

**MODUL 7**  
**PENERAPAN DIFERENSIAL II**



**Mata Kuliah** : MATEMATIKA TEKNIK I  
**Kode / sks** : B2220 / 3 sks  
**Prodi** : TEKNIK MESIN  
**Semester** : III (Tiga)

Disusun oleh :

**MAFRUDDIN, S.T., M.T**

**PRODI TEKNIK MESIN**  
**FAKULTAS TEKNIK**  
**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH METRO**

**Dibiayai Oleh:**

**Direktorat Pembelajaran Dan Kemahasiswaan**  
**Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset Dan Teknologi**  
**Kemetrician Pendidikan, Kebudayaan, Riset, Dan Teknologi**  
**2023**



## MODUL 7 PENERAPAN DIFERENSIAL II

### 1. Pengantar

Assalamu'alaikum wr. Wb.

Kegiatan belajar mengajar untuk mata kuliah Matematika Teknik I dilakukan dengan dua metode yaitu Daring (online) dan Luring (offline). Untuk mempermudah dalam memahami materi yang diberikan dan mencapai kompetensi yang diharapkan maka perlu diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut:

- a. Pelajarilah setiap materi yang terdapat pada modul ini (Modul 7. Penerapan Diferensial II) dengan sungguh-sungguh, apabila terdapat uraian materi atau pokok bahasan yang kurang dipahami atau belum dimengerti segera tanyakan pada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- b. Bacalah dengan teliti dan pahami apa yang menjadi capaian akhir dari setiap materi yang akan dipelajari
- c. Bacalah dengan teliti dan pahami apa saja indikator capaian pembelajaran yang harus dikuasai
- d. Berikan tanda pada bagian-bagian materi yang dianggap penting atau bagian yang belum dimengerti untuk ditanyakan kepada tutor/dosen pengampu mata kuliah
- e. Buka dan pelajari setiap link materi (video atau dokumen lainnya) yang diberikan oleh tutor/dosen pengampu mata kuliah untuk menambah pemahaman Anda terkait materi yang dipelajari dalam kegiatan belajar pada modul ini
- f. *Download* dan Putarlah video penjelasan yang ada terkait materi atau pokok bahasan agar dapat memahami isi materi pada kegiatan ini secara lebih jelas dan paham serta dapat menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan. Jika diperlukan, putarlah video penjelasan berulang-ulang supaya benar-benar paham
- g. Carilah sumber referensi lainnya untuk menambah materi bahan ajar (baik dalam bentuk materi penjelasan maupun contoh-contoh soal) dan melengkapi tugas pada masing-masing topik perkuliahan serta memperluas wawasan Anda
- h. Pahami tugas yang harus didiskusikan dengan teman-temanmu (tugas kelompok) pada bagian forum diskusi pada topik bahasan tertentu. Gunakan pengetahuan dan pengalaman Anda sebelumnya untuk mendiskusikan penyelesaian masalah yang diberikan dalam forum diskusi tersebut
- i. Bacalah dan pahami pada bagian rangkuman materi untuk lebih meningkatkan pemahaman substansi materi dari materi kegiatan belajar yang telah dipelajari dan diskusikan
- j. Kerjakan tugas dengan semaksimal mungkin dan ikuti panduan yang diberikan serta gunakan rambu-rambu jawaban untuk menilai apakah jawaban Anda sudah memadai atau belum
- k. Kumpulkan tugas sesuai dengan batas waktu yang telah ditetapkan
- l. Kerjakan tugas Anda dengan jujur dan jangan mencontek
- m. Tugas dikumpulkan di SPADA UM METRO.

## 2. Capaian pembelajaran

Setelah mempelajari keseluruhan materi pada modul ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang dasar- dasar diferensial, mengetahui bentuk-bentuk diferensial dan aplikasinya. Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim dan mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

## 3. Indikator Capaian Pembelajaran

Adapun tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Capaian Pembelajaran Kegiatan Belajar ini secara rinci akan diukur dari kemampuan mahasiswa dalam:

- Menjelaskan dan mendefinikan serta menentukan letak maksimum dan minimum, mendefinisikan
- Menjelaskan dan mendefinisikan serta menentukan letak titik belok.
- Mampu bertanggungjawab pada pekerjaan sendiri dan bekerja sama dalam tim
- Mampu berkomunikasi dengan baik secara lisan maupun tulisan.

## 4. Alokasi Jam Pembelajaran (JP) per pertemuan

- Total alokasi waktu : 3 x 50 menit
- Mode pembelajaran : Daring (online)
- Pertemuan : 9 (sembilan)

## 5. Pokok-pokok materi

- Nilai maksimum dan minimum
- Titik belok

## 6. Integrasi nilai islam

- Al-quran Qs Al Jinn ;72:28

لَيَعْلَمَ أَنْ قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

28. supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu.

- Hadist Tirmidzi 3089

سنن الترمذي ٣٠٨٩: حَدَّثَنَا مُجَاهِدُ بْنُ مُوسَى الْبَغْدَادِيُّ وَالْفَضْلُ بْنُ سَهْلٍ الْأَعْرَجُ بَعْدَايِي وَعَبْرُ وَاجِدٍ قَالُوا حَدَّثَنَا عَبْدُ الرَّحْمَنِ بْنُ غَزْوَانَ أَبُو نُوحٍ حَدَّثَنَا اللَّيْثُ بْنُ سَعْدٍ عَنْ مَالِكِ بْنِ أَنَسٍ عَنِ الزُّهْرِيِّ عَنْ عُرْوَةَ عَنْ عَائِشَةَ أَنَّ رَجُلًا قَعَدَ بَيْنَ يَدَيْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ فَقَالَ يَا رَسُولَ اللَّهِ إِنَّ لِي مَمْلُوكِينَ يُكذِّبُونِي وَيَخُونُونِي وَيَعْصُونَنِي وَأَسْتُمُّهُمْ وَأَضْرِبُهُمْ فَكَيْفَ أَنَا مِنْهُمْ قَالَ يُحْسَبُ مَا خَانُوكَ وَعَصَاكَ وَكَذَّبُوكَ وَعَقَابَكَ إِيَاهُمْ فَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَاهُمْ بِقَدْرِ ذُنُوبِهِمْ كَانَ كَفَافًا لَكَ وَلَا عَلَيْكَ وَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَاهُمْ دُونَ ذُنُوبِهِمْ كَانَ فَضْلًا لَكَ وَإِنْ كَانَ عِقَابُكَ إِيَاهُمْ فَرَقَ ذُنُوبِهِمْ أَقْتَصَّ لَهُمْ مِنْكَ الْفَضْلُ قَالَ فَتَنَحَّى الرَّجُلُ فَجَعَلَ يَبْكِي وَيَهْتِفُ فَقَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَمَا تَقْرَأُ كِتَابَ اللَّهِ { وَنَضَعُ الْمَوَازِينَ الْقِسْطَ لِيَوْمِ الْقِيَامَةِ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِنْ كَانَ مِثْقَالَ حَبِّ خَلْتٍ مِنْكَ نَفْسٌ فَأَنْتَ بِهَا بِرَّءٌ } الْآيَةَ فَقَالَ الرَّجُلُ وَاللَّهِ يَا رَسُولَ اللَّهِ مَا أَجِدُ لِي

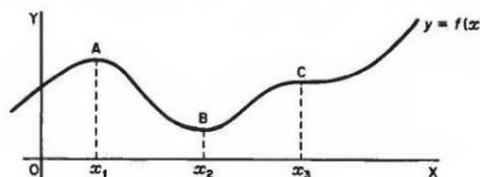
وَلِهَؤُلَاءِ شَيْئًا خَيْرًا مِنْ مُفَارَقَتِهِمْ أَشْهَدُكُمْ أَنَّهُمْ أَحْرَارٌ كُلُّهُمْ قَالَ أَبُو عِيْسَى هَذَا حَدِيثٌ غَرِيبٌ لَا نَعْرِفُهُ إِلَّا مِنْ حَدِيثِ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ غَزْوَانَ وَقَدْ رَوَى أَحْمَدُ بْنُ حَنْبَلٍ عَنْ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ غَزْوَانَ هَذَا الْحَدِيثَ.

Sunan Tirmidzi 3089: Telah menceritakan kepada kami Mujahid bin Musa Al Baghdadi dan Al Fadll bin Sahal Al A'raj Baghdadi dan lainnya, mereka berkata: Telah menceritakan kepada kami Abdurrahman bin Ghazwan Abu Nuh telah menceritakan kepada kami Al Laits bin Sa'ad dari Malik bin Anas dari Az Zuhri dari Urwah dari Aisyah bahwa seseorang duduk di depan Nabi Shallallahu 'alaihi wa Salam lalu berkata: Wahai Rasulullah, sesungguhnya saya memiliki dua orang budak mereka mendustai dan mengkhianati saya, mereka juga membangkang terhadap (perintah) saya, lalu saya umpat dan saya pukul mereka apakah saya berdosa kepada mereka? beliau menjawab "Pengkhianatan, pembangkangan, dan kedustaan mereka terhadapmu, juga hukumanmu atas mereka, semua itu ada perhitungannya. Jika hukumanmu sebanding dengan kesalahan mereka, maka impaslah urusanmu dengannya. Tapi jika hukumanmu lebih ringan dibanding kesalahan mereka, maka kamu mendapat keutamaan. Namun jika hukuman yang kamu timpakan kepada mereka lebih berat dibanding kesalahan mereka, maka merekalah yang akan mendapat keutamaan darimu sebagai qishash." ia berkata: lalu menyesallah lelaki itu kemudian ia menangis dan berteriak lalu Rasulullah Shallallahu 'alaihi wa Salam bersabda: "Tidakkah engkau membaca kitab Allah: 'Kami akan memasang timbangan yang tepat pada hari kiamat, maka tiadalah seseorang dirugikan barang sedikitpun.'" (Al Anbiyaa` : 47) lelaki itu berkata: Wahai Rasulullah, demi Allah, tidak ada sesuatu yang lebih baik bagi saya kecuali dengan memerdekakan mereka. Karena itu saksikanlah bahwa mereka semua saya merdekakan." Abu Isa mengatakan bahwa hadits ini gharib, kami hanya mengetahuinya dari hadits Abdurrahman bin Ghazwan. Ahmad bin Hambal meriwayatkan hadits ini dari Abdurrahman bin Ghazwan.

## 7. Uraian Materi

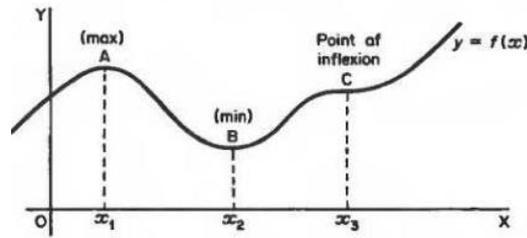
### a. Nilai maksimum dan minimum

Salah satu aplikasi atau penerapan konsep turunan atau diferensial yaitu pada sebuah grafik untuk mencari dan menentukan nilai maksimum dan minimum. Nilai maksimum suatu fungsi grafik merupakan nilai yang paling besar (puncak tertinggi sebuah grafik) dan begitu sebaliknya nilai minimum merupakan nilai yang paling kecil dari suatu fungsi (titik terendah sebuah grafik). Sebagai contoh grafik berikut merupakan fungsi  $y = f(x)$ .

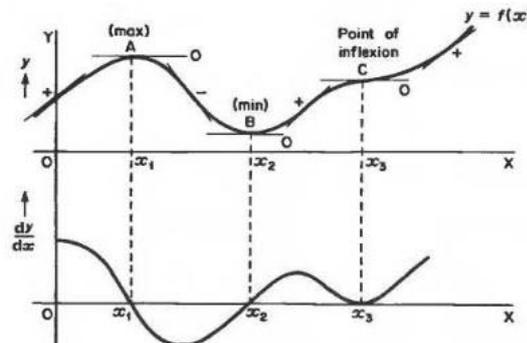


Berdasarkan gambar grafik diatas dapat diketahui bahwa pada titik A yaitu  $x = x_1$  merupakan nilai ya maksimum. Sedangkan pada titik B merupakan nilai minimum.

Perhatikan juga gambar grafik berikut.

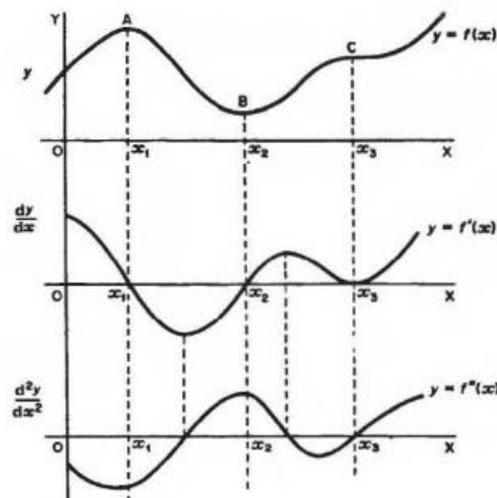


Nilai  $C$  pada grafik tersebut merupakan titik belok yang nampak seperti setengah maksimum dan setengah minimum dan berupa lengkungan seperti huruf S. Titik stasioner atau nilai stasioner pada kurva berupa pada titik  $A$ ,  $B$  dan  $C$ .



Di  $x = x_1, x_2, x_3$  yang berkoresponden dengan ketiga titik stasioner, grafik  $\frac{dy}{dx}$  berada pada sumbu  $x$  dan tidak pada titik-titik lain. Dengan demikian berarti bahwa titik-titik stasioner  $A, B, C$ :  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Jika gradien dari kurva turunan pertama dan memplot gradien ini terhadap  $x$ , maka diperoleh kurva turunan kedua yang berarti nilai-nilai  $\frac{d^2y}{dx^2}$  terhadap  $x$ .



Berdasarkan kurva turunan pertama diperoleh titik stasioner:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Untuk kurva turunan kedua diperoleh:

Untuk y maksimum  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah negatif

Untuk y minimum  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah positif

Untuk titik belok  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah 0

Contoh:

Carilah titik-titik stasioner pada grafik fungsi  $f(x) = y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$

- 1) Tentukanlah jenis titik-titik ini dan sketsalah grafiknya
- 2) Tentukan nilai y maksimum
- 3) Tentukan nilai y minimum

Untuk menyelesaikannya perlu beberapa tahap yaitu:

- 1) Menentukan turunan pertama

$$f(x) = y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^{3-1}}{3} - \frac{2x^{2-1}}{2} - 2 + 0$$
$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$$

- 2) Menentukan turunan kedua

$$f(x) = y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \{x^2 - x - 2\}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$$

- 3) Titik stasioner

Titik stasioner terjadi pada  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2 = 0$$

Untuk mengetahui titik stasioner pada sumbu x maka perlu dilakukan pemfaktoran.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Sehingga diperoleh  $x = 2$  dan  $x = -1$

Maka titik stasioner terjadi di  $x = 2$  dan  $x = -1$ .



4) Menentukan jenis setiap titik stasioner

Untuk mengetahui jenis setiap stasioner maka perlu mensubstitusikan  $x = 2$

dan  $x = -1$  ke dalam  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , sehingga diperoleh:

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

*bernilai positif maka akan menghasilkan  $y_{min}$ .*

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1 = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$$

*bernilai negatif maka akan menghasilkan  $y_{maks}$ .*

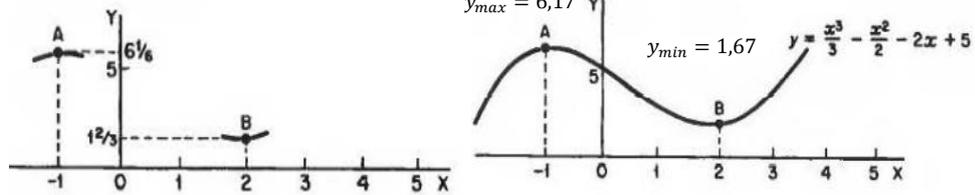
5) Nilai  $y$  maksimum terjadi pada ( $x = -1$ )

$$\begin{aligned} y_{maks} &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \\ &= \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + 5 \\ &= \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 5 \\ &= \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 7 \\ &= \frac{-2-3}{6} + 7 \\ &= \frac{-5}{6} + 7 \\ &= \frac{-5+42}{6} \\ &= \frac{37}{6} \\ &= 6,17 \end{aligned}$$

6) Nilai  $y$  minimum terjadi pada ( $x = 2$ )

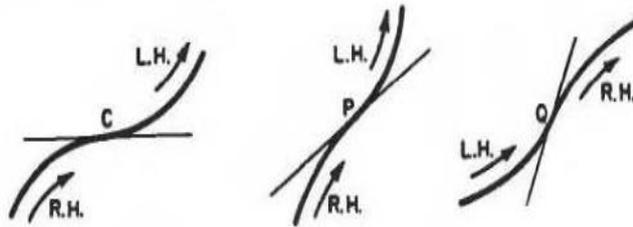
$$\begin{aligned} y_{min} &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \\ &= \frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} - 2(2) + 5 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + 5 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 1 \\ &= \frac{16-12}{6} + 1 \\ &= \frac{4}{6} + 1 \\ &= \frac{4+6}{6} \\ &= \frac{10}{6} \\ &= 1,67 \end{aligned}$$

## 7) Sketsa dan Grafiknya



### b. Titik belok

Titik belok diartikan sebagai titik dimana perubahan arah pelengkungan terjadi dalam sebuah grafik. Titik belok dijelaskan seperti gambar berikut.



Pada titik C terjadi titik belok tetapi gradien pada titik belok tidak harus sama dengan 0. Pada titik P dan Q terjadi titik belok yang sangat baik dan memiliki gradien positif. Seperti diketahui bahwa titik belok terjadi pada  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah 0. Tidak semua grafik terdapat titik belok, sehingga perlu dipastikan apakah sebuah grafik terdapat titik belok atau tidak yaitu dengan mengambil satu titik persis sebelum  $x = \frac{1}{2}$  yakni  $x = \frac{1}{2} - a$  dan satu titik persis setelah  $x = \frac{1}{2}$  yakni  $x = \frac{1}{2} + a$  apakah nanti akan terjadi perubahan tanda. Pada kasus titik belok sesungguhnya, grafik  $\frac{d^2y}{dx^2}$  memotong sumbu x dan terjadi perubahan tanda. Pada kasus tidak terdapat titik belok, grafik  $\frac{d^2y}{dx^2}$  hanya menyentuh sumbu x dan  $\frac{d^2y}{dx^2}$  tidak berubah tanda.

Contoh:

Diketahui suatu grafik fungsi  $f(x) = y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$

Tentukan:

- 1) Terdapat titik belok atau tidak
- 2) Nilai y pada titik belok
- 3) Buatlah grafiknya

Untuk menyelesaikan soal tersebut terdapat beberapa langkah:

- a. Didiferensialkan kedua dari  $f(x) = y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$  terhadap x

Berdasarkan contoh sebelumnya diperoleh bahwa:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$$

Titik belok terjadi pada  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Maka  $2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$

Jika terdapat titik belok maka akan terjadi pada  $x = \frac{1}{2}$

b. uji perubahan tanda

1) Di  $x = \frac{1}{2} - a$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$   
 $= 2\left(\frac{1}{2} - a\right) - 1$   
 $= 1 - 2a - 1$   
 $= -2a$  (*negatif*)

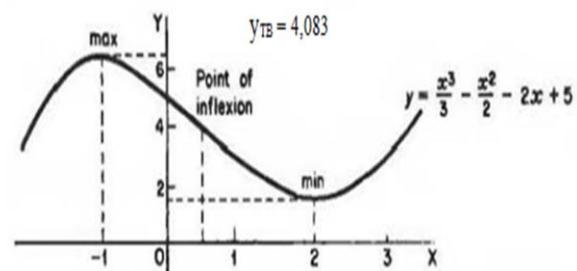
2) Di  $x = \frac{1}{2} + a$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$   
 $= 2\left(\frac{1}{2} + a\right) - 1$   
 $= 1 + 2a - 1$   
 $= +2a$  (*positif*)

Terjadi perubahan tanda  $\frac{d^2y}{dx^2}$  jika melalui  $x = \frac{1}{2}$  sehingga dapat disimpulkan terdapat titik belok di  $x = \frac{1}{2}$ .

3) Menentukan nilai y pada titik belok

Untuk menentukan nilai y pada titik belok maka perlu mensubstitusikan  $x = \frac{1}{2}$  ke dalam fungsi  $f(x)$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{3} - \frac{\frac{1}{4}}{2} - 1 + 5 \\ &= \frac{\frac{2}{24} - \frac{3}{24}}{6} + 4 \\ &= \frac{\frac{1-3}{24}}{6} + 4 \\ &= \frac{-\frac{2}{24}}{6} + 4 \\ &= \frac{-2}{24} + 4 \\ &= 4,083 \end{aligned}$$



Berikut gambar grafiknya.

## 8. Rangkuman

### a. Nilai maksimum dan minimum

Nilai maksimum suatu fungsi grafik merupakan nilai yang paling besar (puncak tertinggi sebuah grafik) dan begitu sebaliknya nilai minimum merupakan nilai yang paling kecil dari suatu fungsi (titik terendah sebuah grafik).

Titik stasioner  $\frac{dy}{dx} = 0$

Untuk  $y$  maksimum  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah negatif

Untuk  $y$  minimum  $\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah positif

### b. Titik belok diartikan sebagai titik dimana perubahan arah pelengkungan terjadi dalam sebuah grafik.

Titik belok terjadi pada  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Pengujian titik belok Di  $x = \frac{1}{2} - a$  dan  $x = \frac{1}{2} + a$

## 9. Tugas

- Membuat resume dari video penjelasan sesuai dengan topik bahasan dan jawab pertanyaan berikut.
  - Jelaskan sampai dimana tingkat pemahaman anda tentang materi yang diberikan
  - Jelaskan menurut pendapat anda pentingnya video penjelasan terhadap proses belajar
  - Langkah apasaja yang telah anda lakukan untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang materi yang diberikan
  - Berikan contoh penerapan atau aplikasi tentang nilai maksimum dan minimum serta dalam kehidupan sehari-hari.
- Membuat makalah (pengembangan materi) tentang penerapan diferensial 2 (nilai maksimum dan minimum serta titik belok) dari sumber referensi yang relevan dalam bentuk materi atau contoh-contoh soal.
- Menyelesaikan tugas mandiri sesuai bahan kajian sebagai berikut:  
Carilah titik-titik stasioner pada grafik fungsi  $f(x) = y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ 
  - Tentukanlah jenis titik-titik ini
  - Tentukan nilai  $y$  maksimum
  - Tentukan nilai  $y$  minimum
  - Titik belok (jika ada)
  - Nilai  $y$  pada titik belok (jika ada)
  - Buatlah grafiknya
- Membuat resume Qs Al Jinn ;72:28, dan Hadist:Tirmidzi 2918



## 10. Daftar pustaka

- a. Al-Quran dan As-Sunnah
- b. Erwin Kreyszig, "*Advanced Engineering Mathematics*", Edisi 6, John Wiley & Sons, Singapore, 1988.
- c. K.A Stroud, "*Matematika Teknik*". Edisi 5 Jilid 1. Erlangga. 2003.
- d. Edwin J. Purcell Dale Varberg. "Kalkulus Dan Geometri Analitis". Edisi kelima. Erlangga 1987. Jakarta. Terjemah.