**BAB 8**

**TURUNAN FUNGSI ALJABAR**

1. Definisi Turunan

Kalkulus diferensial utamanya terfokus pada dua masalah dengan satu tema yang sama, yaitu kemiringan dari garis singgung dan kecepatan sesaat (laju perubahan). Kedua masalah tersebut merupakan manifestasi dari pemikiran dasar yang sama dengan sebuah limit, yaitu:

$$\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

merupakan substansi utama yang selalu muncul pada dua masalah tersebut. Pemikiran dasar yang sama dengan limit tersebut secara matematis dinamakan ***turunan (derivative).*** Berikut adalah definisi turunan secara matematis.

|  |
| --- |
| **Definisi Turunan:**Turunan fungsi $f$ adalah fungsi lain $f^{'}$ (dibaca “$f$ aksen”) yang nilainya pada sembarang bilangan $x$ adalah $$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$asalkan limitnya ada dan bukan $\infty $ atau $-\infty $.Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa $f$ terdiferensiasi di $x$. Pencarian turunan disebut ***diferensiasi***, sedangkan bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut ***kalkulus diferensial.*** |

Berikut adalah beberapa contoh dalam mencari turunan.

**Contoh 1 :** Tentukan turunan fungsi $5x^{2}+2.$

**Penyelesaian :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$f^{'}\left(x\right)$$ | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{5(x+h)^{2}+2-(5x^{2}+2)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{5(x^{2}+2xh+h^{2})+2-5x^{2}-2}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{5x^{2}+10xh+5h^{2}+2-5x^{2}-2}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{10xh+5h^{2}}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{h(10x+5h)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}10x+5h$$ |
|  | = | $$10x+5∙0$$ |
|  | = | $$10x+0$$ |
|  | = | $$10x$$ |

Jadi, turunan fungsi $5x^{2}+2$ adalah $10x.$

**Contoh 2 :** Tentukan turunan fungsi $8x^{2}-2x+3$.

**Penyelesaian :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$f^{'}\left(x\right)$$ | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{8(x+h)^{2}-2\left(x+h\right)+3-(8x^{2}-2x+3)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{8(x^{2}+2xh+h^{2})-2x-2h+3-8x^{2}+2x-3}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{8x^{2}+16xh+8h^{2}-2x-2h+3-8x^{2}+2x-3}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{16xh+8h^{2}-2h}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}\frac{h(16x+8h-2)}{h}$$ |
|  | = | $$\lim\_{h\to 0}16x+8h-2$$ |
|  | = | $$16x+8∙0-2$$ |
|  | = | $$16x-2$$ |

Jadi, turunan fungsi $8x^{2}-2x+3$ adalah $16x-2.$

|  |
| --- |
| **Langkah-Langkah Menentukan Turunan :**Berikut adalah empat langkah untuk membantu dalam menentukan turunan $f^{'}\left(x\right)$.* **Langkah 1** : Tentukan $f\left(x+h\right)$
* **Langkah 2** : Tentukan selisih $f\left(x+h\right)-f(x)$
* **Langkah 3** : Bagilah dengan $h$ untuk mendapatkan $\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$
* **Langkah 4** : Ambil limit $h\rightarrow 0$, kemudian hitung $f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$
 |

**Contoh 3 :** Hitunglah turunan fungsi $\frac{3}{2x}$

**Penyelesaian :**

Dengan menerapkan empat langkah di atas, maka:

* **Langkah 1** : Tentukan $f\left(x+h\right)=\frac{3}{2(x+h)}$
* **Langkah 2** : Tentukan $f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\frac{3}{2\left(x+h\right)}-\frac{3}{2x}$

$$ =\frac{3x}{2\left(x+h\right)x}-\frac{3(x+h)}{2x(x+h)}$$

$$ =\frac{3x-3x-3h}{2x\left(x+h\right)}$$

$$ =\frac{-3h}{2x\left(x+h\right)}$$

* **Langkah 3** : Bagilah hasil langkah 2 dengan $h,$ hasilnya

$$=\frac{\frac{-3h}{2x\left(x+h\right)}}{h}=\frac{-3h}{2x\left(x+h\right)}∙\frac{1}{h}=\frac{-3}{2x\left(x+h\right)}$$

* **Langkah 4** : Ambil limit hasil langkah 3 untuk $h\rightarrow 0$, hasilnya:

$$\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}=\lim\_{h\to 0}\frac{-3}{2x\left(x+h\right)}=\frac{-3}{2x\left(x+0\right)}=\frac{-3}{2x^{2}}$$

Jadi, turunan fungsi $\frac{3}{2x}$ adalah $\frac{-3}{2x^{2}}$ .

|  |
| --- |
| **Catatan :**Jika diperintahkan untuk mencari nilai numerik dari $f^{'}\left(x\right)$ di sembarang titik $x$, maka cukup memasukkan nilai x ke dalam hasil turunan tersebut.Misal dari contoh 3, turunan$ f\left(x\right)$ di $x=3$ adalah $f\left(3\right)=\frac{-3}{2(3)^{2}}=\frac{-3}{2∙9}=\frac{-3}{18}=-\frac{1}{6}.$ |

Terdapat beberapa notasi lain yang juga digunakan untuk menyatakan turunan fungsi $y=f\left(x\right)$ selain notasi $f^{'}\left(x\right)$, diantaranya adalah:

|  |
| --- |
| $$y^{'} , \frac{dy}{dx},\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right], D\_{x}\left[f\left(x\right)\right], D\_{x}y, \frac{df}{dx}$$ |

Notasi-notasi di atas digunakan untuk menyatakan turunan dan semua notasi tersebut populer digunakan pada buku kalkulus. Huruf d atau notasi D yang digunakan pada notasi di atas dibaca sebagai *“diferensial”.* Semua notasi di atas mewakili $\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$ yang disebut **turunan.** Jadi,

$$\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}=f^{'}\left(x\right)=y^{'}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]= D\_{x}\left[f\left(x\right)\right]= D\_{x}y= \frac{df}{dx}=turunan$$

1. Aturan Pencarian Turunan
2. Aturan Fungsi Konstanta

|  |
| --- |
| Jika $f\left(x\right)=k$, dengan $k$ suatu konstanta, maka turunannya pada sembarang $x$ adalah $D\_{x}\left(k\right)=0$ |

Jadi, untuk setiap fungsi konstan, maka turunannya pada sembarang $x$ adalah sama dengan nol (0).

**Bukti :**

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{k-k}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Jadi, terbukti jika $f\left(x\right)=k$ maka $D\_{x}\left(k\right)=0$.

**Contoh 4 :** Tentukan turunan fungsi dari $f\left(x\right)=18$

**Penyelesaian :**

Berdasarkan Aturan Fungsi Konstanta, karena $f\left(x\right)=18$ merupakan fungsi konstan, maka turunannya sama dengan nol (0).

1. Aturan Fungsi Satuan

|  |
| --- |
| Jika $f\left(x\right)=x$, maka $f^{'}\left(x\right)=1$ ; yaitu,$D\_{x}\left(x\right)=1$. |

Jadi, untuk setiap fungsi satuan $f\left(x\right)=x$, maka turunannya adalah sama dengan satu (1).

**Bukti :**

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Jadi, terbukti jika $f\left(x\right)=x$ maka $D\_{x}\left(x\right)=1$.

1. Aturan Pangkat

|  |
| --- |
| Jika $f\left(x\right)=x^{n}$, dengan $n$ bilangan bulat positif, maka $f^{'}\left(x\right)=nx^{n-1}$, yaitu:$D\_{x}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$. |

**Bukti :**

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{[x^{n}+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^{2}+…+nxh^{n-1}+h^{n}]-x^{n}}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}h^{2}+…+nxh^{n-1}+h^{n}}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{h[nx^{n-1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^{n-1}h+…+nxh^{n-1}+h^{n-1}]}{h}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0} nx^{n-1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}x^{n-1}h^{2}+…+nxh^{n-1}+h^{n-1}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\lim\_{h\to 0} nx^{n-1}$$

Jadi, terbukti jika$f\left(x\right)=x^{n}$ maka $D\_{x}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$.

Berdasar dengan **Aturan pangkat,** kita tidak harus lagi menentukan turunan dengan menggunakan definisi limit.

**Contoh 5 :** Tentukan turunan fungsi $f\left(x\right)=x^{5}$

**Penyelesaian :**

$$f\left(x\right)=x^{5}, n=5$$

$$f'\left(x\right)=nx^{n-1}$$

$$f'\left(x\right)=5x^{5-1}$$

$$f'\left(x\right)=5x^{4}$$

Jadi, turunan fungsi $f\left(x\right)=x^{5}$ adalah $f'\left(x\right)=5x^{4}.$

**Contoh 6 :** Tentukan turunan fungsi $f\left(x\right)=x^{99}$

**Penyelesaian :**

$$f\left(x\right)=x^{99}, n=99$$

$$f'\left(x\right)=nx^{n-1}$$

$$f'\left(x\right)=99x^{99-1}$$

$$f'\left(x\right)=99x^{98}$$

Jadi, turunan fungsi $f\left(x\right)=x^{99}$ adalah $f'\left(x\right)=99x^{98}.$

1. Aturan Kelipatan Konstanta

|  |
| --- |
| Jika $k$ suatu konstanta dan $f$ suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $\left(kf\right)^{'}(x)=k∙f^{'}\left(x\right)$, yaitu$$D\_{x}\left[k∙f\left(x\right)\right]=k∙D\_{x}f(x)$$*(pengali kosntanta* $k$ *dapat dikeluarkan dari operator* $D\_{x}$ *)* |

**Bukti :**

Misalkan $F\left(x\right)=k∙f(x)$, maka

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{k∙f\left(x+h\right)-k∙f(x)}{h}$$

$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}k\left(\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\right)$

$$F^{'}(x)=k∙\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F^{'}(x)=k∙f'(x)$$

Jadi, terbukti jika $D\_{x}\left[k∙f\left(x\right)\right]$ maka $k∙D\_{x}f(x)$

**Contoh 7 :** Tentukanlah $D\_{x}\left(-7x^{3}\right)$

**Penyelesaian** :

$$D\_{x}\left(-7x^{3}\right)=-7D\_{x}\left(x^{3}\right)$$

$$D\_{x}\left(-7x^{3}\right)=-7∙3x^{3-1}$$

$$D\_{x}\left(-7x^{3}\right)=-7∙3x^{2}$$

$$D\_{x}\left(-7x^{3}\right)=-21x^{2}$$

Jadi, $D\_{x}\left(-7x^{3}\right)$ adalah $-21x^{2}$.

**Contoh 8 :** Tentukanlah $D\_{x}\left(4x^{3}\right)$

**Penyelesaian** :

$$D\_{x}\left(4x^{3}\right)=4D\_{x}\left(x^{3}\right)$$

$$D\_{x}\left(4x^{3}\right)=4∙3x^{3-1}$$

$$D\_{x}\left(4x^{3}\right)=4∙3x^{2}$$

$$D\_{x}\left(4x^{3}\right)=12x^{2}$$

Jadi, $D\_{x}\left(4x^{3}\right)$ adalah $12x^{2}$.

1. Aturan Jumlah

|  |
| --- |
| Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $\left(f+g\right)^{'}\left(x\right)=f^{'}\left(x\right)+g'(x)$, yaitu$$D\_{x}\left[f\left(x\right)+g(x)\right]=D\_{x}f\left(x\right)+D\_{x}g(x)$$*(turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan)*  |

**Bukti :**

Misalkan $F\left(x\right)=f\left(x\right)+g(x)$, maka

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)+g(x+h)}{h}-\frac{f\left(x\right)+g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}+\frac{g\left(x+h\right)-g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}+\lim\_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g(x)}{h}$$

$$F^{'\left(x\right)}=f^{'}\left(x\right)+g^{'}\left(x\right)$$

Jadi, terbukti jika $D\_{x}\left[f\left(x\right)+g(x)\right]=D\_{x}f\left(x\right)+D\_{x}g(x)$

**Contoh 9 :** Carilah turunan dari $2x^{3}+x^{7}$

**Penyelesaian** :

$$D\_{x}\left(2x^{3}+x^{7}\right)=D\_{x}(2x^{3})+D\_{x}(x^{7})$$

$$D\_{x}\left(2x^{3}+x^{7}\right)=2D\_{x}(x^{3})+D\_{x}(x^{7})$$

$$D\_{x}\left(2x^{3}+x^{7}\right)=2∙3x^{3-1}+7x^{7-1}$$

$$D\_{x}\left(2x^{3}+x^{7}\right)=6x^{2}+7x^{6}$$

Jadi, turunan dari $2x^{3}+x^{7}$ adalah $6x^{2}+7x^{6}$.

**Contoh 10 :** Carilah turunan dari $3x^{3}+7x^{2}+4x+5$.

**Penyelesaian** :

$$D\_{x}(3x^{3}+7x^{2}+4x+5)=D\_{x}(3x^{3})+D\_{x}(7x^{2})+D\_{x}(4x)+D\_{x}(5)$$

$$D\_{x}(3x^{3}+7x^{2}+4x+5)=3D\_{x}(x^{3})+7D\_{x}(x^{2})+4D\_{x}(x)+D\_{x}(5)$$

$$D\_{x}\left(3x^{3}+7x^{2}+4x+5\right)=3∙3x^{3-1}+7∙2x^{2-1}+4∙1+0$$

$$D\_{x}(3x^{3}+7x^{2}+4x+5)=9x^{2}+14x+4$$

Jadi, turunan dari $3x^{3}+7x^{2}+4x+5$ adalah $9x^{2}+14x+4$.

1. Aturan Selisih

|  |
| --- |
| Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $\left(f-g\right)^{'}\left(x\right)=f^{'}\left(x\right)-g'(x)$, yaitu$$D\_{x}\left[f\left(x\right)-g(x)\right]=D\_{x}f\left(x\right)-D\_{x}g(x)$$*(turunan dari suatu selisih adalah selisih dari turunan-turunan)*  |

**Bukti :**

Misalkan $F\left(x\right)=f\left(x\right)-g(x)$, maka

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-g(x+h)}{h}-\frac{f\left(x\right)-g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}-\frac{g\left(x+h\right)-g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}-\lim\_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g(x)}{h}$$

$$F^{'\left(x\right)}=f^{'}\left(x\right)-g^{'}\left(x\right)$$

Jadi, terbukti jika $D\_{x}\left[f\left(x\right)-g(x)\right]=D\_{x}f\left(x\right)-D\_{x}g(x)$

**Contoh 11 :** Carilah turunan dari $3x^{5}-2x^{2}$.

**Penyelesaian :**

$$D\_{x}(3x^{5}-2x^{2})=3D\_{x}(x^{5})-2D\_{x}(x^{2})$$

$$D\_{x}(3x^{5}-2x^{2})=3∙5x^{5-1}-2∙2x^{2-1}$$

$$D\_{x}(3x^{5}-2x^{2})=15x^{4}-4x$$

Jadi, turunan dari $3x^{5}-2x^{2}$ adalah $15x^{4}-4x$.

**Contoh 12 :** Carilah turunan dari $-x^{3}-9x^{2}-4x-8$.

**Penyelesaian :**

$$D\_{x}(-x^{3}-9x^{2}-4x-8)=D\_{x}(-x^{3})-D\_{x}(9x^{2})-D\_{x}(4x)-D\_{x}(8)$$

$$D\_{x}(-x^{3}-9x^{2}-4x-8)=3D\_{x}(-x^{3})-9D\_{x}(x^{2})-4D\_{x}(x)-D\_{x}(8)$$

$$D\_{x}\left(-x^{3}-9x^{2}-4x-8\right)=3∙-1x^{3-1}-9∙2x^{2-1}-4∙1-0$$

$$D\_{x}\left(-x^{3}-9x^{2}-4x-8\right)=-3x^{2}-18x-4$$

Jadi, turunan dari $-x^{3}-9x^{2}-4x-8$ adalah $-3x^{2}-18x-4$.

1. Aturan Hasil Kali

|  |
| --- |
| Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka$$\left(f∙g\right)^{'}\left(x\right)=f\left(x\right)g'(x)+g(x)f^{'}\left(x\right)$$yaitu$$D\_{x}\left[f\left(x\right)g(x)\right]=f\left(x\right)D\_{x}g\left(x\right)+g(x)D\_{x}f(x)$$*(turunan hasil kali dua fungsi adalah fungsi pertama dikalikan turunan fungsi kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turunan fungsi pertama)* |

**Bukti :**

Misalkan $F\left(x\right)=f\left(x\right)g(x)$, maka

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)g\left(x+h\right)-f\left(x\right)g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)g\left(x+h\right)-f\left(x+h\right)g\left(x\right)+f\left(x+h\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)∙g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}+\frac{g(x)∙f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'(x)=\lim\_{h\to 0} f\left(x+h\right)∙\lim\_{h\to 0} \frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}+g\left(x\right)∙\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'(x)==f\left(x\right)g'(x)+g(x)f^{'}\left(x\right)$$

Jadi, terbukti jika $D\_{x}\left[f\left(x\right)g(x)\right]=f\left(x\right)D\_{x}g\left(x\right)+g(x)D\_{x}f(x)$.

**Contoh 13 :** Carilah turunan dari $2x^{5}×3x^{2}$

**Penyelesaian :**

$$D\_{x}(2x^{5}×3x^{2})=2x^{5}D\_{x}\left(3x^{2}\right)+3x^{2}D\_{x}\left(2x^{5}\right)$$

$$D\_{x}(2x^{5}×3x^{2})=2x^{5}∙3∙2x^{2-1}+3x^{2}∙2∙5x^{5-1}$$

$$D\_{x}(2x^{5}×3x^{2})=2x^{5}∙6x+3x^{2}∙10x^{4}$$

$$D\_{x}(2x^{5}×3x^{2})=12x^{6}+30x^{6}$$

$$D\_{x}(2x^{5}×3x^{2})=40x^{6}$$

Jadi, turunan dari $2x^{5}×3x^{2}$ adalah $40x^{6}$.

**Contoh 14 :** Carilah turunan dari $\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right).$

**Penyelesaian :**

$$D\_{x}\left\{\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)\right\}=\left(3x^{2}-5\right)D\_{x}\left(2x^{4}-x\right)+\left(2x^{4}-x\right)D\_{x}\left(3x^{2}-5\right)$$

$$D\_{x}\left\{\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)\right\}=\left(3x^{2}-5\right)\left(2∙4x^{4-1}-1\right)+\left(2x^{4}-x\right)\left(3∙2x^{2-1}-0\right)$$

$$D\_{x}\left\{\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)\right\}=\left(3x^{2}-5\right)\left(8x^{3}-1\right)+\left(2x^{4}-x\right)\left(6x\right)$$

$$D\_{x}\left\{\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)\right\}=24x^{5}-3x^{2}-40x^{3}+5+12x^{5}-6x^{2}$$

$$D\_{x}\left\{\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)\right\}=36x^{5}-40x^{3}-9x^{2}+5$$

Jadi, turunan dari $\left(3x^{2}-5\right)\left(2x^{4}-x\right)$ adalah $36x^{5}-40x^{3}-9x^{2}+5$.

1. Aturan Hasil Bagi

|  |
| --- |
| Jika $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan dengan g$(x)\ne 0$, maka$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)f'\left(x\right)-f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$$yaitu$$D\_{x}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g\left(x\right)D\_{x}f\left(x\right)-f(x)D\_{x}g(x)}{g^{2}(x)}$$*(turunan suatu hasil bagi adalah sama dengan penyebut dikalikan turunan pembilang dikurangi pembilang dikalikan turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut)* |

**Bukti :**

Misalkan $F\left(x\right)=\frac{f(x)}{g(x)}$, maka

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\frac{g\left(x\right)f\left(x+h\right)-f(x)g\left(x+h\right)}{h}∙\frac{1}{g\left(x\right)g(x+h)}$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\left[\frac{g\left(x\right)f\left(x+h\right)-g\left(X\right)f\left(x\right)+f\left(x\right)g\left(x\right)-f(x)g\left(x+h\right)}{h}∙\frac{1}{g\left(x\right)g\left(x+h\right)}\right]$$

$$F'\left(x\right)=\lim\_{h\to 0}\left\{\left[g\left(x\right)\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}-f(x)\frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}\right]∙\frac{1}{g\left(x\right)g\left(x+h\right)}\right\}$$

$$F'(x)=[g\left(x\right)f^{'}\left(x\right)-f\left(x\right)g^{'}\left(x\right)]∙\frac{1}{g\left(x\right)g(x)}$$

$$F^{'}\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)f'(x)-f\left(x\right)g^{'}\left(x\right)}{g^{2}\left(x\right)}$$

Jadi, terbukti jika $D\_{x}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g\left(x\right)D\_{x}f\left(x\right)-f(x)D\_{x}g(x)}{g^{2}(x)}$

**Contoh 15 :** Tentukan turunan $\frac{d}{dx}\frac{(-3x^{3}+5)}{(2x)}$

**Penyelesaian :**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{(2x)\frac{d}{dx}\left(-3x^{3}+5\right)-(-3x^{3}+5)\frac{d}{dx}(2x)}{(2x)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{(2x)(-3∙3x^{3-1}+0)-(-3x^{3}+5)(2)}{(2x)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{(2x)(-9x^{2})-(-3x^{3}+5)(2)}{(2x)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{(-18x^{3})-(-6x^{3}-10)}{4x^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{-18x^{3}+6x^{3}-10}{4x^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-3x+5}{2x}\right]=\frac{-12x^{3}-10}{4x^{2}}$$

Jadi, turunan $\frac{d}{dx}\frac{(-3x^{3}+5)}{(2x)}$ adalah $\frac{-12x^{3}-10}{4x^{2}}$.

**Contoh 16 :** Tentukan turunan $\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^{2}+7)}$

**Penyelesaian :**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^{2}+7}\right]=\frac{(x^{2}+7)\frac{d}{dx}\left(3x-5\right)-(3x-5)\frac{d}{dx}(x^{2}+7)}{(x^{2}+7)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^{2}+7}\right]=\frac{(x^{2}+7)\left(3-0\right)-(3x-5)(1∙2x^{2-1}+0)}{(x^{2}+7)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^{2}+7}\right]=\frac{(x^{2}+7)(3)-(3x-5)(2x)}{(x^{2}+7)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^{2}+7}\right]=\frac{-3x^{2}+21-6x^{2}+10x)}{(x^{2}+7)^{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^{2}+7}\right]=\frac{-9x^{2}+10x+21}{(x^{2}+7)^{2}}$$

Jadi, turunan $\frac{d}{dx}\frac{(3x-5)}{(x^{2}+7)}$ adalah $\frac{-9x^{2}+10x+21}{(x^{2}+7)^{2}}$.