**BAB 8**

**TURUNAN FUNGSI ALJABAR**

1. Definisi Turunan

Kalkulus diferensial utamanya terfokus pada dua masalah dengan satu tema yang sama, yaitu kemiringan dari garis singgung dan kecepatan sesaat (laju perubahan). Kedua masalah tersebut merupakan manifestasi dari pemikiran dasar yang sama dengan sebuah limit, yaitu:

merupakan substansi utama yang selalu muncul pada dua masalah tersebut. Pemikiran dasar yang sama dengan limit tersebut secara matematis dinamakan ***turunan (derivative).*** Berikut adalah definisi turunan secara matematis.

|  |
| --- |
| **Definisi Turunan:**  Turunan fungsi adalah fungsi lain (dibaca “ aksen”) yang nilainya pada sembarang bilangan adalah  asalkan limitnya ada dan bukan atau .  Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa terdiferensiasi di . Pencarian turunan disebut ***diferensiasi***, sedangkan bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut ***kalkulus diferensial.*** |

Berikut adalah beberapa contoh dalam mencari turunan.

**Contoh 1 :** Tentukan turunan fungsi

**Penyelesaian :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |

Jadi, turunan fungsi adalah

**Contoh 2 :** Tentukan turunan fungsi .

**Penyelesaian :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |
|  | = |  |

Jadi, turunan fungsi adalah

|  |
| --- |
| **Langkah-Langkah Menentukan Turunan :**  Berikut adalah empat langkah untuk membantu dalam menentukan turunan .   * **Langkah 1** : Tentukan * **Langkah 2** : Tentukan selisih * **Langkah 3** : Bagilah dengan untuk mendapatkan * **Langkah 4** : Ambil limit , kemudian hitung |

**Contoh 3 :** Hitunglah turunan fungsi

**Penyelesaian :**

Dengan menerapkan empat langkah di atas, maka:

* **Langkah 1** : Tentukan
* **Langkah 2** : Tentukan
* **Langkah 3** : Bagilah hasil langkah 2 dengan hasilnya
* **Langkah 4** : Ambil limit hasil langkah 3 untuk , hasilnya:

Jadi, turunan fungsi adalah .

|  |
| --- |
| **Catatan :**  Jika diperintahkan untuk mencari nilai numerik dari di sembarang titik , maka cukup memasukkan nilai x ke dalam hasil turunan tersebut.  Misal dari contoh 3, turunan di adalah |

Terdapat beberapa notasi lain yang juga digunakan untuk menyatakan turunan fungsi selain notasi , diantaranya adalah:

|  |
| --- |
|  |

Notasi-notasi di atas digunakan untuk menyatakan turunan dan semua notasi tersebut populer digunakan pada buku kalkulus. Huruf d atau notasi D yang digunakan pada notasi di atas dibaca sebagai *“diferensial”.* Semua notasi di atas mewakili yang disebut **turunan.** Jadi,

1. Aturan Pencarian Turunan
2. Aturan Fungsi Konstanta

|  |
| --- |
| Jika , dengan suatu konstanta, maka turunannya pada sembarang adalah |

Jadi, untuk setiap fungsi konstan, maka turunannya pada sembarang adalah sama dengan nol (0).

**Bukti :**

Jadi, terbukti jika maka .

**Contoh 4 :** Tentukan turunan fungsi dari

**Penyelesaian :**

Berdasarkan Aturan Fungsi Konstanta, karena merupakan fungsi konstan, maka turunannya sama dengan nol (0).

1. Aturan Fungsi Satuan

|  |
| --- |
| Jika , maka ; yaitu,  . |

Jadi, untuk setiap fungsi satuan , maka turunannya adalah sama dengan satu (1).

**Bukti :**

Jadi, terbukti jika maka .

1. Aturan Pangkat

|  |
| --- |
| Jika , dengan bilangan bulat positif, maka , yaitu:  . |

**Bukti :**

Jadi, terbukti jika maka .

Berdasar dengan **Aturan pangkat,** kita tidak harus lagi menentukan turunan dengan menggunakan definisi limit.

**Contoh 5 :** Tentukan turunan fungsi

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan fungsi adalah

**Contoh 6 :** Tentukan turunan fungsi

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan fungsi adalah

1. Aturan Kelipatan Konstanta

|  |
| --- |
| Jika suatu konstanta dan suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka , yaitu  *(pengali kosntanta dapat dikeluarkan dari operator )* |

**Bukti :**

Misalkan , maka

Jadi, terbukti jika maka

**Contoh 7 :** Tentukanlah

**Penyelesaian** :

Jadi, adalah .

**Contoh 8 :** Tentukanlah

**Penyelesaian** :

Jadi, adalah .

1. Aturan Jumlah

|  |
| --- |
| Jika dan adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka , yaitu  *(turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan)* |

**Bukti :**

Misalkan , maka

Jadi, terbukti jika

**Contoh 9 :** Carilah turunan dari

**Penyelesaian** :

Jadi, turunan dari adalah .

**Contoh 10 :** Carilah turunan dari .

**Penyelesaian** :

Jadi, turunan dari adalah .

1. Aturan Selisih

|  |
| --- |
| Jika dan adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka , yaitu  *(turunan dari suatu selisih adalah selisih dari turunan-turunan)* |

**Bukti :**

Misalkan , maka

Jadi, terbukti jika

**Contoh 11 :** Carilah turunan dari .

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan dari adalah .

**Contoh 12 :** Carilah turunan dari .

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan dari adalah .

1. Aturan Hasil Kali

|  |
| --- |
| Jika dan adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka  yaitu  *(turunan hasil kali dua fungsi adalah fungsi pertama dikalikan turunan fungsi kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turunan fungsi pertama)* |

**Bukti :**

Misalkan , maka

Jadi, terbukti jika .

**Contoh 13 :** Carilah turunan dari

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan dari adalah .

**Contoh 14 :** Carilah turunan dari

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan dari adalah .

1. Aturan Hasil Bagi

|  |
| --- |
| Jika dan adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan g, maka  yaitu  *(turunan suatu hasil bagi adalah sama dengan penyebut dikalikan turunan pembilang dikurangi pembilang dikalikan turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut)* |

**Bukti :**

Misalkan , maka

Jadi, terbukti jika

**Contoh 15 :** Tentukan turunan

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan adalah .

**Contoh 16 :** Tentukan turunan

**Penyelesaian :**

Jadi, turunan adalah .