**BAB 7**

**LIMIT DI TAK-HINGGA dan LIMIT TAK-BERHINGGA**

1. **Limit di Tak-hingga**

Ketika kita menuliskan $x\rightarrow \infty $, kita *tidak* menyatakan secara langsung bahwa di suatu tempat yang jauh, jauh ke kanan pada sumbu-$x$ terdapat sebuah bilangan (lebih besar daripada sebuah bilangan) yang didekati oleh $x$. Namun, kita gunakan $x\rightarrow \infty $ sebagi cara singkat untuk mengatakan bahwa $x$ menjadi semakin membesar tanpa batas.

**Definisi Presisi Limit** ketika $x\rightarrow \pm \infty $. Dalam analogi dengan definisi $ε-δ$ untuk limit biasa, dapat dibuat definisi berikut.

**Definsi** Limit ketika $x\rightarrow \infty $

Misalkan $f$ terdefinisi pada $[c,\infty )$ untuk suatu bilangan $c.$ Kita katakan bahwa $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=L$ jika untuk masing-masing $ε>0$ terdapat bilangan $M$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$x>M⇒\left|f\left(x\right)-L\right|<ε$$

Bahwa $M$ dapat dan biasanya tergantung kepada $ε$. Umumnya, semakin kecil $ε$ maka akan semakin besar $M$.

**Definisi** Limit ketika $x\rightarrow -\infty $

Misalkan $f$ terdefinisi pada $(-\infty , c]$ untuk suatu bilangan $c$. Kita katakan bahwa $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=L$ jika untuk masing-masing $ε>0$ terdapat bilangan $M$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$x<M⇒\left|f\left(x\right)-L\right|<ε$$

**Contoh Soal 1 (halaman 78)**

Perlihatkan jika $k$ bilangan bulat positif maka

$\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{x^{k}}=0$ dan $\lim\_{x\to -\infty }\frac{1}{x^{k}}=0$

**Penyelesaian**

Misalnya diberikan $ε>0$. Setelah analisis pendahuluan, kita pilih $M=\sqrt[k]{\frac{1}{ε}}$ . Maka $x>M$ mengimplikasikan bahwa

$$\left[\frac{1}{x^{k}}-0\right]=\frac{1}{x^{k}}<\frac{1}{M^{k}}=ε$$

Bukti dari pernyataan yang kedua serupa.

**Contoh Soal 2 (halaman 78)**

Buktikan bahwa $\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{1+ x^{2}}=0$

**Penyelesaian**

Kita menggunakan cara yang biasa : bagilah pembilang dan penyebut dengan pangkat $x$ tertinggi yang muncul di penyebut, yakni $x^{2}$.

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{1+ x^{2}}=\lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{x}{x^{2}}}{\frac{1+ x^{2}}{x^{2}}}=\lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2}}+1}$$

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{1+ x^{2}}=\frac{\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{x}}{\lim\_{x\to \infty }\frac{1}{x^{2}}+\lim\_{x\to \infty }1}=\frac{0}{0+1}=0$$

**Contoh Soal 3 (halaman 79)**

Carilah $\lim\_{x\to -\infty }\frac{2x^{3}}{1+x^{3}}$

**Penyelesaian**

Untuk mencari limit bagi pembilang dan penyebut dengan $x^{3}$

$$\lim\_{x\to -\infty }\frac{2x^{3}}{1+x^{3}}=\lim\_{x\to -\infty }\frac{2}{\frac{1}{x^{3}}+1}=\frac{2}{0+1}=2$$

**Limit Barisan**

Daerah asal untuk beberapa fungsi adalah himpunan bilangan asli {1, 2, 3, ...}, dalam situasi ini, kita biasanya menuliskan $a\_{n}$ ketimbang $a(n)$ untuk menyatakan suku ke $-n$, atau $\{a\_{n}\}$ untuk menyatakan seluruh barisan. Sebagai contoh, kita dapat mendefinisikan barisan oleh $a\_{n}=\frac{n}{(n+1)}$. Marilah kita tinjau apa yang terjadi ketika $n$ menjadi besar. Sedikit perhitungan memperlihatkan bahwa

$a\_{1}=\frac{1}{2}$ , $a\_{2}=\frac{2}{3}$ , $a\_{3}=\frac{3}{4 }$*,* $a\_{4}=\frac{4}{5}$ *,* .... $a\_{100}=\frac{100}{101}$ *, ...*

Kelihatan sepertinya nilai-nilai ini mendekati 1, sehingga nampaknya beralasan untuk mengatakan bahwa barisan ini $\lim\_{n\to \infty }a\_{n}=1$. Definisi berikutnya memberikan makna terhadap pemikiran limit sebuah barisan ini.

**Definisi** Limit Barisan

Misalkan $a\_{n}$ terdefinisi untuk semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan suatu bilangan $c$. Kita katakan bahwa $\lim\_{n\to \infty }a\_{n}=L$ jika untuk masing-masing $ε>0$ terdapat bilangan $M$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$n>M⇒\left|a\_{n}-L\right|<ε$$

Perhatikan bahwa definisi ini hampir identik dengan definisi $\lim\_{x\to \infty }f(x)$. Perbedaannya hanyalah bahwa sekarang kita mensyaratkan bahwa argumen fungsi adalah bilangan asli. Seperti yang kita duga Teorema Limit Utama berlaku untuk barisan.

**Contoh Soal 4 (halaman 79)**

Carilah $\lim\_{n\to \infty }\sqrt{\frac{n + 1}{n + 2}}$

**Penyelesaian**

Dengan menerapkan Teorema Limit Utama

$$\lim\_{n\to \infty }\sqrt{\frac{n + 1}{n + 2}}=\left(\lim\_{n\to \infty }\frac{n + 1}{n + 2}\right)^{^{1}/\_{2}}=\left(\lim\_{n\to \infty }\frac{1+^{1}/\_{n}}{2+^{2}/\_{n}}\right)^{^{1}/\_{2}}=\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{^{1}/\_{2}}=1$$

1. **Limit Tak-berhingga**

**Definisi**  Limit Tak-berhingga

Kita katakan bahwa $\lim\_{x\to c^{+}}f\left(x\right)=\infty $ jika untuk masing-masing bilangan positif $M$ berpadanan $δ>0$ sedemikian rupa sehingga

$$0<x-c<δ⇒f(x)>M$$

Dalam perkataan lain, $f(x)$ dapat dibuat sebesar yang kita inginkan (lebih besar daripada sebarang $M$ yang kita pilih) dengan mengambil $x$ cukup dekat tetapi di kanan $c$. Terdapat definisi-definisi yang berpadanan dari

$\lim\_{x\to c^{+}}f\left(x\right)=-\infty $ $\lim\_{x\to c^{-}}f\left(x\right)=\infty $ $\lim\_{x\to c^{-}}f\left(x\right)=-\infty $

$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=\infty $ $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=-\infty $ $\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=\infty $ $\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=-\infty $

**Contoh Soal 5 (halaman 80)**

Carilah $\lim\_{x\to 1^{-}}\frac{1}{(x-1)^{2}}$ dan $\lim\_{x\to 1^{+}}\frac{1}{(x-1)^{2}}$

**Penyelesaian**

Ketika $x\rightarrow 1^{+}$, penyebut tetap positif tetapi menuju nol, sedangkan pembilang adalah 1 untuk semua $x$. Jadi, hasil bagi $\frac{1}{(x-1)^{2}}$ dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi $x$ berada dekat tetapi di kanan 1. Secara serupa, ketika $x\rightarrow 1$, penyebut positif dan dapat dibuat sebarang dekat 0. Jadi, $\frac{1}{(x-1)^{2}}$ dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi $ x$ berada dekat tetapi di kiri 1. Karenanya kita simpulkan bahwa

$\lim\_{x\to 1^{-}}\frac{1}{(x-1)^{2}}=\infty $ dan $\lim\_{x\to 1^{+}}\frac{1}{(x-1)^{2}}=\infty $

Karena kedua limit adalah $\infty $, kita juga dapat menuliskan

$$\lim\_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^{2}}=\infty $$

**Contoh Soal 6 (halaman 80)**

Carilah $\lim\_{x\to 2^{+}}\frac{x + 1}{x^{2}-5x+6}$

**Penyelesaian**

$$\lim\_{x\to 2^{+}}\frac{x + 1}{x^{2}-5x+6}=\lim\_{x\to 2^{+}}\frac{x + 1}{(x-3)(x-2)}$$

Ketika $x\rightarrow 2^{+}$ kita lihat bahwa $x+1\rightarrow 3,$ $x-3\rightarrow -1, $dan $x-2\rightarrow 0^{+}$. Jadi, pembilang mendekati, tetapi penyebut negatif dan mendekati 0. Kita simpulkan bahwa

$$\lim\_{x\to 2}\frac{x + 1}{(x-3)(x-2)}=-\infty $$

**Kaitan terhadap Asimtot**

Garis $x=c$ adalah **asimtot tegak** grafik $y=f(x)$ jika salah satu dan empat pernyataan berikut benar.

$1. \lim\_{x\to c^{+}} f(x)=\infty $ 2. $\lim\_{x\to c^{+}} f\left(x\right)=-\infty $

$3. \lim\_{x\to c^{-}} f(x)=\infty $ 4. $\lim\_{x\to c^{-}} f\left(x\right)=-\infty $

Dalam alur yang serupa, garis $y=b$ adalah **asimtot datar** grafik $y=f(x)$ jika salah satu

$\lim\_{x\to \infty } f(x)=b$ atau $\lim\_{x\to -\infty } f\left(x\right)=b$