	49	8	64	56
5	8	64	8	64	64
6	4	16	4	16	16
7	5	25	6	36	30
8	6	36	5	25	30
9	9	81	10	100	90
10	3	9	6	36	18
11	8	64	3	9	24
12	4	16	7	49	28
13	2	4	4	16	8
14	10	100	10	100	100
15	6	36	7	49	42
Jumlah	87	613	90	650	620

$$a = \frac{(613)(90) - (87)(620)}{15(613) - (87)^2} = \frac{55170 - 53940}{9195 - 7569} = \frac{1230}{1626} = 0,7654 = 0,76$$

$$b = \frac{15(620) - (87)(90)}{9195 - 7569} = \frac{1470}{1626} = 0,904 = 0,90$$

Dengan menggunakan rumus persamaan regresi linear sederhana Y atas X adalah:

$$\hat{Y} = a + bX$$

$$\hat{Y} = 0,76 + 0,90X$$

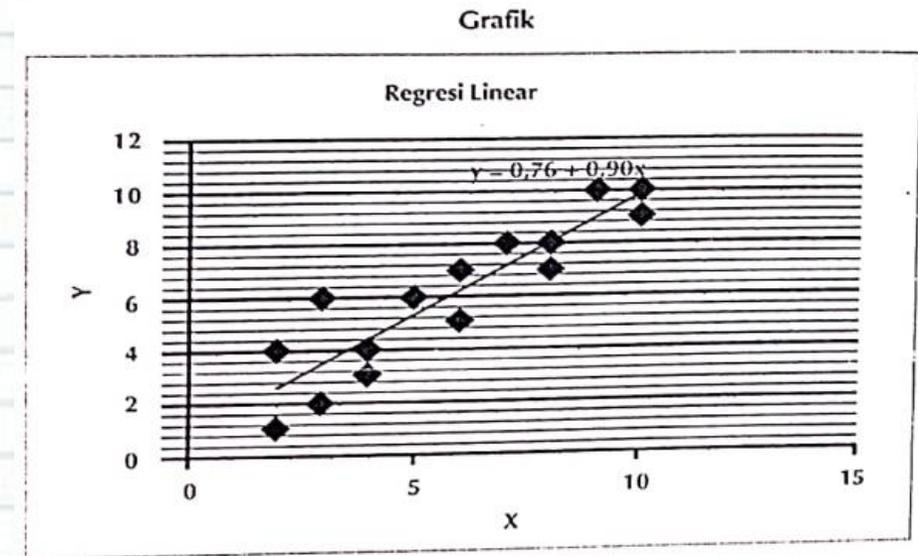
Setelah diperoleh harga sebesar $a = 0,76$ dan $b = 0,90$ bertanda positif, maka garis regresi linear terjadi perpotongan dengan sumbu Y terhadap sumbu X setinggi $0,76$ dan setiap X mengakibatkan bertambahnya kenaikan prestasi belajar Y sebesar $0,90$. Dengan kalimat lain skor variabel Y dapat diprediksikan oleh setiap skor variabel X berdasarkan persamaan regresi linear $\hat{Y} = 0,76 + 0,90X$ dan dapat dihitung pula besarnya faktor lain sebagai penentu variabel Y atau galat prediksi dilambangkan dengan e. Suatu hal yang menarik dalam perhitungan ini adalah jumlah seluruh variabel Y akan sama dengan jumlah persamaan regresi linear ditambah dengan galat prediksi atau $\sum Y = \sum \hat{Y} + \sum e$

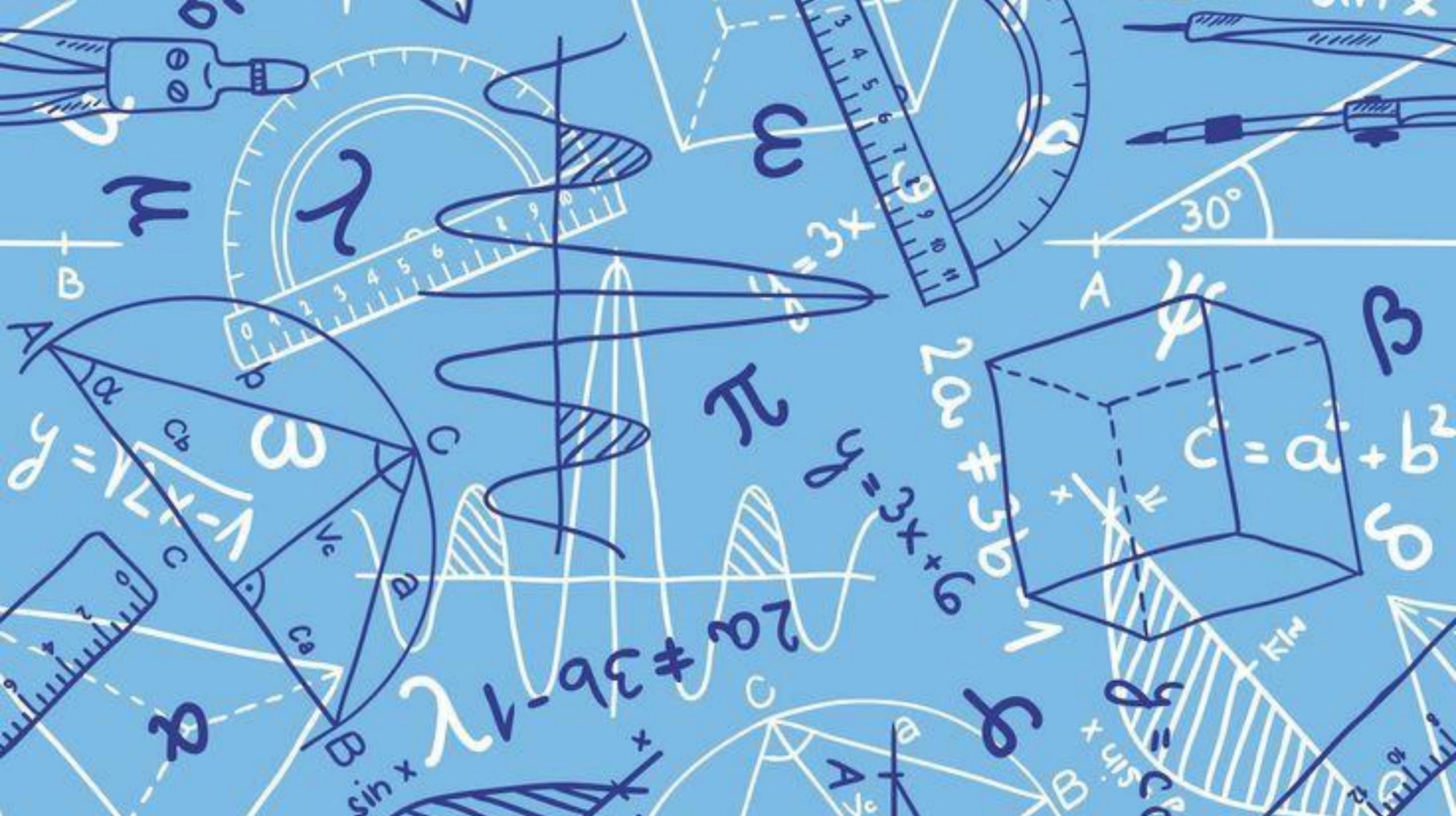
Berikut ini adalah hasil perhitungan berdasarkan persamaan regresi linear sederhana pada variabel X dan variabel Y dan galat prediksi (e) untuk setiap pasangan skor disajikan dalam bentuk tabel:

Tabel
Hasil Perhitungan $\hat{Y} = 0,76 + 0,90X$ dan Galat Prediksi (e)

No	X	Y	\hat{Y}	$Y - \hat{Y} = e$
1	10	9	9,76	-0,76
2	2	1	2,56	-1,56
3	3	2	3,46	-1,46
4	7	8	7,06	0,94
5	8	8	7,96	0,04
6	4	4	4,36	-0,36
7	5	6	5,26	0,74
8	6	5	6,16	-1,16
9	9	10	8,86	1,14
10	3	6	3,46	2,54
11	8	3	7,96	-0,96
12	4	7	4,36	-1,36
13	2	4	2,56	1,44
14	10	10	9,76	0,24
15	6	7	6,16	0,84
Jumlah	87	90	89,7	0,3

Persamaan regresi linear $\hat{Y} = 0,76 + 0,90X$ disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:





π

∞

ω

30°

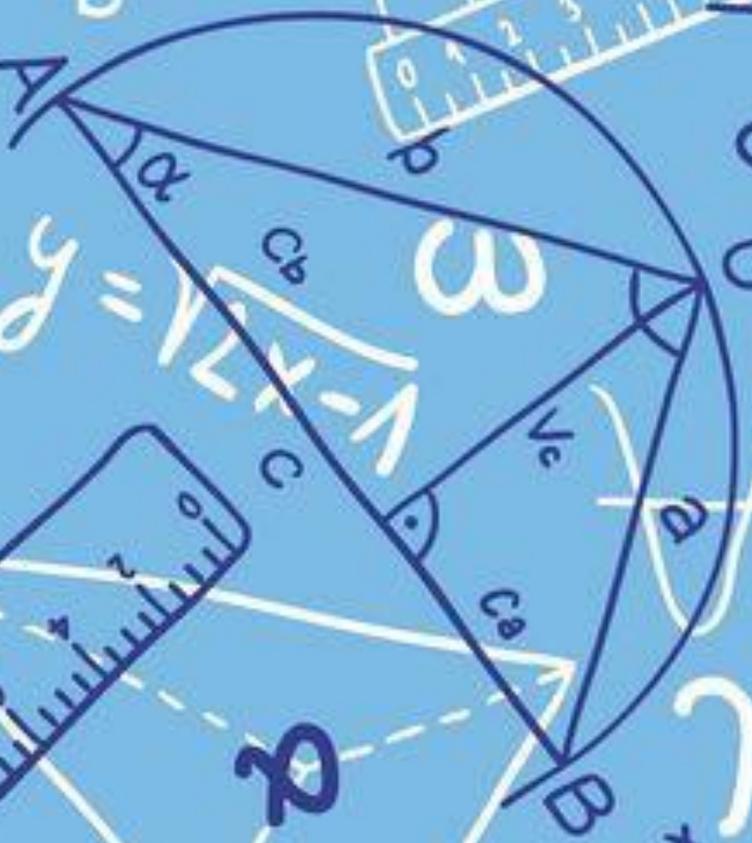
E

B

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = 3x^2 + 6x + 9$$

$$2a \neq 3b$$



$$y = c \sin x$$

$$y = 3x^2 - 1$$

q

ϕ

δ

