**BAB 1   
SISTEM BILANGAN REAL**

1. Bilangan Bulat dan Rasional

Jika kita menyertakan blangan nol, kita akan memperoleh bilangan cacah (count number) dan bila menyertakan negative dari bilangan asli akan diperoleh bilangan bulat (integer) … , -2, -1, 0, 1, 2, …

Melalui bilangan bulat, kita dapat mengukur Panjang, berat, atau suhu.

Bilangan bulat saja ternyata tidaklah cukup, dikarenakan jarak antar bilangan bulat terlampau renggang sehingga kurang ketelitiannya (precision). Oleh karenanya kita perlu meninjau hasi-bagi / rasio bilangan bulat yaitu bilangan seperti , , , , , dan . Secara umum dapat kita tuliskan dalam bentuk , dimana dan bilangan bulat dengan yang disebut dengan bilangan rasional.

Reasoning.

Perlihatkan bahwa pembagian oleh 0 tidak memiliki arti seperti berikut ini:

Misalkan . Jika , maka , yang merupakan kontradiksi.

Carilah argument mengapa juga tidak memiliki arti.

Apakah bilangan rasional dapat digunakan untuk mengukur semua jenis Panjang? Tentu saja tidak.

Fakta mengejutkan ini ditemukan oleh orang Yunani kuno pada sekitar abad ke-5 SM, memperlihatkan bahwa Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama kaki dengan Panjang sisi siku-siku 1 adalah . Jika kita lihat, tidak dapat dituliskan sebagai hasil-bagi dari dua bilangan bulat. Jadi adalah bilangan iasional (bukan rasional). Demikian juga dan banyak bilangan lainnya.

Semua bilangan Rasional dan irasional disebut sebagai bilangan real. Bilangan real dapat dipandang sebagai penanda untuk titik-titik disepanjang sebuah garis mendatar.

1

3

2

0

-1

-2

-3

1. **Bilangan Real**

Dasar dari kalkulus adalah system bilangan real dan sifat-sifatnya. Tetapi, apakah bilangan real itu dan bagaimana sifat-sifatnya? Untuk dapat memahaminya, kita mulai dari beberapa system bilangan yang lebih sederhana.

Bilangan Asli

Bilangan paling sederhana diantara semuanya adalah bilangan asli (natural number) 1, 2, 3, 4, 5, …

Melalui bilangan asli kita dapat menghitung ukuran berbagai benda yang ada di sekitar kita seperti buku, pensil, meja, kursi, dan benda-benda lain.

1. **Bilangan Desimal (Desimal Berulang dan Desimal Takberulang)**

Setiap bilangan rasional dapat dituliskan sebagai decimal.

Sesuai dengan definisi bilangan rasional selalu dapat dinyatakan sebagai hasil-bagi dua bilangan bulat.

Hal ini berarti, jika kita membagi pembilang dan penyebut, kita akan peroleh decimal, sebagai contoh

Bilangan irasional juga dapat dinyatakan sebagai decimal.

Sebagai contoh

Bentuk desimal dari bilangan rasional dapat memiliki akhir atau bisa juga berulang membentuk siklus teratur yang berlangsung terus-menerus (seperti ).

Decimal berakhir dapat dipandang sebagai decimal berulang dengan perulangan nol.

Sebagai contoh

Jadi setiap bilangan rasonal dapat dituliskan sebagai decimal berulang.

Dengan kata lain, jika adalah bilangan rasional, maka dapat dituliskan sebagai sebuah decimal berulang.

Hal ini berlaku sebaliknya, bahwa jika dapat dituliskan sebagai sebuah decimal berulang.

Maka adalah bilangan rasional.

Contoh

tunjukkan bahwa adalah bilangan rasional

misalkan maka

sehingga

jadi

dengan demikian 0,777 … = .

nah, silakan tunjukkan bahwa dan adalah bilangan rasional.

Berkebalikan dengan bilangan rasional yang mana memiliki perulangan, terdapat sebuah bilangan yang tidak memiliki perulangan. Misalnya :

0,101001000100001....

Dapat kita lihat bahwa pola angka nol semakin lama semakin banyak di antara angka 1, yang mana tidak terjadi perulangan. Bilangan desimal tanpa adanya perulangan dalam siklus-siklus tertentu dinyatakan sebagai bilangan irrasional.

1. **Kepadatan**

Betapapun dekatnya jarak di antara sebarang bilangan real a dan b, pastilah terdapat suatu bilangan real yang dapat kita sebut bilangan tengah a dan b berupa .

*x3*

*x2*

*x1*

*b*

*a*

Disebabkan terdapat x1 di antara a dan x2, x3 di antara x2 dan b, maka dapat kita simpilkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya bilangan real. Di dalam kasus lain terdapat bilangan yang berlaku sebagai bilangan rasional dan sekaligus sebagai bilangan irrasional. Hal ini dijelaskan oleh matematikawan dengan mangatakan bahwa bilangan rasional dan irrasional adalah padat (dense) di sepanjang garis bilangan real yaitu memiliki selisih yang sangat kecil. Konsekuensi dari adanya bilangan ini adalah bahwa segala bilangan irrasional dapat diaproksimasikan sedekat yang diinginkan dengan sebuah bilangan rasional, bahkan dengan sebuah bilangan rasional yang bentuk desimalnya memiliki akhir. Misalnya, dengan contoh barisan bilangan rasional 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213, ... bergerak stabil mendekati

Kalkulator

Saran Penggunaan Kalkulator

1. Ketahui kapan kalkulator atau komputer Anda memberikan jawaban eksak dan kapan jawaban aproksimasi. Misalnya, jika anda mencari cot 60° kalkulator dapat memberikan jawaban eksak , atau dapat juga berbentuk aproksimal desimal 0,57735027 .
2. Pada umumnya, jawaban eksak lebih disukai dan biasanya Anda menggunakan hasilnya untuk perhitunga lebih lanjut. Misalnya, Anda ingin menguadratkan hasil dari cos 60°, maka akan lebih mudah dan akurat untuk menghitung ()2 = = daripada menghitung (0,57735027)2.
3. Dalam penyelesaian soal aplikasi gunakan jawaban eksak jika dimungkinkan , namun jika tidak maka menggunakan aproksimasi. Anda seringkali dapat memeriksa apakah jawaban masuk akal, jika dihubungkan dengan deskripsi soal, dan dengan apromaksi numerik dapat menyelesaikan tersebut.

Estimasi

Kebiasaan ceroboh orang dalam melakukan perhitungan menggunakan kalkulator adalah menekan dengan cepat tombol di dalamnya tanpa mengecek apakah ada yang tertinggal atau tidak, seperti tanda kurung atau koma sehingga akan berdampak pada kesalahan hasil yang diperoleh, sebaliknya untuk mahasiswa yang teliti akan menyadari adanya kesalahan dan juga akan mengecek ulang jika diperoleh jawaban yang janggal.

Contoh :

Hitunglah ()/2,75

Penyelesaian : Mahasiswa yang bijak akan mengaproksimasikan perhitungan tersebut sebagai (31 + 80 + 2)/3 memiliki hasil di sekitar 27. Jadi ketika hasil dari kalkulator bernilai 85,4, mahasiswa akan menghitung kembali dan diperoleh hasil sebesar 27, 7.

1. **Aksioma Lapangan**

Salah satu aksioma pada sistem bilangan real yang mana mangatur tentang ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, sifat komutatif, asosiatif, dan distributif, terdapatnya unsur angka 0 dan 1, serta terdapatnya unsur invers terhadap penjumlahan dan perkalian. Dari operasi dasar ini didefinisikan untuk operasi pengurangan dan pembagian. Aksioma ini dapat digunakan untuk membuktikan berbagai sifat yang mendasari operasi aljabar atas berbagai objek kalkulus yaitu variabel, kontanta, dan parameter.

Pada ***R*** didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian (jumlah dan hasil kali bilangan real *a* dan *b* ditulis (*a* + b dan ab) yang memenuhi aksioma berikut ini :

* Jika *a, b,* ***R****, maka a + b*  ***R***  dan *ab*  ***R,*** *sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian.*
* Jika a, b ***R****,* maka a + b = b + a dan *ab* = ba, *sifat komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian.*
* Jika a, b, c ***R****,* maka (a + b) + c = a + (b + c) dan (ab)c = a (bc),  *sifat asosiatif terhadap penjumlahan dan perkalian.*
* Terdapat 0 dan 1 ***R* (** 0 1) sehingga a + 0 = 0 dan a.1 = a untuk setiap a ***R,*** *adanya unsur kesatuan terhadap penjumlahan dan perkalian.* Bilangan 0 dinamakan *unsur kesatuan terhadap penjumlahan* dan 1 *unsur kesatuan terhadap perkalian.*
* Jika a ***R***, maka terdapat –a ***R*** sehingga a + (-a) = 0, *adanya unsur negatif atau invers terhadap penjumlahan.* Bilangan real –a dinamakan *negatif* atau *lawan* dari a.
* Jika a ***R,*** a 0, maka terdapat a-1 ***R*** sehingga a a -1 = 1, *adanya unsur kebalikan atau invers terhadap perkalian.* Bilangan real a -1 dinamakan *kebalikan* dari a.
* Jika a, b, c ***R,*** maka a (b + c) = ab + bc, *sifat distributif.*

Definisi 1.1 Misalkan a dan b bilangan real

* Pengurangan dari a dan b, hsailnya disebut selisih dari a dan b, ditulis a – b, atau didefinisikan dalam bilnagan real a + (-b)
* Pembagian dari a dan b, hasilnya disebut hasil bai dari a adan b, b0, ditulis , atau didefinisika dalam bilangan real ab-1.

Teorema 1.2 Misalkan a, b, c, dan d bilangan real, maka :

* a = b a + c = b + c dan ac = bc
* a + c = b + c a = b (hukum pencoretan untuk penjumlahan)
* ac = bc, c 0 a = b (hukum pencoretan untuk perkalian).
* a(b – c) = ab – ac
* - (-a) = a; (a-1)-1  = a, a 0.
* a.0 = 0 = 0.a; a (-b) = (-a)b = -ab; dan (-a)(-b) = ab
* ab = 0 a = 0 atau b = 0.
* ad = bc; b, d 0.
* dan .
* dan
* dan

Bentuk kuadrat dari ax2 + bx + c, a 0 bersifat definit positif jika nilainya selalu positif untuk setiap bilangan real x. Sebagai ilustrasi, bentuk kuadrat dari x2 – 2x + 2 merupakan definitif positif karena :

x2 – 2x – 2 = (x-1)2 + 1 , untuk setiap bilangan real x.

Perhatikan rumus berikut ini :

ax2 + bx + c = a ( x + 2 - , D =b2 – 4ac, a

Untuk bentuk kuadrat ax2 + bx + c ,a 0 definit positif a > 0 dab D < 0, Berdasarkan hal tersebut definit positif karena a = 1 > 0 dan D = 4 – 8 .

Dalam hal ini D =b2 – 4ac disebut sebagai deskriminan pada bentuk kuadrat ax2 + bx + c

Penguaraian Bentuk Aljabar

1. x2 – a2 = x2 + ax – ax – a2 = x (x + a) – a(x + a) = (x +a) (x – a)
2. x3 – a3 = x3 – ax2  + ax2 – a2x + a2x + a3 = x2(x + a) + ax (x – a) + a2(x – a)

= (x – a) (x2 + ax + a2)

1. x4 – a4 = (x2  + a2)2 – 2a2x2 = (x2 + a2) – ( ax)2

= (x2  + a2 + ax) (x2 + a2 - ax) = (x2  + ax + a2) (x2 - ax + a2)

1. **Aksioma Urutan**

Aksioma ini mengatur tentang pemunculan bilangan positif dan bilangan negatif. Berdasarkan aksioma ini setiap bilangan real dapat diurutka dari kecil sampai besar. Dari aksioma ini dapat diturunkan berbagai sifat yang mendasari penyelesaian suatu pertidaksamaan. Kemudian dirancangan konsep nilai mutlak yang digunakan sebagai ukuran jarak dari dua buah bilangan real dan suatu alat yang digunakan untuk menyelesaikan pertakasamaan pada limit.

Pada ***R*** terdapat suatu himpunan bagian yang unsurnya dinamakan *bilangan positif* , yang memenuhi aksioma berikut :

* Jika a ***R,*** maka a = 0, atau a positif atau – a positif
* Jumlah dan hasil kali dua bilangan positif adalah bilangan positif.

Definisi 1.3 Misalkan a dan b bilangan real

* Bilangan a dikatakan lebih besar dari b, ditulis a > b, jika a – b bilangan positif.
* Bilangan a dikatakan lebih kecil dari b, ditulis *a < b* , jika b > a
* Lambang (lebih kecil atau sama dengan) dan (lebih besar atau sama dengan) menyatakan relasi: a b jika a < b atau a = b, dan a b jika a > b atau a = b.
* Pernyataan yang dihubungkan dengan tanda <, >, , dinamakan pertidaksamaan.
* Bilangan real a dikatakan negatif jika –a adalah bilangan positif.

Teorema 1.4

1. a > 0 a bilangan positif

Bukti :

a > 0 a – 0 bilangan positif a bilangan positif

1. a < 0 a bilangan negatif

Bukti :

a < 0 0 > a 0 –a bilangan positif -a bilangan positif a bilangan negatif

1. a > 0 - a < 0

Bukti :

a > 0 a bilangan positif - (-a) bilangan positif -a bilangan negatif -a < 0

1. a < 0 - a > 0

Bukti :

a < 0 a bilangan negatif - (- a) bilangan negatif -a bilangan positif -a > 0

Teorema 1.5 Misalkan a, b, c, dan d bilangan real

1. Jika a < b dan b < c, maka a < c (sifat transitif)
2. Jika a < b dan c sebarang , maka a + c < b + c
3. Jika a < b dan c < d, maka a + c < b + d
4. Jika a < b dan c > 0, maka ac < bc
5. Jika a < b dan c < 0, maka ac > bc
6. Jika 0 < a < b dan 0 < c < d, maka ac < bd
7. Jika 0 < a , b, atau a < b < 0, maka

Definsi 1.6 Bentuk Akar

* Akar kuadrat dari bilangan positif a, ditulis , didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi x2 = a
* Akar kubik dari bilangan real a, ditulis , didefinisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi x3 = a
* Jika n bilangan genap positif, akar ke-n dari bilangan positif a, ditulis , didefinisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi xn = a.
* Jika n bilangan ganjil positif dan n > 1, akar ke-n dari bilangan positif a, ditulis , didefinisikan sebagai bilangan x yang memenuhi xn = a

1. **Aksioma Lapangan**

Aksioma yang satu ini mengatur tentang perbedaan antar bilangan rasional dan bilangan real. Terdapat korespondensi satu-satu di antara bilangan real dan titik pada garis, tetapi sifat ini tidak dipenuhi bilangan rasional. Setiap bilangan real dapat digabarkan sebagai ttik pada garis, dan setiap titik pada garis dapat dinyatakan sebagai bilangan real. Di antara setiap dua bilangan rela terdapat bilangan rasional dan irasional tak hingga. Hal ini memunculkannya konsep selang hingga dan selang, tak hingga b2 – 4ac, a 0

Definisi 1.7

* Himpunan *S* ***R*** , *S* dikatakan terbatas di atas jika terdapat bilangan real b sehingga x b untuk setiap x *S*. Dalam hal ini b dinamakan batas atas dari *S*.
* Himpunan *S* ***R*** , *S* dikatakan terbatas di bawah jika terdapat bilangan real b sehingga x a untuk setiap x *S*. Dalam hal ini a dinamakan batas bawah dari *S*.
* Bilangan real b dikatakan batas atas terkecil (supremum) *S* ***R,*** *S ditulis b* = sup *S*, jika b suatu batas atas dari *S*  dan batas atas lainnya lebih besar/sama dengan b.
* Bilangan real a dikatakan batas bawah terbesar (infimum) *S* ***R,*** *S ditulis a* = inf *S*, jika a suatu batas atas dari *S*  dan batas atas lainnya lebih kecil/sama dengan a.

Aksioma kelengkapan pada bilangan real menyatakan setiap himpunan bagian tak kosong dari ***R*** yang terbatas di atas selalu mempunyai batas atas terkecil dan setiap himpunan bagian tak kosong mempunyai batas bawah terbesar. Sifat ini tidak dimiliki oleh bilangan rasioanl dengan ilustrasi di bwah ini aproksimasi

A = {1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421;...}

Jika A merupakan semesta himpunan bilangan rasional, maka A tidak mempunyai batas atas terkecil yang mana terbatas pada , 2, 3, ... dan seterusnya dengan batas atas terkecil adalah yang bukan bilangan rasional

Berdasarkan aksioma kelengkapan, dalam semesta himpunan bilangan real selalu mempunyai batas atas terkecil, dan hal ini yang membedakan antara himpunan bilangan rasional dan bilangan real.

Sifat batasa atas terkecil digunakan untuk membuktikan bahwa diantara setiap bilangan real terdapat bilangan rasional dan irrasional yang tak terhingga.

Bilangan real yang memenuhi suatu pertidaksamaan tertentu

* Selang Hingga

Himpunan bagian dari ***R*** yang terbatas di atas dan di bawah

Definsi dengan himpunan titik

1. (a,b) = {x ***R*** : a < x < b}
2. [a,b] = {x ***R*** : a x b}
3. (a.b] = {x a < x b}
4. [a,b) = { x : a x < b}

* Selang Tak Hingga

Himpunan bagian dari ***R*** yang tidak terbatas di atas maupun di bawah

Diperlukan lambang dan - yang memenuhi relasi urutan - < x < untuk setiap bilanga real x. Lambang menyimbolkan bilangan real yang membesar tanpa batas dan - menyimbolkan bilangan real yang mengecil tanpa batas.

1. (a,) = {x ***R*** : x > a}
2. [a, = {x ***R*** : x a}
3. (- = {x ***R*** : x < b}
4. (- = {x ***R*** : x b}
5. (- = ***R***

Soal-Soal Bilangan Real

Part 1 (Sederhanakanlah sampai tanda kurung menghilang dan menyederhanakan seluruh pecahan)

1. 4 – 2 (8 – 11) + 6
2. 5[-1( 7 + 12 – 16) + 4] – (-2)
3. /

Part 2 (Lakukan operasi yang diminta dan sederhanakanlah)

1. (3x – 4x) (x + 1)
2. (3t2 – t + 1)2

Part 3 (Cari nilai-nilai yang berikut; jika tak terdefinisi, katakan demikian)

1. 0,0
2. 05
3. 170

Part 4

1. Perhatikan bahwa pembagian oleh 0 tidak memiliki arti, misalnya : a 0, maka a = 0 b = 0, yang merupakan kotradiksi. Coba buktikan dan carilah alasan mengapa tanpa arti!

Part 5 Ubahlah bilangan rasional berikut menjadi desimal

Part 6 Ubahlah bilangn desimal berulah berikut menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat

1. 0,123123123 . . .
2. 2,56565656....
3. 3,9292929292.....
4. 3,999999....

Part 7 Tunjukan bahwa sebarang bilangan rasional plq, dengan pemfaktoran prima dan q seluruhnya terdiri dari angka 2 dan angka 5, memiliki suatu uraian desimal yang mempunyai akhir.

Part 8 Berapa bialngan bulat positif terkecil? Bilangan rasional dan irasioanl positif terkecil ?

Part 9 Apakah terdapat bilangan antara 0,999999..... dengan 1? Bagaimana anda memecahkan pernyataan bahwa terdapat suatu bilangan real lain di antara dua bilangan real

Part 10 Carilah aproksimasi desimal dari

Part 11 Estimasi

1. Estimasikan banyaknya inci kubik dalam kepala Anda
2. Estimasikan panjang khatulistiwa dalam kaki, misalkan jari-jari bumi 6000 mil.
3. Pohon Jendral Sherman memiliki tinggi sekitar 270 kaki dan rata-rata diameternya 16 kaki. Taksir banyaknya papan (1 papan = 1 inci x 12 inci x 12 inci) dari kayu yang dapat dibuat dari pohon ini, dengan anggapan bahwa tidak ada limbah dan abaikan cabang-cabangnya.

Part 12 Tuliskan kebalikan dan kontrapositif dari pernyataan berikut

1. Jika saya memperoleh A pada ujian kahir, saya akan lulus ujian tersebut
2. Jika sudut ABC lancip, maka ukurannya adalah lebih besar daripada 00 dan lebih kecil dari 900
3. Jika a < b maka a2 < b2 < c

Part 13 Mana dari pernyataan berikut yang benar dengan menganggap bahwa x, y , dan merupakan bilangan real

1. Untuk setiap x,x > 0 x2 > 0
2. Untuk setiap x, x2 > x
3. Untuk setiap x, terdapat y sedemikian rupa sehingga y > x2
4. Untuk setipa bilangan positif y, terdapat bilangan positif lain x sedemikian rupa sehingga 0 < x < y
5. Untuk setiap x, x < x + 1
6. Terdapat bilangan asli N sedemikian rupa sehingga semua bilangan prima lebih kecil daripada N.
7. Untuk setiap x positif, terdapat sebuah bilangan asli n sedemikian hingga
8. Untuk setiap positif, terdapat bilangan asli n sedemikian hingga

Part 14 Buktikan pernyataan beriku

1. Jika n ganjil, maka n2 ganjil (jika n ganjil, maka terdapat bilangan bulat k, sedemikian rupa sehingga n = 2k +1)
2. Perlihatkan dan buktikan bahwa adalah bilangan irrasional!

Part 15 Aksioma Kelengkapan

1. Suatu bilangan b dinamakan batas atas dari suatu himpunan bilangan S jika x b untuk setiap x di S. Misal, 5; 6,5; dan 13 adalah batas atas untuk himpunan S = {1, 2, 3, 4, 5}.

Bilangan 5 merupakan batas atas terkecil untuk S. Carilah batas atas terkecil dari setiap himpunan berikut :

1. S = {-10, -8, -6, -4, -2}
2. S = {2,4; 2,44; 2,444;....}
3. S= {, }
4. S = {x : x2 = (-1)n + 1/n, n bilangan bulat positif} ; yaitu = (-1)n + 1/n, dengan n adalah bilangan bulat positif.
5. S = {x : x2 < 2, x adalah bilangan rasional}