

Kegiatan Belajar 2

PENGUJIAN LINEARITAS DAN HOMOGENITAS

1. Pengujian Linearitas

Pengujian linearitas dalam sebuah penelitian diperlukan beberapa kelompok data, setiap kelompok data terdiri dari beberapa data yang sama pada data X dan pasangan data Y. setiap kelompok data X terdiri dari n data berpangan dengan Y yang datanya berbeda. Adapun perhitungan yang dibutuhkan dalam pengujian linearitas adalah: jumlah kuadrat (JK) untuk berbagai variasi yaitu jumlah kudrat total (JK-T), regresi (a), regresi (b/a), jumlah kuadrat sisa atau residu (JK-S), jumlah kuadrat tuna cocok (JK-TC) dan jumlah kuadrat galat atau eror (JK-G). setiap variasi yang digunakan dalam pengujian linearitas memiliki derajat kebebasan (dk), yaitu: n untuk total, 1 untuk regresi (a), 1 untuk regresi (b/a), n-2 untuk sisa, k-1 untuk tuna, dan n-k untuk galat. Dengan adanya derajat kebebasan, maka dapat ditentukan rata-rata jumlah kuadrat (RJK) yaitu membagi jumlah kuadrat dengan dk masing-masing, maka diperoleh:

$$RJK = \frac{JKT}{n}, \quad RJK(a) = JK(a), \quad \text{dan} \quad RJK\left(\frac{b}{a}\right) = JK\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$RJS = \frac{RJS}{n-2} \quad RJK(G) = \frac{JKG}{n-2}, \quad \text{dan} \quad RJKTC = \frac{JKTC}{k-2}$$

$RJK\left(\frac{b}{a}\right) = s_{reg}^2$ yaitu variansi regresi dan $RJK(S) = s_{sisa}^2$, sedangkan $RJK(TC) = s_{TC}^2$ dan $RJK(G) = s_G^2$

Adapun hasil perhitungan dimasukkan dalam tabel yang disebut dengan daftar analisis varian (ANOVA) untuk linear sederhana. Pengujian hipotesis koefisien arah regresi dengan menggunakan statistic F, yaitu variansi regresi dibagi dengan variansi sisa atau $F = \frac{s_{reg}^2}{s_{sisa}^2}$ dan selanjutnya menggunakan distribusi Fisher dengan derajat kebebasan pembilang 1 dan penyebut n-2. Kriteria pengujian adalah tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ dengan kata lain tolak hipotesis nol yang mengatakan koefisien arah regresi tidak berarti sama dengan nol berdasarkan taraf nyata atau taraf signifikansi tertentu.

Selanjutnya, untuk menguji bentuk regresi linear digunakan statistic F yaitu tuna cocok dibagi dengan varian sisa atau $F = \frac{s_{TC}^2}{s_G^2}$ dengan menggunakan distribusi F, derajat kebebasan pembilang $k-2$ dan derajat kebebasan penyebut $n-k$. Kriteria pengujian

adalah tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ dengan kata lain tolak hipotesis yang menyatakan bentuk regresi linear berdasarkan taraf signifikansi tertentu. Untuk lebih memahaminya, maka akan disajikan dalam bentuk tabel analisis regresi linear sederhana berikut ini;

Tabel Analisis Varian (ANOVA) Regresi Linear Sederhana

Sumber Variansi	dk	JK	PJK	F
Total	n	$\sum Y^2$	$\sum Y^2$	
Regresi (a)	1	$JK(a)$	$JK(a)$	
Regresi (b/a)	1	$JK(b/a)$	$s^2_{reg} = JK(b/a)$	s^2_{reg} / s^2_{sisa}
Sisa	$n-2$	$JK(S)$	$s^2_{sisa} = JK(S) / n-2$	
Tuna Cocok	$k-2$	$JK(TC)$	$s^2_{TC} = JK(TC) / k-2$	s^2_{TC} / s^2_G
Galat	$n-k$	$JK(G)$	$s^2_G = JK(G) / n-k$	

Contoh:

✓ **Kelas Eksperimen**

Hasil pengukuran terhadap motivasi belajar dan prestasi belajar siswa di sebuah Sekolah Dasar kelas VI dalam mata pelajaran matematika khususnya materi statistika. Kedua hasil pengukuran tersebut dihubungkan untuk melihat keterkaitan antara variabel motivasi (X) dan prestasi belajar (Y). Adapun hipotesis yang akan diuji ada dua yaitu, kelinearan regresi dan keberartian koefisien regresi. Adapun rumusan hipotesis sebagai berikut:

1. H_0 : Hubungan motivasi dengan prestasi memiliki koefisien arah regresi yang berarti atau signifikan.
 H_1 : Hubungan motivasi dengan prestasi memiliki koefisien arah regresi yang tidak berarti atau signifikan.
2. H_0 : Hubungan motivasi dengan prestasi berbentuk regresi linear.
 H_1 : Hubungan motivasi dengan prestasi berbentuk regresi tidak linear.

Kriteria pengujian hipotesis:

1. Tolak hipotesis koefisien arah regresi signifikan jika $F \geq F_{(1-\alpha)(1,n-2)}$ atau tolak $F_{hitung} \geq F_{tabel}$.
Distribusi F diambil dk pembilang = 1 dan dk penyebut = $(n - 2)$.
2. Tolak hipotesis model regresi linear jika $F \geq F_{(1-\alpha)(1,n-2)}$ atau tolak $F_{hitung} \geq F_{tabel}$. Distribusi F diambil dk pembilang = $(k - 2)$ dan dk penyebut = $(n - k)$.

Skor X dan Y yang diperoleh setelah pengukuran dan disusun dalam tabel sebagai berikut:

Tabel Data Motivasi dan Prestasi Belajar

X	Y	XY	X^2	Y^2
30	85	2550	900	7225
30	85	2550	900	7225
30	70	2100	900	4900
30	60	1800	900	3600
30	95	2850	900	9025
35	85	2975	1225	7225
35	75	2625	1225	5625
35	95	3325	1225	9025
35	85	2975	1225	7225
40	85	3400	1600	7225
40	85	3400	1600	7225
40	75	3000	1600	5625
45	80	3600	2025	6400
50	75	3750	2500	5625
50	80	4000	2500	6400
50	80	4000	2500	6400
50	85	4250	2500	7225
50	85	4250	2500	7225
50	85	4250	2500	7225
50	95	4750	2500	9025
55	85	4675	3025	7225
60	85	5100	3600	7225
60	85	5100	3600	7225
60	85	5100	3600	7225
60	80	4800	3600	6400
60	85	5100	3600	7225
65	75	4875	4225	5625
80	85	6800	6400	7225
80	90	7200	6400	8100

80	80	6400	6400	6400
85	85	7225	7225	7225
1550	2565	128775	85400	213775

Dari Tabel diatas diperoleh harga:

$$\sum X = 1550, \sum Y = 2565, \sum XY = 128775, \sum X^2 = 85400, \sum Y^2 = 213775$$

Langkah pertama:

Seperti telah dibahas pada materi regresi linear sederhana, dihitung a dan b menggunakan kuadrat terkecil dengan rumus:

$$a = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)\sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$= \frac{(2565)(85400) - (1550)(128775)}{31(85400) - (2402500)}$$

$$= \frac{219051000 - 199601250}{2647400 - 2402500} = \frac{19449750}{244900} = 79,419$$

$$b = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$= \frac{31(128775) - (1550)(2565)}{31(85400) - (2402500)}$$

$$= \frac{3992025 - 3975750}{2647400 - 2402500} = \frac{16275}{244900} = 0,066$$

Dari hasil perhitungan diperoleh $a = 79,419$ dan $b = 0,066$, maka kecenderungan regresi linear berprestasi (Y) atas motivasi (X) adalah $\hat{Y} = a + bX$ atau $\hat{Y} = 79,419 + 0,066X$

Langkah kedua:

Menghitung semua jumlah kuadrat, yaitu:

$$JK(T) = \sum Y^2 = 213775$$

$$JK(a) = \frac{(\sum Y)^2}{n} = \frac{(2565)^2}{31} = \frac{6579225}{31} = 212233,065$$

$$\begin{aligned} JK\left(\frac{b}{a}\right) &= b \left\{ \sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n} \right\} \\ &= 0,066 \left\{ 128775 - \frac{(1550)(2565)}{31} \right\} \\ &= 0,066 \left\{ 128775 - \frac{3975750}{31} \right\} \\ &= 0,066 \{ 128775 - 128250 \} \\ &= 0,066(525) \\ &= 34.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} JK(S) &= JK(T) - JK(a) - JK\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= 213775 - 212233,065 - 34.65 \\ &= 1507,285 \end{aligned}$$

$$JK(G) = \sum X_i \left\{ \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n_i} \right\}$$

Untuk menghitung JK(G) diperlukan beberapa tahap, yaitu mengelompokkan skor yang sama pada data X, setiap kelompok data X terdiri dari beberapa data yang sama dan jumlah data yang diberi notasi n , sehingga ada kelompok pasangan data X dengan Y dalam jumlah n . Untuk memberikan gambaran data yang ada dikelompokkan hasilnya sebagai berikut.

Tabel Pengelompokkan Data X dengan Pasangan Data Y

X	Kelompok	n_i	Y
30	1	5	85
30			85
30			70
30			60
30			95
35	2	4	85
35			75
35			95

35			85
40			85
40	3	3	85
40			75
45	4	1	80
50			75
50			80
50			80
50	5	7	85
50			85
50			85
50			95
55	6	1	85
60			85
60			85
60	7	5	85
60			80
60			85
65	8	1	75
80			85
80	9	3	90
80			80
85	10	1	85

$$\begin{aligned}
JK(G) = & \left\{ 85^2 + 85^2 + 70^2 + 60^2 + 95^2 - \frac{(85+85+70+60+95)^2}{5} \right\} \\
& + \left\{ 85^2 + 75^2 + 95^2 + 85^2 - \frac{(85+75+95+85)^2}{4} \right\} + \left\{ 85^2 + 85^2 + 75^2 - \frac{(85+85+75)^2}{3} \right\} \\
& + \left\{ 80^2 - \frac{(80)^2}{1} \right\} + \left\{ 75^2 + 80^2 + 80^2 + 85^2 + 85^2 + 85^2 + 95^2 - \frac{(75+80+80+85+85+85+95)^2}{7} \right\} \\
& + \left\{ 85^2 - \frac{(85)^2}{1} \right\} + \left\{ 85^2 + 85^2 + 85^2 + 80^2 + 85^2 - \frac{(85+85+85+80+85)^2}{5} \right\} + \left\{ 75^2 - \frac{(75)^2}{1} \right\} + \\
& \left\{ 85^2 + 90^2 + 80^2 - \frac{(85+90+80)^2}{3} \right\} + \left\{ 85^2 - \frac{(85)^2}{1} \right\} = 1342,381
\end{aligned}$$

$$JK(TC) = JK(S) - JK(G)$$

$$= 1507,285 - 1342,381$$

Berdasarkan perhitungan diatas diperoleh daftar ANAVA berikut:

Tabel Anava untul Regresi $\hat{Y} = 79,419 + 0,066X$

Sumber Variasi	dk	JK	RJK	F
Total	dk	213775		
Regresi (a)	1	212233.065		34,65 / 51,98 = 0,67
Regresi (b/a)	1	34.65	$s^2_{reg} = 34,65$	
Sisa	31 - 2 = 29	1507.285	$s^2_{reg} = 1507,285 / 29$	0.322
Tuna Cocok	10 - 2 = 8	164.905	$s^2_{reg} = 164,905 / 8$	
Galat	31 - 10 = 21	1342.381	$s^2_{reg} = 1342,381 / 21$	

Dengan menggunakan taraf signifikansi sebesar 5% untuk melakukan pengujian hipotesis 1 dari distribusi F dimana dk pembilang 1 dan dk penyebutnya adalah $n - 2 = 29$ dan diperoleh nilai F_{tabel} sebesar 4,18. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $F_{hitung} = 0.67 > F_{tabel} = 4,18$ maka H_0 ditolak sehingga hubungan antara motivasi dengan prestasi belajar signifikan. Selanjutnya, untuk pengujian hipotesis 2 dimana dk pembilang $k - 2 = 8$ dan dk penyebut $n - k = 21$ sehingga nilai F_{tabel} sebesar 2,42. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $F_{hitung} = 0.322 > F_{tabel} = 2,42$ maka H_0 ditolak sehingga hubungan antara motivasi dengan prestasi belajar membentuk regresi linear.

✓ **Kelas Kontrol**

Tabel Data Motivasi dan Prestasi Belajar

X	Y	XY	X^2	Y^2
30	85	2555	900	7225
30	85	2550	900	7225
35	80	2800	1225	6400
35	70	2450	1225	4900
40	60	2400	1600	3600
40	80	3200	1600	6400
40	75	3000	1600	5625
40	60	2400	1600	3600
45	70	3150	2025	4900
45	90	4050	2025	8100
45	85	3825	2025	7225
50	75	3750	2500	5625
55	80	4400	3025	6400
55	75	4125	3025	5625
55	65	3575	3025	4225

55	85	4675	3025	7225
55	80	4400	3025	6400
60	75	4500	3600	5625
60	80	4800	3600	6400
60	60	3600	3600	3600
60	80	4800	3600	6400
60	80	4800	3600	6400
65	80	5200	4225	6400
65	70	4550	4225	4900
65	65	4225	4225	4225
70	55	3850	4900	3025
70	60	4200	4900	3600
70	70	4900	4900	4900
75	60	4500	5625	3600
1530	2135	111225	85350	159775

Dari Tabel diatas diperoleh:

$$\sum X = 1530, \sum Y = 2135, \sum XY = 111225, \sum X^2 = 85350, \sum Y^2 = 159775$$

Langkah pertama:

Seperti telah dibahas pada materi regresi linear sederhana, dihitung a dan b menggunakan kuadrat terkecil dengan rumus:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)\sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \\
 &= \frac{(2135)(85350) - (1530)(111225)}{29(85350) - (2340900)} \\
 &= \frac{182222250 - 170174250}{2475150 - 2340900} = \frac{12048000}{134250} = 89,743 \\
 b &= \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \\
 &= \frac{29(111225) - (1530)(2135)}{29(85350) - (2340900)} \\
 &= \frac{3225525 - 3266550}{2475150 - 2340900} = \frac{-41025}{134250} = -0.306
 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh $a = 89,743$ dan $b = -0,306$ maka kecenderungan regresi linear berprestasi (Y) atas motivasi (X) adalah $\hat{Y} = a + bX$ atau $\hat{Y} = 89,743 + (-0,306)X$.

Langkah kedua:

Menghitung semua jumlah kuadrat, yaitu:

$$JK(T) = \sum Y^2 = 159775$$

$$JK(a) = \frac{(\sum Y)^2}{n} = \frac{(2135)^2}{29} = \frac{4558225}{29} = 157180,172$$

$$JK\left(\frac{b}{a}\right) = b \left\{ \sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n} \right\}$$

$$= -0,306 \left\{ 111225 - \frac{(1530)(2135)}{29} \right\}$$

$$= -0,306 \left\{ 111225 - \frac{3266550}{29} \right\}$$

$$= -0,306 \{ 111225 - 112639,655 \}$$

$$= -0,306(0,987)$$

$$= -0,302$$

$$JK(S) = JK(T) - JK(a) - JK\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= 159775 - 157180,172 - (-0,302)$$

$$= 2595,129$$

$$JK(G) = \sum X_i \left\{ \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n_i} \right\}$$

Untuk menghitung JK(G) diperlukan beberapa tahap, yaitu mengelompokkan skor yang sama pada data X, setiap kelompok data X terdiri dari beberapa data yang sama dan jumlah data yang diberi notasi n , sehingga ada kelompok pasangan data X dengan Y dalam jumlah n . Untuk memberikan gambaran data yang ada dikelompokkan hasilnya sebagai berikut.

Tabel Pengelompokan Data X dengan Pasangan Data Y

X	Kelompok	n_i	Y
30	1	2	85
30			85

35	2	2	80
35			70
40	3	4	60
40			80
40			75
40			60
45	4	3	70
45			90
45			85
50	5	1	75
55	6	5	80
55			75
55			65
55			85
55			80
60	7	5	75
60			80
60			60
60			80
60			80
65	8	3	80
65			70
65			65
70	9	3	55
70			60
70			70
75	10	1	60

$$\begin{aligned}
JK(G) &= \left\{ 85^2 + 85^2 - \frac{(85+85)^2}{2} \right\} + \left\{ 80^2 + 70^2 - \frac{(80+70)^2}{2} \right\} + \left\{ 60^2 + 80^2 + 75^2 + 60^2 - \frac{(60+80+75+60)^2}{4} \right\} \\
&+ \left\{ 70^2 + 90^2 + 85^2 - \frac{(70+90+85)^2}{3} \right\} + \left\{ 75^2 - \frac{(75)^2}{1} \right\} + \left\{ 80^2 + 75^2 + 65^2 + 85^2 + 80^2 - \frac{(80+75+65+85+80)^2}{5} \right\} \\
&+ \left\{ 75^2 + 80^2 + 60^2 + 80^2 + 80^2 - \frac{(75+80+60+80+80)^2}{5} \right\} + \left\{ 55^2 + 60^2 + 70^2 - \frac{(55+60+70)^2}{3} \right\} + \left\{ 60^2 - \frac{(60)^2}{1} \right\} \\
&= 1348,750
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
JK(TC) &= JK(S) - JK(G) \\
&= 2595,129 - 1348,750 \\
&= 1246,379
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan diatas diperoleh daftar ANAVA berikut:

Tabel Anava untul Regresi $\hat{Y} = 89,743 + (-0,306)X$

Sumber Variasi	dk	JK	RJK	F
Total	29	159775		
Regresi (a)	1	157180.172		0.003
Regresi (b/a)	1	-0,30	$s^2_{reg} = -0,30$	
Sisa	$29 - 2 = 27$	2595.129	$s^2_{sisa} = 2595,129 / 27$	2.195
Tuna Cocok	$10 - 2 = 8$	1246.379	$s^2_{TC} = 1246,379 / 8$	
Galat	$29 - 10 = 19$	1348.750	$s^2_G = 1348,750 / 19$	

Dengan menggunakan taraf signifikansi sebesar 5% untuk melakukan pengujian hipotesis 1 dari distribusi F dimana dk pembilang 1 dan dk penyebutnya adalah $n - 2 = 27$ dan diperoleh nilai F_{tabel} sebesar 4,20. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $F_{hitung} = 0.67 > F_{tabel} = 4,21$ maka H_0 ditolak sehingga hubungan antara motivasi dengan prestasi belajar signifikan. Selanjutnya, untuk pengujian hipotesis 2 dimana dk pembilang $k - 2 = 8$ dan dk penyebut $n - k = 19$ sehingga nilai F_{tabel} sebesar 2,48. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $F_{hitung} = 0.322 > F_{tabel} = 2,48$ maka H_0 ditolak sehingga hubungan antara motivasi dengan prestasi belajar membentuk regresi linear.

2. Pengujian Homogenitas

Pengujian homogenitas adalah teknik analisis data yang digunakan untuk melihat bahwa kedua sampel atau lebih yang digunakan dalam penelitian berasal dari populasi yang memiliki variansi yang sama atau tidak. Rumus pengujian homogenitas adalah

$$F = \frac{\text{varian besar}}{\text{varian kecil}} \text{ atau } F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Keterangan:

$$s_1^2 = \text{varian besar}$$

$$s_2^2 = \text{varian kecil}$$

Kriteria pengujiannya adalah:

$$H_0 \text{ diterima jika } F_{(1-\alpha)(n_1-1)} < F < F_{\frac{1}{2}\alpha(n_1-1)(n_2-1)}$$

$$H_1 \text{ ditolak jika } F \geq F_{\frac{1}{2}\alpha(n_1, n_2)}$$

Dengan dk pembilang n dan dk penyebut juga n.

Contoh:

✓ **Kelas Eksperimen**

Pengajaran menggunakan metode A dan metode B mata pelajaran Matematika Wajib. Sampel keduanya berasal dari populasi berdistribusi normal. Sampel berukuran $n_1 = 31$ diperoleh varians $s_1^2 = 262,851$ dan $n_2 = 29$ diperoleh varians $s_2^2 = 166,050$. Ujilah apakah kedua pengukuran motivasi variansinya homogen dengan menggunakan $\alpha = 0,05$.

Dengan menggunakan rumus:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{262,851}{166,050} = 1,583$$

Derajat kebebasan pembilang $= n - 1 = 31 - 1 = 30$, dan penyebut $= n - 1 = 29 - 1 = 28$ diperoleh $F_{0,05(28,30)} = 1,87$. Dari hasil perhitungan $F_{hitung} = 1,58$ dan $F_{tabel} = 1,87$, maka H_0 diterima berarti kedua sampel mempunyai variansi yang sama atau homogen.

✓ **Kelas Kontrol**

Pengajaran menggunakan metode A dan metode B mata pelajaran Matematika Wajib. Sampel keduanya berasal dari populasi berdistribusi normal. Sampel berukuran $n_1 = 29$ diperoleh varians $s_1^2 = 113,950$ dan $n_2 = 31$ diperoleh varians $s_2^2 = 48,475$. Ujilah apakah kedua pengukuran motivasi variansinya homogen dengan menggunakan $\alpha = 0,05$.

Dengan menggunakan rumus:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{113,950}{48,475} = 2,351$$

Derajat kebebasan pembilang $= n - 1 = 29 - 1 = 28$, dan penyebut $= n - 1 = 31 - 1 = 30$ diperoleh $F_{0,05(30,28)} = 1,84$. Dari hasil perhitungan $F_{hitung} = 2,35$ dan $F_{tabel} = 1,84$, maka H_0 ditolak berarti kedua sampel mempunyai variansi yang tidak sama atau tidak homogen.