**BAB 7**

**LIMIT DI TAK-HINGGA dan LIMIT TAK-BERHINGGA**

1. **Limit di Tak-hingga**

Ketika kita menuliskan , kita *tidak* menyatakan secara langsung bahwa di suatu tempat yang jauh, jauh ke kanan pada sumbu- terdapat sebuah bilangan (lebih besar daripada sebuah bilangan) yang didekati oleh . Namun, kita gunakan sebagi cara singkat untuk mengatakan bahwa menjadi semakin membesar tanpa batas.

**Definisi Presisi Limit** ketika . Dalam analogi dengan definisi untuk limit biasa, dapat dibuat definisi berikut.

**Definsi** Limit ketika

Misalkan terdefinisi pada untuk suatu bilangan Kita katakan bahwa jika untuk masing-masing terdapat bilangan yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

Bahwa dapat dan biasanya tergantung kepada . Umumnya, semakin kecil maka akan semakin besar .

**Definisi** Limit ketika

Misalkan terdefinisi pada untuk suatu bilangan . Kita katakan bahwa jika untuk masing-masing terdapat bilangan yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

**Contoh Soal 1 (halaman 78)**

Perlihatkan jika bilangan bulat positif maka

dan

**Penyelesaian**

Misalnya diberikan . Setelah analisis pendahuluan, kita pilih . Maka mengimplikasikan bahwa

Bukti dari pernyataan yang kedua serupa.

**Contoh Soal 2 (halaman 78)**

Buktikan bahwa

**Penyelesaian**

Kita menggunakan cara yang biasa : bagilah pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi yang muncul di penyebut, yakni .

**Contoh Soal 3 (halaman 79)**

Carilah

**Penyelesaian**

Untuk mencari limit bagi pembilang dan penyebut dengan

**Limit Barisan**

Daerah asal untuk beberapa fungsi adalah himpunan bilangan asli {1, 2, 3, ...}, dalam situasi ini, kita biasanya menuliskan ketimbang untuk menyatakan suku ke , atau untuk menyatakan seluruh barisan. Sebagai contoh, kita dapat mendefinisikan barisan oleh . Marilah kita tinjau apa yang terjadi ketika menjadi besar. Sedikit perhitungan memperlihatkan bahwa

, , *, ,* ....  *, ...*

Kelihatan sepertinya nilai-nilai ini mendekati 1, sehingga nampaknya beralasan untuk mengatakan bahwa barisan ini . Definisi berikutnya memberikan makna terhadap pemikiran limit sebuah barisan ini.

**Definisi** Limit Barisan

Misalkan terdefinisi untuk semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan suatu bilangan . Kita katakan bahwa jika untuk masing-masing terdapat bilangan yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

Perhatikan bahwa definisi ini hampir identik dengan definisi . Perbedaannya hanyalah bahwa sekarang kita mensyaratkan bahwa argumen fungsi adalah bilangan asli. Seperti yang kita duga Teorema Limit Utama berlaku untuk barisan.

**Contoh Soal 4 (halaman 79)**

Carilah

**Penyelesaian**

Dengan menerapkan Teorema Limit Utama

1. **Limit Tak-berhingga**

**Definisi**  Limit Tak-berhingga

Kita katakan bahwa jika untuk masing-masing bilangan positif berpadanan sedemikian rupa sehingga

Dalam perkataan lain, dapat dibuat sebesar yang kita inginkan (lebih besar daripada sebarang yang kita pilih) dengan mengambil cukup dekat tetapi di kanan . Terdapat definisi-definisi yang berpadanan dari

**Contoh Soal 5 (halaman 80)**

Carilah dan

**Penyelesaian**

Ketika , penyebut tetap positif tetapi menuju nol, sedangkan pembilang adalah 1 untuk semua . Jadi, hasil bagi dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi berada dekat tetapi di kanan 1. Secara serupa, ketika , penyebut positif dan dapat dibuat sebarang dekat 0. Jadi, dapat dibuat sebarang besar dengan cara membatasi berada dekat tetapi di kiri 1. Karenanya kita simpulkan bahwa

dan

Karena kedua limit adalah , kita juga dapat menuliskan

**Contoh Soal 6 (halaman 80)**

Carilah

**Penyelesaian**

Ketika kita lihat bahwa dan . Jadi, pembilang mendekati, tetapi penyebut negatif dan mendekati 0. Kita simpulkan bahwa

**Kaitan terhadap Asimtot**

Garis adalah **asimtot tegak** grafik jika salah satu dan empat pernyataan berikut benar.

2.

4.

Dalam alur yang serupa, garis adalah **asimtot datar** grafik jika salah satu

atau