

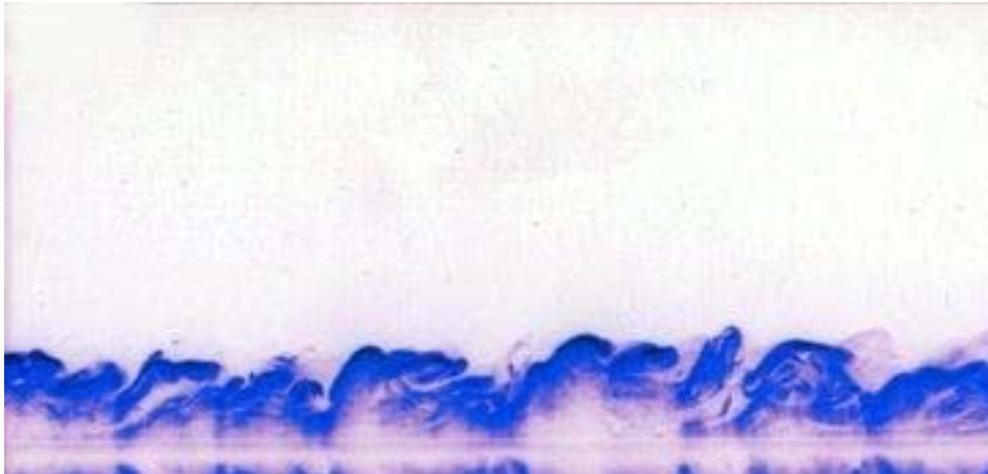
## 10. Pemodelan turbulensi

Aliran turbulen adalah salah satu fenomena fisik yang kompleks dan menarik minat banyak peneliti. Leonardo da Vinci (1800 an) menggambarkan pusaran aliran air yang melalui suatu konfigurasi akan menghasilkan pusaran yang bersifat acak tetapi juga memiliki pola tertentu (Gambar 10. 1). Suatu aliran turbulen jika diberi injeksi (misalnya aliran udara yang diinjeksi asap, atau aliran air yang diinjeksi tinta) akan menunjukkan adanya pusaran yang kemudian dikenal sebagai Eddy (Gambar 10. 2). Ukuran Eddy sangat bervariasi, mulai dari yang besar (*large scale Eddy*) sampai yang berukuran kecil (*small scale Eddy*).



Gambar 10. 1 Lukisan Leonardo da Vinci yang menggambarkan aliran turbulen

Munculnya *large scale Eddy* dalam aliran menandakan bahwa aliran bersifat turbulen, tetapi tidak semua aliran turbulen menunjukkan adanya eddy. *Small scale Eddy* dalam aliran turbulen tidak dapat dilihat dengan mata telanjang.



Gambar 10. 2 Visualisasi 'olakan Eddy' dengan menggunakan asap

### 10.1. DEFINISI TURBULENSI

Walaupun kita dapat mengidentifikasi adanya turbulensi dalam aliran, tetapi kita tidak dapat mendefinisikan aliran turbulen secara tepat. Tennekes dan Lumley (1972) menyatakan bahwa aliran turbulen tidak dapat didefinisikan, tetapi dapat diidentifikasi berdasarkan sifat-sifat turbulensi (Tennekes and Lumley, 1972). Beberapa sifat itu adalah:

- Tidak beraturan

Salah satu sifat aliran turbulen adalah tidak beraturan (random). Karena itu analisa aliran turbulen selalu menggunakan metode statistik.

- Dispersif

Aliran turbulen akan cenderung menyebar (dispersif). Sifat ini menyebabkan aliran turbulen memiliki kemampuan yang tinggi dalam proses pencampuran (mixing), perpindahan panas, perpindahan momentum dan perpindahan massa.

- Disipatif

Turbulen memiliki energi internal berupa pusaran besar (*large scale Eddy*) dan pusaran kecil (*small scale Eddy*). Energi pusaran besar didapat dari aliran utama (*free stream*) dan energi pusaran kecil ditransfer dari pusaran besar. Proses ini dikenal sebagai *energy cascade*. Energi yang dikandung pusaran kecil akan melemah karena efek gesekan fluida akibat viskositas fluida. Untuk mempertahankan turbulensi, dibutuhkan suplai energi dari aliran utama. Hal ini yang

menjelaskan kenapa kehilangan energi akibat gesekan pada aliran turbulen jauh lebih besar daripada aliran laminar.

Gelombang permukaan air laut adalah fenomena fisik yang menyebar (dispersif) tetapi bukan merupakan aliran turbulen karena gelombang ini tidak bersifat disipatif. Hal ini yang menjelaskan kenapa gelombang tinggi akibat Tsunami di Aceh masih dapat menyebar sampai daerah India dan timur Afrika. Gelombang laut hanya akan terserap energinya ketika ia membentur pantai. Karena itu pecahnya gelombang laut di pantai merupakan fenomena turbulen.

- Bilangan Reynolds yang tinggi

Aliran turbulen selalu memiliki bilangan Reynolds yang tinggi. Nilai absolut dari bilangan Reynolds untuk turbulen selalu relatif terhadap konfigurasi aliran. Misalnya aliran eksternal akan memiliki bilangan Reynolds yang lebih tinggi daripada aliran internal. Tetapi nilai relatif bilangan Reynolds aliran turbulen selalu lebih tinggi daripada aliran laminar. Karena bilangan Reynolds merupakan rasio antara gaya inersia aliran dan gaya gesek, pengaruh gaya inersia pada aliran turbulen jauh lebih dominan dibandingkan dengan pengaruh gaya gesek. Salah satu contoh adalah tebal lapisan batas (*boundary layer thickness*) turbulen lebih tipis dibandingkan dengan aliran laminar.

- Vortisitas tiga-dimensi

Apapun konfigurasinya, aliran turbulen selalu memiliki vortisitas/ pusaran tiga dimensi. Pembentukan lapisan batas antara aliran dan dinding selalu berawal pada kondisi laminar. Vortisitas aliran laminar bersifat dua dimensi dari dinding ke arah freestream. Semakin ke arah hilir (down stream) lapisan batas akan mengalami transisi dan berubah menjadi turbulen. Transisi dari laminar ke turbulen merupakan mekanisme kompleks yang mengubah vortisitas laminar (dua dimensi) menjadi vortisitas turbulen (tiga dimensi).

- Kontinum

Aliran turbulen adalah bagian dari disiplin ilmu mekanika fluida. Dalam analisisnya, mekanika fluida selalu menggunakan **pendekatan bahwa fluida sebagai kontinum, suatu ukuran fluida yang jauh lebih besar dari ukuran molekul, tetapi lebih kecil dari ukuran partikel. Karena itu Eddy yang terkecil dalam turbulensi, ukurannya masih jauh lebih besar daripada ukuran molekul.**

- Aliran turbulen adalah suatu aliran.

Karakter aliran turbulen tidak ditentukan oleh jenis fluida tetapi oleh karakter aliran itu sendiri. Turbulensi aliran pada fluida air dengan udara akan memiliki karakter yang sama jika memiliki bilangan Reynolds yang sama. Tegangan geser yang terjadi pada lapisan batas turbulen berasal dari viskositas fluida/viskositas molekuler (sifat molekuler fluida) dan viskositas turbulensi (sifat aliran). Viskositas turbulensi adalah efek viskositas yang ditimbulkan oleh Eddy dan pengaruhnya lebih dominan daripada viskositas molekuler.

## 10.2. REYNOLDS AVERAGING

Berdasarkan karakteristik turbulensi seperti dijelaskan diatas, kecepatan aliran turbulen selalu dipengaruhi oleh Eddy. Oleh karena itu kecepatan di seluruh lokasi aliran akan selalu berubah-ubah. Pengukuran kecepatan pada suatu lokasi ditunjukkan oleh Untuk melakukan analisa kuantitatif pada aliran turbulen diperlukan metode statistik/averaging. Averaging dapat dilakukan terhadap ruang (space averaging) atau averaging terhadap waktu (*time averaging*). Analisa time averaging digunakan untuk aliran turbulen yang bersifat tidak homogen dan stasioner (struktur Eddy tidak berubah terhadap waktu)

$$u(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} u(x,t) dt \quad 10.1$$

Untuk aliran turbulen yang homogen dan turbulensi (pola Eddy) berubah-ubah terhadap waktu, space averaging lebih sesuai:

$$u(t) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \iiint u(x,t) dV \quad 10.2$$

Karena hampir semua aliran turbulen bersifat tidak homogen, pemakaian analisa *time averaging* lebih sesuai. Pengukuran komponen kecepatan di suatu lokasi pada aliran turbulen tidak homogen disajikan di Gambar 10. 3).



Gambar 10. 3 Fluktuasi kecepatan aliran turbulen

Langkah awal dalam analisa *time averaging* adalah dengan melakukan proses dekomposisi kecepatan ke dalam komponen rata-rata dan komponen fluktuasi.

$$u(x, t) = U(x, t) + u'(x, t) \quad 10.3$$

Beberapa aspek penting dalam time averaging adalah sebagai berikut (untuk analisa detail lihat Wilcox, 1993): Time average terhadap komponen fluktuasi adalah nol dan time averaging bersifat komutative terhadap ruang dan waktu (persamaan 10.3). Averaging terhadap dua variabel (u dan v) akan menghasilkan empat buah ruas persamaan dengan averaging antara komponen rata-rata dan fluktuasi diabaikan ( $\overline{U v'}$  dan  $\overline{V u'}$ ), dan averaging antara dua komponen fluktuasi ( $\overline{u' v'}$ ) tidak selalu nol, tergantung korelasinya. Dua variabel terkorelasi jika  $\overline{u' v'} \neq 0$ , dan tidak terkorelasi jika  $\overline{u' v'} = 0$  (persamaan 10.4).

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

10.4

$$\overline{uv} = \overline{(U + u')(V + v')} = \overline{UV} + \overline{Vu'} + \overline{Uv'} + \overline{u'v'} = UV + \overline{u'v'}$$

10.5

Reynolds (1895) mengajukan konsep *time averaging* terhadap semua properti aliran. Komponen kecepatan, dan variabel lain seperti tekanan di persamaan momentum dan variabel energi internal di persamaan kesetimbangan energi jika dilakukan averaging akan menghasilkan kecepatan rata-rata dan kecepatan fluktuasi.

$$u(t) = U + u'$$

$$p(t) = P + p'$$

$$e_0(t) = E_0 + e_0'$$

10.6

Persamaan ( ) jika disubstitusikan ke persamaan Navier-Stokes ( ), dan persamaan energi ( ); akan menghasilkan persamaan momentum ( ) dan energi ( ) dalam bentuk baru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$$

10.7

$$\frac{\partial(\rho e_0)}{\partial t} + \text{div}(\rho e_0 \vec{U}) = -p \text{div} \vec{U} + \text{div}(k \text{grad } T) + \theta + S_i$$

10.8

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \right)$$

10.9

$$\frac{\partial E_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j E_o) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -U_j P - \overline{u'_j p} - \overline{u'_j e'_o} - Q + U_i \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i \tau'_{ij}} \right)$$

10.10

Persamaan ( ) dikenal sebagai Persamaan Navier-Stokes yang di-*averaging* terhadap waktu, *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS). Proses *averaging* menghasilkan korelasi ganda pada kecepatan flutuasi ( $\overline{u_i u_j}$ ). Karena bentuknya mirip dengan Tensor tegangan, maka korelasi tersebut dikenal dengan nama Reynolds Stress Tensor. Perbedaan yang mendasar antara tensor tegangan dan Reynolds Stress Tensor adalah:

- Tensor tegangan timbul akibat fluida memiliki viskositas fluida yang merupakan sifat fisik/material dari fluida. Karena itu tensor ini dinamakan *viscous tensor*.
- Reynolds Stress Tensor timbul karena aliran bersifat turbulen dan nilainya tergantung pada tingkat turbulensi aliran.

Analogi dengan *viscous tensor*, nilai Reynolds Stress Tensor juga sebanding dengan "efek viskositas turbulensi" yang dikenal sebagai viskositas turbulensi (*turbulent viscosity*) atau dikenal juga sebagai eddy viscosity. Boussinesq (1877) merupakan ilmuwan pertama yang memperkenalkan konsep eddy viscosity dan menyatakan analogi antara Viscous Tensor dengan Reynolds Stress Tensor.

Persamaan RANS untuk aliran tiga dimensi mempunyai 4 (empat) buah persamaan (satu persamaan konservasi masa dan tiga persamaan momentum ke arah x,y dan z). Variabel yang ada sebanyak 4 buah (komponen kecepatan U, V, W, dan tekanan(p)) dan ada (6 (enam) buah variabel tambahan dari Reynolds Stress Tensor. Karena jumlah variabel yang tidak diketahui melebihi jumlah persamaan yang ada, persamaan RANS tidak dapat diselesaikan tanpa adanya persamaan tambahan. Persamaan yang tersedia ada empat yaitu persamaan continuity dan tiga persamaan momentum ke arah x,y,z. Sedangkan jumlah variabel yang tidak diketahui ada sepuluh, yaitu average pressure, tiga komponen average velocity dan enam buah komponen Reynolds Stress. Untuk menyelesaikan governing equations tersebut, diperlukan persamaan tambahan yang menghubungkan Reynolds Stress Tensor dengan variabel aliran lainnya. Proses menghubungkan persamaan inilah yang disebut sebagai pemodelan turbulensi.

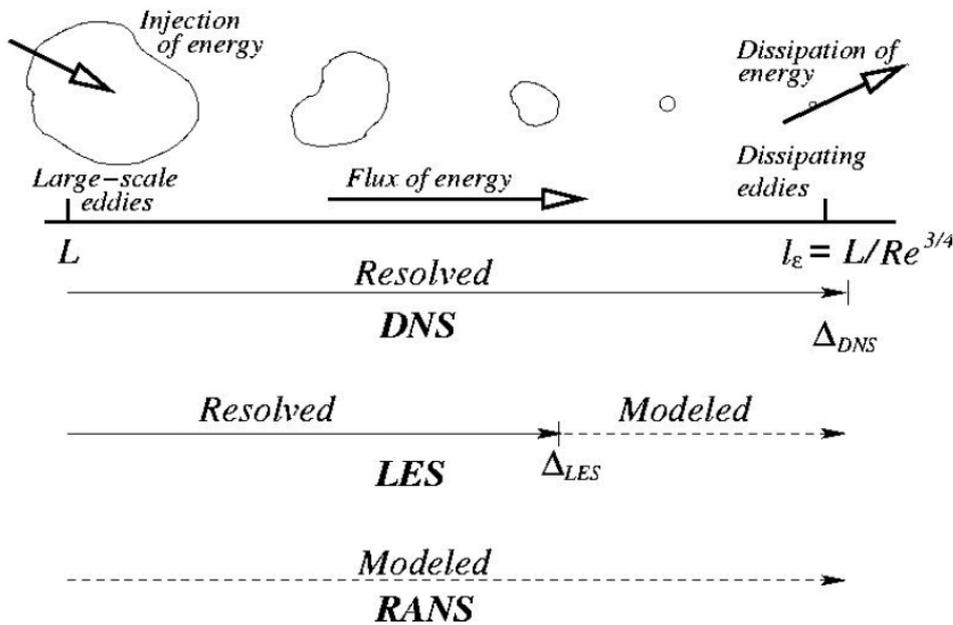
### 10.2.1 KLASIFIKASI MODEL TURBULENSI

Seperti dijelaskan di sub-bab sebelumnya, turbulensi terjadi jika dalam aliran terdapat Eddy, baik yang berukuran besar dan kecil. Tiap ukuran Eddy memiliki karakteristik tertentu, sesuai dengan energi pusaran (kecepatan rotasi /*turbulent velocity scale/  $u$* ) dan ukuran (radius rotasi / *turbulent length scale/  $\ell$* ) yang dimilikinya (Gambar 10. 4).



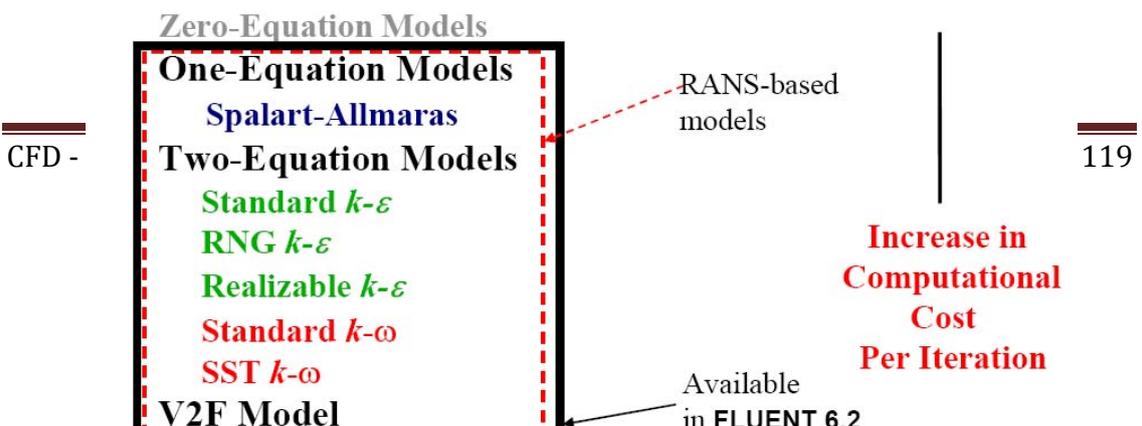
Gambar 10. 4 Karakteristik Eddy dalam turbulensi

Model turbulensi dapat diklasifikasikan menurut cara pemodelan *large eddies* dan *small eddies* dalam aliran turbulen. Secara umum, pemodelan turbulensi dapat dibagi atas 3 tingkatan yaitu Direct Numeric Simulation, Large Eddy Simulation, dan model turbulensi yang berdasarkan Reynolds Averaged Equations (Gambar 10. 5).



Gambar 10. 5 Energy cascade () antara large Eddy dengan small Eddy (Richardson, 1922)

*Direct Numeric Simulation* (DNS), merupakan model yang menggunakan persamaan-persamaan differensial murni dari Navier Stokes equation dalam memodelkan aliran turbulennya. Dalam simulasi DNS, ukuran grid yang digunakan harus sesuai dengan skala vortex terkecil (smallest eddies) yang terjadi dalam aliran turbulen, biasanya sekitar  $10^{-12}$  m. Pemodelan ini akan memberikan hasil yang cukup baik, namun untuk mensimulasikannya diperlukan kemampuan komputer yang sangat tinggi. Sebagai ilustrasi, misalkan memodelkan lapisan batas turbulen dengan ukuran domain panjang, lebar dan tinggi masing-masing sebesar: 100 cm x 4 cm x 40 cm; memerlukan elemen 3-dimensi sebanyak:  $1.6 \times 10^{33}$  buah elemen. Karena itu simulasi DNS hanya bisa dilakukan dengan super komputer yang hanya dimiliki oleh beberapa negara saja.



Gambar 10. 6 Klasifikasi pemodelan turbulensi dalam software CFD

Model kedua yaitu Large Eddy Simulation (LES) tidak berdasarkan Reynolds Averaged Equations, namun berdasarkan *space filtered equation*. Dalam model ini ada dua macam kategori penting, yaitu *Largest Eddies* dan *Smallest Eddies*. Untuk *Largest Eddies*, aliran turbulen bersifat anisotropic (directional) dan tergantung pada kekuatan interaksi aliran terhadap mean flow sehingga dapat diselesaikan dengan dengan membuat meshing yang memiliki ukuran sebesar *large scale*. Sedangkan, untuk aliran dengan Reynold Number yang tinggi (mean flow yang tinggi) akan terjadi *Smallest Eddies* dalam aliran turbulen, dimana aliran ini bersifat isotropic (non-directional), sehingga untuk menyelesaikannya dilakukan melalui pemodelan. Model LES ini biasanya memerlukan kemampuan komputer yang tinggi untuk mensimulasikannya dan waktu yang dibutuhkan juga sangat lama.

Model ketiga, yaitu model turbulen yang berdasarkan Reynolds Averaged Equations memodelkan semua ukuran/scale Eddy mulai dari yang terbesar (*largest Eddy*) sampai yang terkecil (*smallest Eddy*). Konsekuensi dari pemodelan ini adalah ukuran grid dalam meshing tidak terpengaruh oleh tingkat turbulensi aliran. Model Reynolds Averaged Equations meliputi: Algebraic Turbulence Model / *Zero Equation Model*, Model Satu-persamaan, Model dua-persamaan, Reynolds Stress equation Model, dan Algebraic Stress Equation Model. Untuk model turbulen Satu-persamaan dan Dua-persamaan dapat dikategorikan sebagai *Turbulence Energy Equation Models*. Sedangkan, *Reynolds Stress Equation Model* dan *Algebraic Stress Equation Model* dapat dikelompokkan sebagai *Second Order / Second Moment Closure Model*.

Setelah Prandtl (1904) mengemukakan konsep *boundary layer*, dengan berfokuskan pada aliran turbulen, Prandtl (1925) memperkenalkan konsep mixing length dan menyatakan eddy viscosity dalam bentuk mixing length. Hipotesis mixing length ini berhubungan erat dengan konsep eddy viscosity dan menjadi dasar perkembangan pemodelan turbulensi pada abad 21. Model turbulen ini dikenal juga sebagai Mixing Length Model atau Algebraic Model atau disebut juga Zero Equation Model.

Untuk memperbaiki prediksi properties aliran turbulen yang lebih realistis, Prandtl (1945) mengasumsikan bahwa eddy viscosity tergantung pada *specific turbulent kinetic energy* ( $k$ ). Karena persamaan turbulent kinetic energy mengandung *specific energy dissipation* ( $\varepsilon$ ), maka diperlukan sebuah persamaan tambahan, yaitu koefisien closure untuk  $\varepsilon$ . Prandtl memperkenalkan sebuah koefisien closure untuk memodelkan spesifik dissipasi tersebut, dan dikenal dengan Model satu-persamaan. Sedangkan dalam Model dua-persamaan menggunakan dua persamaan tambahan yang menghubungkan turbulent kinetic energy ( $k$ ) dengan parameter-parameter  $\omega$ ,  $\omega^2$ ,  $\varepsilon$ , atau  $\lambda$ . Model turbulensi ini biasanya dinamakan berdasarkan dua persamaan yang digunakan sebagai korelasi, yaitu  $k$ - $\omega$ ,  $k$ - $\omega^2$  atau  $k$ - $\varepsilon$ . Diantara Model dua-persamaan tersebut,  $k$ - $\varepsilon$  model lebih disukai karena memiliki unjuk kerja yang lebih baik pada sejumlah besar aplikasi.

Reynold Stress Model atau Second Order Closure Model menggunakan hubungan non linier yang menghubungkan Reynolds Stress dengan specific turbulent kinetic energy, mean strain rate, dan mean rotation tensor. Algebraic Stress Model (ASM) merupakan perkembangan dari Reynolds Stress Equation Model, dimana ASM mampu memperkenalkan efek anisotropic turbulence ke dalam simulasi CFD. Biasanya, Second Order Closure Model memberikan solusi yang lebih baik dibanding Model dua-persamaan, tetapi memerlukan kemampuan komputer yang tinggi untuk dapat mensimulasikannya.

### 10.2.1.1 MIXING LENGTH MODEL

Boussinesq (1887) merupakan ilmuwan pertama yang memperkenalkan konsep eddy viscosity dan mengajukan analogi antara Viscous Stress dan Reynolds Stress Tensor. Persamaan Boussinesq Analogy adalah sebagai berikut :

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

10.11

Setelah Reynolds (1895) mengusulkan konsep Time-averaging Reynolds Equation yang kemudian menghasilkan Reynolds Averaged Navier Stokes Equations (RANS), Prandtl (1925) menyatakan bahwa eddy viscosity / turbulent viscosity ( $\mu_t$ ) dapat diekspresikan dalam bentuk mixing length ( $l_{mix}$ ) untuk menyelesaikan Reynolds Stress Tensor yang tidak diketahui pada persamaan RANS, dengan tetap menggunakan Boussinesq Analogy. Persamaan yang diajukan Prandtl adalah sebagai berikut :

$$\mu_t = \rho l_{mix}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

10.12

Dengan mensubstitusi persamaan (2.19) ke (2.18) akan diperoleh :

$$\tau_{ij} = \rho l_{mix}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

10.13

Dalam hal ini, jika mixing length dapat diestimasi, maka Reynolds Stress Tensor dapat dihitung dan persamaan-persamaan lainnya dapat diselesaikan secara numerik. Namun pada kenyataannya, harga  $l_{mix}$  ini sulit sekali diestimasi, karena tergantung pada konfigurasi aliran. Model turbulen inilah yang kemudian dikenal dengan Algebraic Model / Prandtl's Mixing Length Model (Zero Equation Model).

10.2.1.2. MODEL SATU-PERSAMAAN

Perkembangan ilmu CFD memberikan konsep pemodelan yang lebih baik, dimana dalam pemodelan turbulensinya mengekspresikan eddy viscosity dalam bentuk specific turbulent kinetic energy ( $k$ ). Dikarenakan persamaan turbulent kinetic energy mengandung specific energy dissipasi ( $\epsilon$ ), sehingga untuk menyelesaikannya diperlukan persamaan-persamaan tambahan / persamaan pendekatan yang dapat menghubungkan energi kinetik turbulensi spesifik / *specific turbulent kinetic energy* ( $k$ ) dan specific energy dissipasi ( $\epsilon$ ), namun masih tetap menggunakan Boussinesq Analogy dalam menyelesaikan Reynolds Stress Tensor. Model-model turbulen yang menggunakan konsep-konsep seperti ini antara lain Model satu-persamaan dan Model dua-persamaan. Model-model turbulen ini dikenal juga dengan Model Persamaan Energi Turbulensi (*Turbulence Energy Equation Model*).

Persamaan *specific turbulent kinetic energy* ( $k$ ) disusun berdasarkan asumsi bahwa Reynolds Stress Tensor proporsional terhadap *specific turbulent kinetic energy* ( $k$ ):

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) \quad 10.14$$

Sedangkan, persamaan turbulent kinetic energy diperoleh dari perhitungan moment persamaan RANS. Artinya, persamaan RANS dikalikan dengan komponen kecepatan fluktuasi dan hasilnya dilakukan proses time averaging (lihat Wilcox, 1993). Bentuk akhir dari persamaan turbulent kinetic energy untuk aliran incompressible, viscous, dan newtonian fluid sebagai berikut:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' u_j} - \overline{\rho' u_j'} \right)$$

10.15

Untuk mempermudah penganalisaan, Mansor et. al 1988 dalam perhitungan DNS (Direct Numerical Simulation), menyatakan:

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' u_j} - \overline{\rho' u_j'} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

dimana,  $\sigma_k$  adalah koefisien closure yang tergantung pada model turbulensi.

Dengan mensubstitusi persamaan (2.23) ke (2.22), akan diperoleh persamaan turbulent kinetic energy sebagai berikut :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

10.1

Persamaan (2.24), mengandung nilai  $\mu_t$ , sehingga butuh persamaan yang dapat mengekspresikan hubungan eddy viscosity dengan *specific turbulent kinetic energy* ( $k$ ) ataupun dengan specific energy dissipasi ( $\varepsilon$ ). Dari analisa dimensi, diperoleh bahwa kinematic turbulent viscosity yang bersatuan ( $m^2/s$ ) dapat dihubungkan dengan turbulent velocity scale,  $\mathcal{V}$  (m/s) dan turbulent length scale  $l$  (m).

Persamaan yang menyatakan hubungan tersebut adalah :

$$\nu_t = C_\mu \mathcal{V} l$$

### 10.2

dimana :  $\nu_t$  = kinematic turbulent viscosity

$$\mathcal{G} = k^{1/2} = \text{turbulent velocity scale}$$

$l$  = turbulent length scale

$C_\mu$  = konstanta tidak berdimensi (tergantung pada model turbulensi)

Persamaan 2.25 juga dapat diekspresikan dengan :

$$\mu_t = C_\mu \rho \mathcal{G} l$$

### 10.3

Dengan demikian, tinggal dua variabel yang tidak diketahui nilainya dalam menyelesaikan persamaan turbulent kinetic energy (pers. 2.24), yaitu : turbulent length scale ( $l$ ) dan specific energy dissipasi ( $\varepsilon$ ).

Prandtl (1945) mengajukan Model satu-persamaan yang memberikan persamaan tambahan untuk dapat menyelesaikan dua variabel tersebut, yaitu :

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l}$$

### 10.4

Prandtl dalam Model satu-persamaan-nya menganggap konstanta  $C_\mu$  dalam persamaan (2.26) bernilai 1. Maka :

$$\mu_t = \rho \mathcal{G} l = \rho k^{1/2} l$$

### 10.5

Dengan demikian persamaan turbulent kinetic energy dapat diselesaikan, selanjutnya dengan menggunakan Boussinesq Analogy, maka Reynolds Stress Tensor dalam Reynolds Averaged Equations pun dapat diselesaikan. Karena model ini hanya menggunakan satu persamaan tambahan, maka dikenal dengan sebutan Model satu-persamaan.

---

#### 10.2.1.3 MODEL DUA- PERSAMAAN

Sama seperti pada Model satu-persamaan, pada Model dua-persamaan juga mengekspresikan eddy viscosity dalam bentuk specific turbulent kinetic energi (k) dan tetap menggunakan Boussinesq Analogy. Bedanya, dalam Model dua-persamaan menggunakan dua persamaan tambahan agar Reynolds Stress Tensor dapat diselesaikan. Persamaan-persamaan tambahan yang digunakan dapat berupa k- $\omega$ , k- $\omega^2$ , k- $\epsilon$ , ataupun k- $\tau$ . Biasanya model turbulensi ini diberi nama sesuai dengan jenis persamaan yang ditambahkan tersebut.

Pemodelan turbulensi Model  $\omega$ , pertama sekali diperkenalkan oleh Kolmogorov (1942), yang menggunakan frekuensi ( $\omega$ ) sebagai second parameter. Kolmogorov memodelkan  $\omega$  sebagai energi dissipasi dibagi dengan turbulent kinetic energy, dimana governing equations-nya diperoleh dari analisa dimensional dan interpretasi fisik (pers. 2.29). Kemudian, Wilcox (1988) menghubungkan frekuensi ( $\omega$ ) tersebut dengan turbulent length scale (pers. 2.30).

$$\omega = c.k^{1/2} / l$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma \mu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)$$

10.6

$$l = k^{1/2} / \omega \quad \text{dan} \quad \mu_t = \rho k / \omega$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = -\beta \rho \omega^2 + \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)$$

10.7

Persamaan-persamaan (2.29) dan (2.30) diatas dikenal sebagai persamaan k- $\omega$  model. Sedangkan, persamaan (2.30) dikenal sebagai model turbulensi k- $\omega$  standard. Saat ini, telah banyak dilakukan modifikasi-modifikasi dari model k- $\omega$  standard, misalnya dengan penggunaan Low Reynold Number (LRN) yang dilakukan oleh Wilcox (1994), modifikasi Wilcox's LRN k- $\omega$  yang dilakukan oleh Peng et al.(1997), dan sebagainya.

Perkembangan Model dua-persamaan, mengantarkan Launder dan Spalding (1972) dalam merumuskan pemodelan turbulensi k- $\epsilon$  konvensional (standard), dengan mengusulkan dua persamaan tambahan untuk menyelesaikan Reynolds Stress Tensor, yaitu persamaan turbulent kinetic energy (k) dan energy dissipasi ( $\epsilon$ ).

Model ini masih tetap menggunakan persamaan mixing length dari Prandtl seperti persamaan (2.26), dimana eddy viscosity dinyatakan sebagai berikut :

$$\mu_t = C_\mu \rho \mathcal{H} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = C_\mu \rho k^{1/2} l$$

10.8

Sedangkan, untuk menghitung Reynolds Stress dalam k-ε model menggunakan Boussinesq Analogy (pers. 2.18) dengan penambahan beberapa variabel sebagai berikut :

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

10.9

dimana :  $S_{ij}$  = laju deformasi rata-rata element fluida

$\delta_{ij}$  = Kronecker delta berharga 1 bila  $i = j$ , dan berharga 0 jika  $i \neq j$ .

Ansys CFD Flotran versi 5.6 menyatakan persamaan turbulent kinetic energy (pers. 2.24) dalam bentuk persamaan umum. Demikian juga dengan persamaan energy dissipasi. Kedua persamaan tersebut adalah :

Persamaan umum turbulen kinetik energi :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y k)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z k)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \mu_t \Phi - \rho \varepsilon + \frac{C_4 \beta \mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

10.10

Persamaan umum energy dissipasi :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y \varepsilon)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{1\varepsilon} \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \Phi - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{C_\mu (1 - C_3) \beta \rho k}{\sigma_\varepsilon} \left( g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

10.11

dimana:  $\Phi$  = Viscous Dissipation Term

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 \right]$$

10. 12

Untuk aliran incompressible, viscous, dan steady, dimana fluida juga masih tetap dianggap sebagai Newtonian Fluid, maka persamaan turbulent kinetic energy dan dissipasi energy adalah sebagai berikut :

Persamaan Turbulent Kinetic Energy :

$$\frac{\partial(\rho V_x k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y k)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z k)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \mu_t \Phi - \rho \varepsilon$$

10. 13

Persamaan Energy Dissipasi :

$$\frac{\partial(\rho V_x \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y \varepsilon)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{1\varepsilon} \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \Phi - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

10. 14

Kelompok pertama di ruas kiri untuk persamaan (2.36) dan (2.37) yaitu tiga komponen kecepatan dalam bentuk differensial merupakan transport k dan  $\varepsilon$  oleh pengaruh konveksi, sedangkan kelompok kedua, yaitu tiga komponen persamaan differensial di ruas kanan kedua persamaan tersebut merupakan transport k dan  $\varepsilon$  oleh pengaruh difusi. Selanjutnya, dua kelompok terakhir di ruas kanan persamaan berturut-turut adalah merupakan laju pembentukan (production) k dan  $\varepsilon$  dan laju penghancuran (destruction) k dan  $\varepsilon$ .

Model  $k-\varepsilon$  standard merupakan model yang pertama dan paling sering digunakan dalam pemodelan fluida karena lebih mampu memprediksi berbagai kasus aliran dengan baik. Bagaimanapun juga, model  $k-\varepsilon$  standard ini masih memberikan hasil simulasi yang buruk dalam kasus aliran turbulen tertentu. Contohnya, hasil simulasi pada aliran di dalam converging nozzle masih kurang baik. Demikian juga simulasi untuk memprediksi turbulent kinetic energy aliran, juga masih terjadi over prediksi yang cukup buruk. Tipe aliran lainnya yang menyulitkan penggunaan  $k-\varepsilon$  model standard, juga terjadi pada aliran yang mengalami stagnasi point. Pada aliran yang dipengaruhi oleh percepatan maupun perlambatan (misalnya aliran melalui converging nozzle) atau pada aliran yang mengalami separasi aliran maupun resirkulasi (sebagai contoh aliran pada duct yang berubah arah alirannya sejauh 180 derajat), umumnya model turbulensi  $k-\varepsilon$  lainnya seperti RNG, NKE, GIR, SZL memberikan hasil yang lebih realistik. Model turbulensi RNG, NKE, GIR dan SZL mengontrol pemodelan turbulensi dengan mengatur  $C_\mu$  dan source term pada persamaan turbulent kinetic energy dan energy dissipasi.

---

### 10.2.2 CLOSURE COEFFICIENTS PADA $k-\varepsilon$ MODEL

Setiap model turbulensi mempunyai closure coefficients yang berbeda. Closure coefficients ini berfungsi sebagai persamaan tambahan yang digunakan oleh masing-masing model  $k-\varepsilon$  dalam menyelesaikan Reynolds Averaged Equations maupun persamaan turbulent kinetic energy dan energy dissipasi.

#### 1. STANDARD $k-\varepsilon$ MODEL

---

Standard k-ε model merupakan model turbulensi yang paling sederhana. Parameter penghubung (closure coefficients) yang digunakan dalam standard k-ε model adalah  $C_{\mu}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$ , dan  $\sigma_\epsilon$  yang didefinisikan sebagai berikut :

$C_{\mu}$  adalah konstanta turbulensi untuk k-ε model, dimana :

$$\mu_t = C_{\mu} \rho k^2 / \epsilon$$

10.15

Nilai  $C_{\mu}$  ini digunakan untuk melakukan update terhadap viskositas turbulensi.

$C_1$  adalah konstanta turbulensi untuk k-ε model. Konstanta ini merupakan konstanta pengali dari laju generation (pembangkitan) shear dalam persamaan energy dissipasi untuk production term.

$C_2$  adalah konstanta turbulensi untuk k-ε model. Konstanta ini merupakan konstanta pengali bagi source dissipasi term (destruction term) dalam persamaan energy dissipasi.

$\sigma_k$  adalah nilai dari Schmidt number untuk turbulent kinetic energy. Diffusi term untuk persamaan turbulent kinetic energy akan dibagi dengan faktor ini.

$\sigma_\epsilon$  adalah nilai dari Schmidt number untuk energy dissipasi. Diffusi term dalam persamaan energy dissipasi akan dibagi dengan faktor ini.

Harga default dari closure coefficients pada model k-ε standard diberikan oleh Launder dan Spalding pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Koefisien – koefisien Standard k-ε Model

Parameter	Default
$C_1, C_{1\epsilon}$	1.44
$C_2$	1.92
$C_\mu$	0.09
$\sigma_k$	1.0
$\sigma_\epsilon$	1.3
$\sigma_t$	1.0

Penyelesaian dari seluruh persamaan-persamaan turbulen akan digunakan untuk menghitung efektif viscosity dan efektif thermal conductivity. Efektif viscosity dapat didefinisikan sebagai penjumlahan dari viscosity laminar dan viscosity turbulent. Demikian juga dengan thermal conductivity. Persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$\mu_e = \mu + C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

10. 16

$$K_e = K + \frac{\mu_t c_p}{\sigma_t}$$

10. 17

dimana :  $\mu_e$  = efektif viscosity

$K_e$  = efektif conductivity

$\sigma_t$  = turbulent Prandtl Number (Pr), dimana  $Pr = c_p \mu/k$

Sedangkan untuk empat model k- $\varepsilon$  lainnya memiliki bentuk  $C_\mu$  yang berbeda. Fungsi baru yang menggunakan dua invariant dibentuk dari symmetric deformation tension ( $S_{ij}$ ) dan antisymmetric rotation tension ( $W_{ij}$ ). Persamaannya adalah sebagai berikut :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$$

10. 18

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) + C_r \Omega_m \varepsilon_{mij}$$

10. 19

dimana :  $C_r$  = konstanta (tergantung model turbulen)

$\Omega_m$  = kecepatan angular

$\varepsilon_{mij}$  = alternating tensor operator

Kedua invariant tersebut adalah :

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

10. 20

$$\xi = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2W_{ij}W_{ij}}$$

10. 21

## 2. RNG MODEL

RNG Model efektif dalam menyelesaikan aliran dengan geometri yang cukup berkurva (misalnya: aliran melalui duct yang mengalami perubahan arah aliran sampai 180 derajat). Bila hasil pemodelan dengan menggunakan model turbulensi SZL Model tidak memuaskan, maka Ansys menyarankan untuk mencoba menggunakan model RNG ini.

RNG Model menggunakan parameter-parameter  $C_{\mu}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$ , dan  $\sigma_{\epsilon}$ , sama seperti pada model k- $\epsilon$  standard, tetapi nilai yang digunakan berbeda. Dalam model ini konstanta  $C_{1\epsilon}$  untuk persamaan energy dissipasi (pers. 2.37) diganti dengan sebuah fungsi dari variant, yaitu :

$$C_{1\epsilon} = 1.42 - \frac{\eta \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_{\infty}} \right)}{1 + \beta_{\infty} \eta^3}$$

10. 22

RNG Model memberikan tambahan tiga konstanta yaitu  $\beta_{\infty}$ ,  $\eta_{\infty}$ , dan  $Cr$ , dimana  $\beta_{\infty}$  adalah konstanta RNG Model,  $\eta_{\infty}$  adalah nilai asymptotic laju strain dari parameter  $\eta$ , sedangkan  $Cr$  adalah konstanta rotational.

Tabel 2.2 Koefisien – koefisien RNG Model

Parameter	Default
$\beta_{\infty}$	0.12
$C_1$	1.42
$C_2$	1.68
$C_{\mu}$	0.085
$\sigma_k$	0.72
$\sigma_{\epsilon}$	0.72

$\eta_\infty$	4.38
Cr	0

### 3. NKE MODEL

Model ini memiliki akurasi yang bagus untuk menyelesaikan aliran yang berotasi (rotating flow). NKE Model memberikan persamaan  $C_\mu$  yang dapat menurunkan bentuk normal strain yang berlebihan pada model k- $\epsilon$  standard. Model ini menggunakan konstanta  $C_2$  dan  $\sigma_\epsilon$  seperti pada model k- $\epsilon$  standard dengan nilai yang berbeda, sedangkan untuk koefisien  $\sigma_k$  menggunakan nilai yang sama dengan model k- $\epsilon$  standard, serta memberikan tambahan parameter Cr dan  $C_{1M}$ .  $C_{1M}$  adalah nilai dari konstanta  $C_1$  maksimum yang diijinkan dalam persamaan laju dissipasi turbulent kinetic energy. Fungsi  $C_\mu$  yang digunakan NKE Model merupakan fungsi invariant, yaitu :

$$C_\mu = \frac{1}{4 + 1.5\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}$$

10. 23

Sedangkan untuk bentuk production term yaitu  $C_1\mu_t \frac{\epsilon}{k} \Phi$  yang ada pada persamaan laju dissipasi (energy dissipasi) digantikan dengan bentuk :

$$\rho C_{\epsilon,1} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \epsilon$$

10. 24

$$\text{dimana : } C_{\epsilon,1} = \max\left(C_{1M}, \frac{\eta}{\eta + 5}\right)$$

Tabel 2.3 Koefisien – koefisien NKE Model

Parameter	Default
-----------	---------

$C_{1M}$	0.43
$C_2$	1.9
$\sigma_k$	1.0
$\sigma_\varepsilon$	1.2
Cr	3.0

#### 4. GIR MODEL

---

Model ini memiliki akurasi yang bagus untuk aliran yang mengandung secondary flow (vortex) atau aliran yang berotasi (rotating flow). GIRModel menggunakan konstanta  $\sigma_k$  dan  $\sigma_\varepsilon$  yang sama seperti model k- $\varepsilon$  standard, serta memberikan tambahan Cr dan lima buah konstanta lainnya yaitu :  $C_1^0, C_1^1, C_2, C_3$ , dan  $C_4$ . Model ini memberikan fungsi yang cukup kompleks dalam perhitungan koefisien  $C_\mu$ .

Tabel 2.4 Koefisien – koefisien GIR Model

Parameter	Default
$C_1^0$	3.6
$C_1^1$	0
$C_2$	0.8
$C_3$	1.94
$C_4$	1.16
$\sigma_k$	1.0
$\sigma_\varepsilon$	1.3

Pertama, koefisien-koefisien  $L_1^0$  sampai  $L_4$  dapat ditentukan dari input koefisien di atas, dimana :

$$\left. \begin{aligned} L_1^0 &= \frac{C_1^0}{2} - 1 \\ L_1^1 &= C_1^1 + 1 \\ L_2 &= \frac{C_2}{2} - \frac{2}{3} \\ L_3 &= \frac{C_3}{2} - 1 \\ L_4 &= \frac{C_4}{2} - 1 \end{aligned} \right\}$$

10. 25

Kedua, koefisien-koefisien lainnya dapat dihitung sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{2L_1^0}{0.5\eta^2 L_1^1} \\ r &= \frac{L_1^0 L_2}{(0.5\eta^2 L_1^1)^2} \\ \Theta &= \arccos \frac{-b/2}{\sqrt{-a^3/27}} \\ q &= \frac{1}{(0.5\eta^2 L_1^1)^2} \left[ (L_1^0)^2 + 0.5\eta^2 L_1^1 L_2 - \frac{1}{3}\eta^2 (L_3)^2 + \xi^2 (L_4)^2 \right] \\ a &= q - \frac{p^3}{3} \quad b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r) \quad D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \end{aligned} \right\}$$

10. 26

Dengan semua koefisien-koefisien di atas, maka koefisien  $C_\mu$  dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa set persamaan - persamaan di bawah ini.

$$L_1^0 L_2 / \left( (L_1^0)^2 + \xi^2 (L_4)^2 \right) \quad \text{jika } \eta = 0$$

$$C_{\mu} = - \frac{L_1^0 L_2}{L_1} \left[ \left( L_1^0 \right)^2 - \frac{1}{3} \eta (L_3)^2 + \xi^2 (L_4)^2 \right] \quad \text{jika } L_1^1 = 0$$

$$C_{\mu} = - \frac{p}{3} + \left( -\frac{b}{2} + \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{b}{2} - \sqrt{D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{jika } D > 0 \quad \dots\dots(2.50)$$

$$C_{\mu} = - \frac{p}{3} + 2 \sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\frac{\Theta}{3}\right) \quad \text{jika } D < 0, b < 0$$

$$C_{\mu} = - \frac{p}{3} + 2 \sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\left(\frac{\Theta}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{jika } D < 0, b > 0$$

dan konstanta rotational untuk GIR model adalah :  $Cr = \frac{C_4 - 4}{C_4 - 2} \dots\dots\dots(2.51)$

### 5. SZL MODEL

SZL Model merupakan model yang lebih sederhana dibanding model turbulensi NKE dan GIR. Model ini biasanya menghasilkan prediksi yang lebih buruk dibanding NKE dan GIR. SZL Model sangat efisien dalam hal numerik karena pada beberapa kasus model ini akan memberikan prediksi efektif viscosity yang rendah sehingga mempengaruhi kestabilan pemodelan. Umumnya, bila model ini tidak memberikan hasil yang baik, Ansys menyarankan untuk menggunakan RNG Model.

Pada kondisi medan aliran yang mengandung strain yang tinggi, Ansys menyarankan untuk mencoba menggunakan SZL Model, setelah RNG, NKE, GIR Model dilakukan. Jika SZL Model memberikan hasil prediksi yang perbedaannya cukup significant, maka meshing harus diperhalus di daerah yang efek turbulennya cukup kuat. Model ini menggunakan  $\sigma_k$  dan  $\sigma_\epsilon$  yang sama dengan model k- $\epsilon$  standard serta memberikan tiga konstanta tambahan dalam menentukan harga  $C_{\mu}$ , yaitu :

$A_{s1}$  merupakan konstanta numerator

$A_{s2}$  merupakan konstanta denominator

$A_{s3}$  merupakan konstanta pengali laju strain.

Perhitungan koefisien  $C_{\mu}$  adalah :

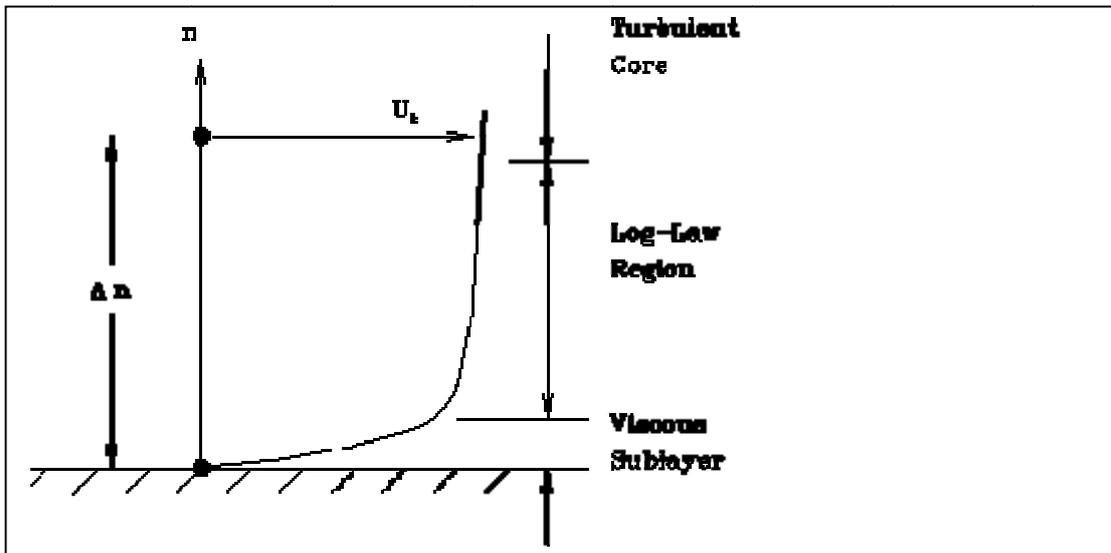
$$C\mu = \frac{A_{s1}}{A_{s2} + \eta + A_{s3}\xi} \dots\dots\dots(2.52)$$

Tabel 2.5 Koefisien-koefisien SZL Model

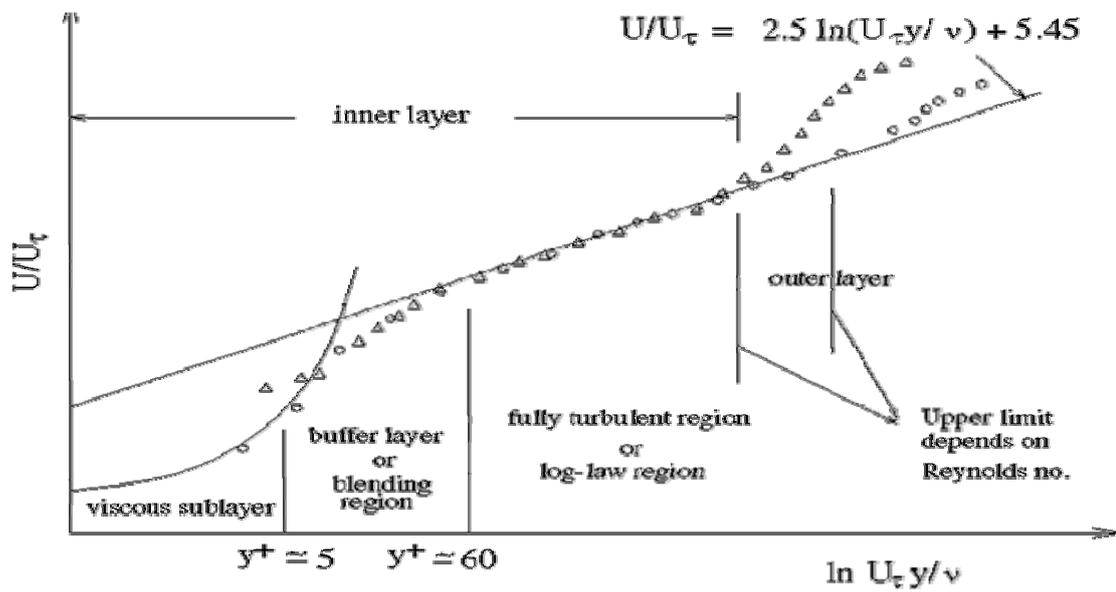
Konstanta	Default
$A_{s1}$	0.66666
$A_{s2}$	1.25
$A_{s3}$	0.9
$Cr$	4.0
$\sigma_k$	1.0
$\sigma_\epsilon$	1.3

10.2.3. PEMODELAN TURBULENSI PADA ALIRAN DI DEKAT DINDING

Dinding adalah salah satu syarat batas yang umum, dan ini selalu berhubungan dengan timbulnya lapisan batas (Gambar 10. 7). Lapisan batas selalu melibatkan gradien kecepatan dan temperatur yang tinggi pada lokasi dekat dinding. Ada dua area penting dalam lapisan batas yaitu: viscous sublayer yang bersifat seperti aliran laminar (hubungan antara tegangan geser dan deformasi fluida bersifat linear), dan log-law region dimana hubungan antara tegangan geser dan deformasi fluida bersifat logaritmik.



Gambar 10. 7 Profil kecepatan pada lapisan batas turbulen



Gambar 10. 8 Profil kecepatan tak-berdimensi lapisan batas turbulen

Jika Profil kecepatan lapisan batas turbulen dinyatakan dalam bentuk tak-berdimensi, hubungan kecepatan dan posisi dalam bentuk semi logaritmik disajikan di Gambar 10. 8. Tebal lapisan batas turbulen ( $y^+$ ) umumnya sekitar 700 wall unit. Tebal viscous sublayer sebesar  $y^+ = 5$  dan log law region sebesar  $60 < y^+ < 500$ .

Semua model turbulensi di atas, tidak mampu menyelesaikan aliran di dekat dinding. Untuk menyelesaikan aliran di dekat dinding diperlukan suatu metode tambahan yaitu metode Wall Function. Umumnya model-model turbulensi yang menggunakan Wall Function dikembangkan untuk menyelesaikan aliran turbulen dengan Reynold Number yang tinggi. Sedangkan untuk aliran dengan Reynold Number yang rendah, metode Wall Function tidak lagi mampu menangani aliran di dekat dinding dengan akurat. Adanya efek gesekan pada daerah dinding yang signifikan, memberikan error yang cukup besar pada daerah viscous sub layer.

Untuk memperhitungkan efek viscous sub layer ini diperlukan beberapa *damping function*. Damping function adalah suatu fungsi yang tergantung pada property aliran di daerah sekitar dinding. Damping function inilah yang digunakan untuk menyelesaikan aliran di sekitar dinding dengan Reynold Number aliran turbulen yang rendah. Sharma-Lauder (1974) menambahkan damping function pada persamaan k- $\epsilon$  model standard. Sedangkan, Wilcox (1994) menambahkan damping function pada k- $\omega$  model standard. Penambahan damping function pada pemodelan turbulensi ini, kemudian dikenal dengan sebagai model turbulensi Low Reynold Number (LRN). Karena fungsi tersebut tergantung pada property aliran di sekitar dinding maka efek gesekan di sekitar dinding dapat diestimasi secara akurat.

### 10.2.3.1 VISCOUS SUB LAYER

Pada daerah viscous sub layer (linear sub layer), lapisan aliran fluida berhubungan dekat sekali dengan dinding. Gerakan turbulensi vortex juga akan berhenti pada permukaan dinding. Lapisan ini sangat tipis sekali, yaitu diantara  $0 < y^+ < 5$ , sehingga diasumsikan bahwa shear stress hampir konstan dan sama dengan wall shear stress pada dinding ( $\tau_w$ ). Dengan demikian ;

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \cong \tau_w$$

10. 27

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas pada Syarat batasan = 0 dan  $y = 0$  pada dinding, maka akan diperoleh kecepatan rata-rata U sebagai berikut :

$$U = \frac{\tau_w \cdot y}{\mu}$$

10. 28

sehingga, wall viscosity adalah

$$\mu_{wall} = y \frac{\tau_w}{U}$$

10. 29

Dikarenakan hubungan yang linier antara U dan y maka lapisan ini sering disebut Linier Sub Layer.

Untuk Reynold Number aliran yang tinggi model turbulensi k-ε masih dapat menyelesaikan aliran pada daerah viscous sub layer ini dengan cukup baik, tetapi bila Reynold Number aliran turbulen cukup rendah, maka model turbulensi ini tidak lagi mampu menyelesaikan aliran di dekat dinding ini dengan baik. Untuk mengatasi hal inilah maka dikembangkan model turbulen yang menggunakan damping function (Low Reynold Number Model).

---

### 10.2.3.2 LOG LAW LAYER

Karena ukuran *log-law region* lebih besar dari viscous sublayer ( $30 < y^+ < 500$ ), pemakaiannya memerlukan jumlah elemen yang lebih sedikit. Hubungan antara kecepatan dan jarak terhadap dinding bersifat logaritmik :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

10. 30

dimana:  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$  = kecepatan gesekan

$$y^+ = \frac{u_\tau \cdot y}{\nu} = \text{wall parameter dimensionless}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{viskositas kinematik}$$

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau} = \text{wall parameter dimensionless}$$

$\tau$  = shear stress

$U$  = kecepatan paralel terhadap dinding

$\kappa$  = Von Karman's constant (kappa) = 0.4

$E$  = wall roughness parameter (shear stress constant) = 9.0 untuk smooth wall, sedangkan untuk rough wall diberikan oleh Schlichting (1979)

$y$  = jarak node terhadap dinding

Maka,

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{Ey}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right)$$

10.31

Persamaan di atas disebut log-law dengan layer  $30 < y^+ < 500$ , berada di luar *viscous sub layer*, dimana viscous dan efek turbulent keduanya sangat penting. Asumsi yang digunakan di atas adalah: *mixing length* ( $l_m$ ) =  $\kappa \cdot y$  (Schlichting, 1979).