Bab 1

MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN

Mungkin masalah yang paling penting dalam matematika adalah menyelesaikan sistem persamaan linear. Lebih dari 75 persen dari semua masalah matematika yang dijumpai dalam aplikasi ilmiah maupun industri melibatkan penyelesaian sistem linear hingga tahap tertentu. Dengan menggunakan metode-metode matematika modern, sering kali kita dapat mereduksi suatu masalah yang rumit menjadi suatu sistem persamaan linear. Sistem-sistem linear muncul dalam penerapan bidang-bidang seperti perdagangan, ekonomi, sosiologi, ekologi, demografi, genetika, elektronika, teknik dan fisika. Oleh karena itu, tampaknya tepat untuk mengawali buku ini dengan subbab mengenai sistem linear.

1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Suatu persamaan linear dalam n peubah (variable) adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b$$

di mana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah peubah. Dengan demikian maka suatu *sistem linear* dari m persamaan dalam n peubah adalah satu sistem berbentuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

di mana a_{ij} dan b_i semuanya adalah bilangan-bilangan real. Kita akan menyebut sistem-sistem bentuk (1) sebagai sistem linear $m \times n$.

Berikut adalah contoh-contoh sistem linear:

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$ **(c)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$

Sistem **(a)** adalah sistem 2×2, **(b)** adalah sistem 2×3, dan **(c)** adalah sistem 3×2.

Yang dimaksud dengan penyelesaian sistem $m \times n$ adalah sebuah tupel-n terurut bilangan-bilangan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang memenuhi semua persamaan dalam sistem. Sebagai contoh, pasangan terurut (1, 2) adalah penyelesaian dari sistem **(a)**, karena

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1) + 2 \cdot (2) &= 5 \\ 2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) &= 8 \end{aligned}$$

Tripel terurut (2,0,0) adalah penyelesaian dari sistem **(b)**, karena

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2) - 1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) &= 2 \\ 2 \cdot (2) + 1 \cdot (0) - 1 \cdot (0) &= 4 \end{aligned}$$

Sesungguhnya, sistem **(b)** memiliki banyak penyelesaian. Jika α adalah sembarang bilangan real, maka dapat dilihat dengan mudah bahwa tripel terurut $(2,\alpha,\alpha)$ adalah suatu penyelesaian. Akan tetapi, sistem **(c)** tidak memiliki penyelesaian. Terlihat dari persamaan ketiga bahwa koordinat pertama dari sembarang penyelesaian harus memiliki nilai 4. Dengan menggunakan $x_1 = 4$ dalam kedua penyelesaian yang pertama, kita lihat bahwa koordinat kedua harus memenuhi:

$$\begin{aligned} 4 + x_2 &= 2 \\ 4 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

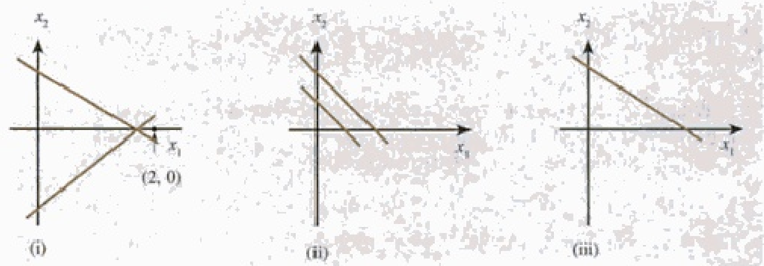
Karena tidak terdapat bilangan real yang memenuhi kedua persamaan ini, maka sistem **(c)** tidak memiliki penyelesaian. Jika sistem linear tidak memiliki penyelesaian maka kita katakan bahwa sistem tersebut *takkonsisten (inconsistent)*. Jika sistem linear mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, maka kita katakan bahwa sistem tersebut konsisten (*consistent*). Jadi sistem **(c)** *takkonsisten*, sedangkan sistem **(a)** dan **(b)** kedua-duanya konsisten.

Himpunan semua penyelesaian dari sistem linear disebut himpunan penyelesaian dari sistem. Jika suatu sistem *takkonsisten*, maka himpunan penyelesaian adalah himpunan kosong. Suatu sistem konsisten akan memiliki suatu himpunan penyelesaian yang takkosong. Untuk menyelesaikan suatu sistem konsisten, kita harus mencari himpunan penyelesaiannya.

SISTEM 2 x 2

Marilah kita perhatikan sistem secara geometris yang berbentuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$



GAMBAR 1.1.1

Setiap persamaan dapat dinyatakan secara grafis sebagai satu garis dalam bidang. Pasangan terurut (x_1, x_2) akan menjadi penyelesaian dari sistem jika dan hanya jika (x_1, x_2) terletak pada kedua garis. Sebagai contoh, tinjau ketiga sistem:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Kedua garis dalam sistem (i) berpotongan pada titik (2, 0). Jadi {(2, 0)} adalah himpunan penyelesaian dari (i). Dalam sistem (ii) kedua garis adalah sejajar. Oleh karena itu, sistem (ii) adalah takkonsisten dan dengan demikian himpunan penyelesaiannya kosong. Kedua persamaan dalam sistem (iii) kedua-duanya menyatakan garis yang sama. Sembarang titik pada garis itu akan menjadi penyelesaian dari sistem (iii) (lihat Gambar 1.1.1).

Pada umumnya, terdapat tiga kemungkinan: kedua garis yang berpotongan pada satu titik, kedua garis sejajar, atau kedua persamaan menyatakan garis yang sama. Maka himpunan penyelesaian mengandung satu, nol, atau banyak titik yang tidak berhingga.

Situasinya serupa untuk sistem $m \times n$. Satu sistem $m \times n$ dapat atau tidak perlu konsisten. Jika sistem $m \times n$ konsisten, maka sistem ini memiliki tepat satu penyelesaian atau takberhingga banyaknya penyelesaian. Hanya kedua hal inilah yang merupakan kemungkinan penyelesaiannya. Kita akan melihat mengapa demikian dalam Subbab 2 ketika kita mempelajari bentuk eselon baris. Apa yang akan menjadi perhatian dengan segera adalah masalah mencari semua penyelesaian dari suatu sistem yang diberikan. Untuk menyelesaikan masalah ini, kami perkenalkan pemikiran mengenai *sistem ekivalen.*

SISTEM EKIVALEN

Tinjau dua sistem:

$$\textbf{(a)}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_2 &= 3 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \textbf{(b)}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sistem **(a)** mudah untuk diselesaikan karena jelas dari kedua persamaan terakhir bahwa $x_2 = 3$ dan $x_3 = 2$. Dengan menggunakan kedua nilai ini dalam persamaan pertama, akan diperoleh:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 3 - 2 &= -2 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian dari sistem **(a)** adalah (–2, 3, 2). Sistem **(b)** tampaknya lebih sulit untuk diselesaikan. Sesungguhnya, sistem **(b)** memiliki penyelesaian yang sama dengan sistem **(a)**. Untuk melihat hal ini, tambahkan kedua persamaan yang pertama dari sistem:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \underline{-3x_1 - x_2 + x_3 = 5} \\ x_2 = 3 \end{array}$$

Jika (x_1, x_2, x_3) adalah sembarang penyelesaian **(b)**, maka (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi semua persamaan dari sistem. Jadi (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi sembarang persamaan baru yang diperoleh dengan menjumlahkan dua persamaan dari sistem persamaan **(b)**. Oleh karena itu, x_2 harus sama dengan 3. Dengan jalan yang serupa, (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi persamaan baru yang dibentuk dengan mengurangi persamaan pertama dari persamaan ketiga:

Setiap persamaan dapat dinyatakan secara grafis sebagai satu garis dalam bidang. Pasangan terurut (x_1, x_2) akan menjadi penyelesaian dari sistem jika dan hanya jika (x_1, x_2) terletak pada kedua garis. Sebagai contoh, tinjau ketiga sistem:

$$\text{(i)}\ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Kedua garis dalam sistem (i) berpotongan pada titik (2, 0). Jadi {(2, 0)} adalah himpunan penyelesaian dari (i). Dalam sistem (ii) kedua garis adalah sejajar. Oleh karena itu, sistem (ii) adalah takkonsisten dan dengan demikian himpunan penyelesaiannya kosong. Kedua persamaan dalam sistem (iii) kedua-duanya menyatakan garis yang sama. Sembarang titik pada garis itu akan menjadi penyelesaian dari sistem (iii) (lihat Gambar 1.1.1).

Pada umumnya, terdapat tiga kemungkinan: kedua garis yang berpotongan pada satu titik, kedua garis sejajar, atau kedua persamaan menyatakan garis yang sama. Maka himpunan penyelesaian mengandung satu, nol, atau banyak titik yang tidak berhingga.

Situasinya serupa untuk sistem $m \times n$. Satu sistem $m \times n$ dapat atau tidak perlu konsisten. Jika sistem $m \times n$ konsisten, maka sistem ini memiliki tepat satu penyelesaian atau takberhingga banyaknya penyelesaian. Hanya kedua hal inilah yang merupakan kemungkinan penyelesaiannya. Kita akan melihat mengapa demikian dalam Subbab 2 ketika kita mempelajari bentuk eselon baris. Apa yang akan menjadi perhatian dengan segera adalah masalah mencari semua penyelesaian dari suatu sistem yang diberikan. Untuk menyelesaikan masalah ini, kami perkenalkan pemikiran mengenai *sistem ekivalen.*

SISTEM EKIVALEN

Tinjau dua sistem:

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_2 &= 3 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sistem (a) mudah untuk diselesaikan karena jelas dari kedua persamaan terakhir bahwa $x_2 = 3$ dan $x_3 = 2$. Dengan menggunakan kedua nilai ini dalam persamaan pertama, akan diperoleh:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 3 - 2 &= -2 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian dari sistem (a) adalah (−2, 3, 2). Sistem (b) tampaknya lebih sulit untuk diselesaikan. Sesungguhnya, sistem (b) memiliki penyelesaian yang sama dengan sistem (a). Untuk melihat hal ini, tambahkan kedua persamaan yang pertama dari sistem:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \underline{-3x_1 - x_2 + x_3 = \ \ 5} \\ x_2 = \ \ 3 \end{array}$$

Jika (x_1, x_2, x_3) adalah sembarang penyelesaian (b), maka (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi semua persamaan dari sistem. Jadi (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi sembarang persamaan baru yang diperoleh dengan menjumlahkan dua persamaan dari sistem persamaan (b). Oleh karena itu, x_2 harus sama dengan 3. Dengan jalan yang serupa, (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi persamaan baru yang dibentuk dengan mengurangi persamaan pertama dari persamaan ketiga:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ \hline & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Oleh karena itu, sembarang penyelesaian dari sistem **(b)** harus juga menjadi penyelesaian dari sistem **(a)**. Dengan uraian yang serupa, dapat diperlihatkan bahwa sembarang penyelesaian dari (a) adalah juga merupakan penyelesaian dari **(b)**. Hal ini dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan pertama dari persamaan kedua:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ \hline -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

dan dengan menjumlahkan persamaan pertama dan ketiga:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \\ \hline 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Jadi (x_1, x_2, x_3) adalah penyelesaian dari sistem **(b)** jika dan hanya jika (x_1, x_2, x_3) adalah penyelesaian dari sistem **(a)**. Oleh karena itu, kedua sistem memiliki himpunan penyelesaian yang sama, yaitu $\{(-2,3,2)\}$.

➤ **DEFINISI.** Dua sistem persamaan yang menggunakan peubah-peubah yang sama dikatakan **ekivalen** jika kedua sistem itu memiliki himpunan penyelesaian yang sama.

Jelaslah, jika kita mengubah urutan penulisan dua persamaan dari satu sistem, maka ini tidak berpengaruh pada himpunan penyelesaian. Sistem yang telah mengalami perubahan urutan akan ekivalen dengan sistem permulaan. Sebagai contoh, kedua sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 6 \end{array} \qquad \text{dan} \qquad \begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}$$

kedua-duanya terdiri dari tiga persamaan yang sama dan sebagai akibatnya, kedua sistem persamaan ini harus memiliki himpunan penyelesaian yang sama.

Jika salah satu persamaan dari sistem dikalikan dengan suatu bilangan real bukan nol, maka hal ini tidak berpengaruh pada himpunan penyelesaian dan sistem yang baru akan ekivalen dengan sistem permulaan. Sebagai contoh, kedua sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \text{dan} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

adalah ekivalen.

Jika kelipatan dari satu persamaan ditambahkan pada persamaan yang lain, maka sistem yang baru akan ekivalen dengan sistem permulaan. Ini disebabkan karena tupel-n $(x_1, \ldots, x_n)$ akan memenuhi kedua persamaan

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned}$$

jika dan hanya jika $(x_1, \ldots, x)$ memenuhi persamaan-persamaan

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_1$$
$$(a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + \ldots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n = b_j + \alpha b_i$$

Sebagai ikhtisar, terdapat tiga operasi yang dapat digunakan pada suatu sistem untuk memperoleh sistem yang ekivalen, yaitu:

I. Urutan penulisan dua persamaan dapat dipertukarkan.
II. Kedua ruas dari suatu persamaan dapat dikalikan dengan bilangan real bukan nol yang sama.
III. Kelipatan dari satu persamaan dapat dijumlahkan pada persamaan yang lain.

Jika diberikan satu sistem persamaan, kita dapat menggunakan operasi-operasi di atas untuk memperoleh sistem ekivalen yang lebih mudah untuk diselesaikan.

SISTEM $n \times n$

Marilah kita membatasi diri pada sistem $n \times n$ untuk bagian selebihnya dari subbab ini. Kita akan menunjukkan bahwa jika sistem $n \times n$ memiliki tepat satu penyelesaian, maka operasi-operasi I dan III dapat digunakan untuk memperoleh "sistem segitiga" yang ekivalen.

➢ DEFINISI. Suatu sistem dikatakan memiliki **bentuk segitiga** jika koefisien-koefisien dari k-1 peubah yang pertama dalam persamaan ke-k semuanya nol dan koefisien dari x_k adalah bukan nol ($k = 1, \ldots, n$).

CONTOH 1. Sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

memiliki bentuk segitiga, karena koefisien-koefisien dalam persamaan kedua masing-masing adalah 0, 1, −1, dan koefisien-koefisien dalam persamaan ketiga masing-masing adalah 0, 0, 2. Karena berbentuk segitiga, sistem ini mudah untuk diselesaikan. Dari persamaan ketiga diperoleh bahwa $x_3 = 2$. Dengan menggunakan nilai ini dalam persamaan kedua, maka kita peroleh:

$$x_2 - 2 = 2 \quad \text{atau} \quad x_2 = 4$$

Dengan menggunakan $x_2 = 4$, $x_3 = 2$ dalam persamaan pertama, kita akhiri dengan

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 4 + 2 &= 1 \\ x_1 &= -3 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian dari sistem di atas adalah (-3, 4, 2). ■

Sembarang sistem segitiga $n \times n$ dapat diselesaikan dengan cara yang sama seperti dalam contoh terakhir. Pertama, persamaan ke-n diselesaikan untuk mendapatkan nilai x_n. Nilai ini digunakan dalam persamaan ke n-1 untuk mendapatkan nilai x_{n-1}. Nilai-nilai x_n dan x_{n-1} digunakan dalam persamaan ke n-2 untuk mendapatkan nilai x_{n-2}, dan seterusnya. Kita akan menyebut metode ini yang menyelesaikan sistem segitiga sebagai *substitusi balik* (*back-substitution*).

CONTOH 2. Selesaikan sistem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN. Dengan menggunakan substitusi balik, kita peroleh:

$$\begin{aligned} 4x_4 &= 4 & x_4 &= 1 \\ 4x_3 + 3 \cdot 1 &= 3 & x_3 &= 0 \\ x_2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 &= 2 & x_2 &= -1 \\ 2x_1 - (-1) + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= 1 & x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $(1, -1, 0, 1)$. ◗

Jika suatu sistem persamaan tidak berbentuk segitiga, maka kita gunakan operasi-operasi I dan III untuk mencoba memperoleh sistem yang ekivalen yang berbentuk segitiga.

CONTOH 3. Selesaikan sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN. Mengurangkan 3 kali baris pertama dari baris kedua akan menghasilkan:

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

Mengurangkan 2 kali baris pertama dari baris ketiga akan menghasilkan:

$$-x_2 - x_3 = -2$$

Jika persamaan kedua dan ketiga dari sistem permulaan masing-masing diganti oleh persamaan-persamaan baru ini, maka kita peroleh sistem yang ekivalen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -7x_2 - 6x_3 &= -10 \\ -x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Jika persamaan ketiga dari sistem ini diganti oleh jumlah dari persamaan ketiga dan $-\frac{1}{7}$ kali persamaan kedua, maka kita akan memperoleh sistem segitiga

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -7x_2 - 6x_3 &= -10 \\ -\tfrac{1}{7}x_3 &= -\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan substitusi balik, kita peroleh:

$$x_3 = 4, \qquad x_2 = -2, \qquad x_1 = 3$$ ◗

Marilah kita melihat kembali sistem persamaan dalam contoh terakhir. Kita dapat mengasosiasikan sistem itu dengan suatu jajaran bilangan-bilangan dengan orde 3×3 yang entri-entrinya adalah koefisien-koefisien dari x_i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Kita menyebut jajaran ini sebagai *matriks koefisien* dari sistem yang bersangkutan. Istilah *matriks* artinya taklain adalah jajaran persegi panjang dari bilangan-bilangan. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom dikatakan berorde $m \times n$.

Jika kita menyisipkan pada matriks koefisien tersebut suatu kolom tambahan yang entri-entrinya adalah bilangan-bilangan di ruas kanan dari sistem, maka kita peroleh matriks baru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Kita menyebut matriks baru ini sebagai *matriks yang diperbesar* (*augmented matrix*). Pada umumnya, jika suatu matriks B yang berorde $m \times r$ disisipkan pada matriks A yang berorde $m \times n$ dengan cara demikian maka matriks yang diperbesarnya dituliskan sebagai $(A|B)$. Jadi jika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

maka

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right)$$

Untuk setiap sistem persamaan kita dapat mengasosiasikannya dengan matriks yang diperbesar berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sistem yang bersangkutan dapat diselesaikan dengan melakukan operasi-operasi pada matriks yang diperbesar. Semua x_i adalah peubah yang dapat dihilangkan sampai perhitungan selesai. Ketiga operasi yang digunakan untuk memperoleh sistem ekivalen berhubungan dengan operasi-operasi baris berikut yang dapat diterapkan pada matriks yang diperbesar.

Operasi Baris Elementer

I. Pertukarkan dua baris.

II. Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol.

III. Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain.

Kembali ke contoh di atas, kita lihat bahwa baris pertama digunakan untuk mengeliminasi elemen-elemen di kolom pertama dari baris kedua dan ketiga. Kita sebut baris pertama sebagai *baris poros* (*pivotal row*) dan entri 1 yang dilingkari di baris pertama sebagai *poros*.

$$\begin{array}{r} \text{poros} \rightarrow \\ \text{elemen-elemen yang} \\ \text{akan dieliminasi} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & -1 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris poros} \\ \\ \\ \end{array}$$

Dengan menggunakan operasi baris III, 3 kali baris pertama dikurangkan dari baris kedua dan 2 kali baris pertama dikurangkan dari baris ketiga. Jika hal ini dilakukan, kita akan memperoleh matriks:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{baris poros} \end{array}$$

Pada tahap ini kita pilih baris kedua sebagai baris poros yang baru dan lakukan operasi baris III untuk mengeliminasi elemen terakhir di kolom kedua. Kita akan memperoleh matriks

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{array}\right)$$

Ini adalah matriks yang diperbesar untuk sistem segitiga, yang ekivalen dengan sistem permulaan.

CONTOH 4. Selesaikan sistem

$$\begin{array}{rrrrl} & -\ x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 & = 0 \\ x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & = 6 \\ 2x_1 & +\ 4x_2 & +\ x_3 & -\ 2x_4 & = -1 \\ 3x_1 & +\ x_2 & -\ 2x_3 & +\ 2x_4 & = 3 \end{array}$$

PENYELESAIAN. Matriks yang diperbesar untuk sistem ini adalah

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Karena kita tidak mungkin mengeliminasi sembarang entri dengan menggunakan 0 sebagai elemen poros, maka kita gunakan operasi baris I untuk mempertukarkan kedua baris yang pertama dari matriks yang diperbesar. Baris pertama yang baru akan menjadi baris poros dan elemen poros akan menjadi 1.

$$\begin{array}{r} \text{poros} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 4 & 1 & -2 & -1 \\ \boxed{3} & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris poros} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Operasi baris III kemudian digunakan dua kali untuk mengeliminasi kedua entri bukan nol di kolom pertama.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -4 & -13 \\ 0 & \boxed{-2} & -5 & -1 & -15 \end{array}\right)$$

Selanjutnya, baris kedua digunakan sebagai baris poros untuk mengeliminasi entri-entri di kolom kedua di bawah elemen poros -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Akhirnya, baris ketiga digunakan sebagai baris poros untuk mengeliminasi elemen terakhir di kolom ketiga.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Matriks yang diperbesar ini menyatakan suatu sistem segitiga. Penyelesaian dengan substitusi balik akhirnya kita peroleh penyelesaian $(2, -1, 3, 2)$. ◗

Pada umumnya, jika sistem linear $n \times n$ dapat direduksi menjadi bentuk segitiga, maka sistem linear permulaan akan memiliki penyelesaian tunggal yang dapat diperoleh dengan melakukan substitusi balik pada sistem segitiga yang diperoleh. Kita dapat menganggap proses reduksi ini sebagai suatu algoritma yang terdiri dari $n - 1$ langkah. Pada langkah pertama, elemen poros dipilih dari entri-entri bukan nol di kolom pertama dari matriks. Baris yang mengandung elemen poros disebut *baris poros (pivotal row)*. Kita pertukarkan baris-baris (jika diperlukan) sehingga baris poros menjadi baris pertama yang baru. Kemudian kelipatan dari baris poros dikurangkan dari setiap $n - 1$ baris selebihnya sehingga diperoleh 0 di posisi-posisi $(2,1), \ldots, (n,1)$. Pada langkah kedua, elemen poros dipilih dari entri-entri bukan nol di kolom 2, baris 2 sampai baris n dari matriks. Kemudian baris yang mengandung poros dipertukarkan dengan baris kedua dari matriks dan digunakan sebagai baris poros yang baru. Kemudian kelipatan dari baris poros dikurangkan dari $n - 2$ baris sisanya sehingga mengeliminasi semua entri di bawah poros di kolom kedua. Prosedur yang sama diulangi untuk kolom-kolom 3 sampai $n - 1$. Perlu diperhatikan bahwa pada langkah kedua baris 1 dan kolom 1 tetap tidak berubah, pada langkah ketiga kedua baris yang pertama dan kedua kolom yang pertama tetap tidak berubah, dan seterusnya. Pada setiap langkah, dimensi keseluruhan dari sistem secara efektif dikurangi satu (lihat Gambar 1.1.2).

Jika proses eliminasi dapat dilakukan seperti yang diuraikan di atas, kita akan sampai pada suatu sistem segitiga yang ekivalen sesudah $n - 1$ langkah. Akan tetapi, prosedur seperti yang diuraikan di atas akan gagal jika, pada sembarang langkah, semua pilihan yang mungkin untuk elemen poros sama dengan 0. Jika hal ini terjadi alternatifnya adalah mereduksi sistem yang bersangkutan menjadi bentuk eselon atau tangga khusus tertentu. Bentuk-bentuk eselon demikian akan dipelajari dalam subbab berikutnya. Bentuk-bentuk ini juga akan digunakan untuk sistem $m \times n$, di mana $m \neq n$.

GAMBAR 1. 1. 2

$n = 4$

Langkah 1 $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right)$

Langkah 2 $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right)$

Langkah 3 $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right)$

LATIHAN

1. Gunakan substitusi balik untuk menyelesaikan masing-masing sistem persamaan berikut.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 4x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

2. Tuliskan matriks koefisien untuk setiap sistem dalam Latihan 1.

3. Dalam setiap sistem berikut, tafsirkan setiap persamaan sebagai garis dalam bidang. Untuk setiap sistem, gambarkan grafik garis-garis yang bersangkutan dan tentukan secara geometris banyaknya penyelesaian.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -4x_1 + 2x_2 &= -6 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$

4. Tuliskan matriks yang diperbesar untuk setiap sistem dalam Latihan 3.
5. Tuliskan sistem-sistem persamaan yang berkorespondensi dengan setiap matriks yang diperbesar berikut.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right)$

6. Selesaikan setiap sistem berikut

(a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 8 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \tfrac{2}{3}x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned}$

(f) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + -x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 = \tfrac{12}{5}x_3 &= \tfrac{1}{10} \end{aligned}$

(h) $\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$

7. Kedua sistem

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

memiliki matriks koefisien yang sama tetapi ruas kanan yang berbeda. Selesaikan kedua sistem secara bersama dengan cara mengeliminasi entri (2,1) dari matriks yang diperbesar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

dan kemudian melakukan substitusi balik untuk setiap kolom dari ruas kanan.

8. Selesaikan kedua sistem

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$

dengan cara melakukan eliminasi pada matriks yang diperbesar berorde 3×5 dan kemudian melakukan dua substitusi balik.

9. Diberikan suatu sistem berbentuk

$$\begin{aligned} -m_1x_1 + x_2 &= b_1 \\ -m_2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

di mana m_1, m_2, b_1 dan b_2 adalah konstanta-konstanta.

(a) Perlihatkan bahwa sistem ini akan memiliki penyelesaian tunggal jika $m_1 \neq m_2$.

(b) Jika $m_1 = m_2$, perlihatkan bahwa sistem ini akan konsisten hanya jika $b_1 = b_2$.

(c) Berikan interpretasi geometris untuk bagian (a) dan (b).

10. Tinjau sistem berbentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

di mana a_{11}, a_{12}, a_{21} dan a_{22} adalah konstanta-konstanta. Terangkan mengapa sistem berbentuk demikian harus konsisten.

11. Berikan interpretasi geometris dari suatu persamaan linear dengan tiga bilangan tak diketahui. Berikan gambaran geometris untuk himpunan penyelesaian yang mungkin bagi suatu sistem linear berorde 3×3.

2 BENTUK ESELON BARIS

Dalam Subbab 1 kita telah mempelajari metode untuk mereduksi suatu sistem linear $n \times n$ menjadi bentuk segitiga. Akan tetapi, metode ini akan menemui kegagalan jika pada sembarang tahap dalam proses reduksi semua pilihan yang mungkin untuk elemen poros di kolom tertentu adalah 0.

CONTOH 1. Tinjau sistem yang dinyatakan oleh matriks yang diperbesar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris poros} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Jika operasi baris **III** digunakan untuk mengeliminasi keempat elemen terakhir dalam kolom pertama, maka matriks yang dihasilkan adalah

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{baris poros} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Pada tahap ini reduksi menjadi bentuk segitiga menemui jalan buntu. Semua keempat pilihan yang mungkin untuk elemen poros dalam kolom kedua adalah 0. Lalu bagaimana kita meneruskan dari sini? Karena sasaran kita adalah menyederhanakan sistem sesederhana mungkin, tampaknya wajar untuk berpindah ke kolom ketiga dan mengeliminasi ketiga entri yang terakhir.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dalam kolom keempat semua pilihan untuk elemen poros adalah 0; jadi sekali lagi kita berpindah ke kolom berikutnya. Jika kita menggunakan baris ketiga sebagai baris poros, maka kedua entri terakhir dalam kolom kelima dieliminasi.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Persamaan-persamaan yang dinyatakan oleh kedua baris terakhir adalah

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -3 \end{aligned}$$

Karena tidak terdapat tupel-5 yang mungkin memenuhi persamaan-persamaan ini, maka sistem di atas tidak konsisten. Perlu dicatat bahwa matriks koefisien terakhir tidak memiliki bentuk segitiga; matriks koefisien tersebut memiliki bentuk tangga atau eselon. ▮

Misalkan sekarang kita mengubah ruas kanan dari sistem di contoh terakhir sehingga diperoleh suatu sistem yang konsisten. Sebagai contoh, jika kita mulai dengan

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

maka proses reduksi akan menghasilkan matriks yang diperbesar

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kedua persamaan terakhir dari sistem yang tereduksi ini akan dipenuhi untuk sembarang tupel-5 Jadi himpunan penyelesaiannya adalah himpunan semua tupel-5 yang memenuhi ketiga persamaan yang pertama.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

Peubah-peubah yang berkorespondensi dengan elemen-elemen bukan nol pertama di setiap baris dari matriks yang diperbesar akan disebut sebagai *peubah-peubah utama* (*lead variables*). Jadi x_1, x_3 dan x_5 adalah peubah-peubah utama. Peubah-peubah selebihnya yang berkorespondensi dengan kolom-kolom yang diloncati dalam proses reduksi akan disebut sebagai *peubah-peubah bebas* (*free variables*). Jadi x_2 dan x_4 adalah peubah-peubah bebas. Jika kita memindahkan peubah-peubah bebasnya ke ruas kanan dalam (1), maka kita peroleh sistem

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_5 &= 1 - x_2 - x_4 \\
x_3 + 2x_5 &= -x_4 \\
x_5 &= 3
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Sistem (2) berbentuk segitiga dengan bilangan-bilangan tak diketahui x_1, x_3, x_5. Jadi untuk setiap pasang nilai yang diberikan untuk x_2 dan x_4, akan terdapat penyelesaian tunggal. Sebagai contoh, jika $x_2 = x_4 = 0$, maka $x_5 = 3$, $x_3 = -6$, $x_1 = 4$ sehingga (4, 0, −6, 0, 3) adalah penyelesaian sistem di atas.

➤ **DEFINISI.** Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika

(i) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1.

(ii) Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol di bagian muka pada baris $k+1$ lebih besar dari banyaknya entri nol di bagian muka pada baris k.

(iii) Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.

CONTOH 2. Matriks-matriks berikut memiliki bentuk eselon baris.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$ ▸

CONTOH 3. Matriks-matriks berikut tidak memiliki bentuk eselon baris.

$$
\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Matriks pertama tidak memenuhi syarat (i). Matriks kedua gagal memenuhi syarat (iii), dan matriks ketiga gagal memenuhi syarat (ii) ▸

➤ **DEFINISI.** Proses menggunakan operasi-operasi baris I, II dan III untuk mengubah suatu sistem linear menjadi sistem yang matriks diperbesarnya dalam bentuk eselon baris disebut eliminasi Gauss (Gaussian elimination)

Perlu diperhatikan bahwa operasi baris II diperlukan agar dapat mengalihkan baris-baris yang bersangkutan sehingga koefisien bukan nol pertama semuanya adalah 1. Jika bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar mengandung baris berbentuk

$$(0 \quad 0 \; \ldots\ldots \; 0 \,|\, 1)$$

maka sistem yang bersangkutan takkonsisten. Sebaliknya, sistem tersebut akan konsisten. Jika sistemnya konsisten dan baris-baris bukan nol dari eselon baris dari matriks membentuk suatu sistem segitiga, maka sistem tersebut akan memiliki penyelesaian tunggal.

Sistim Kelebihan Persamaan (Overdetermined Systems)

Suatu sistem linear disebut *Sistem Kelebihan Persamaan* (*overdetermined*) jika terdapat lebih banyak persamaan daripada peubah. Sistem Kelebihan Persamaan biasanya (tetapi tidak selalu) takkonsisten.

CONTOH 4.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

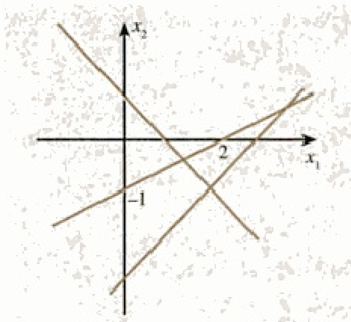
PENYELESAIAN. Sampai di sini pembaca seharusnya sudah cukup mengenal proses eliminasi, sehingga kita tidak perlu menuliskan langkah-langkahnya dalam mereduksi masing-masing sistem ini.

Sistem (a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Baris terakhir dari matriks yang sudah direduksi ini menunjukkan bahwa sistem adalah tak-konsisten. Ketiga persamaan dalam sistem (a) menyatakan garis dalam bidang. Kedua garis yang pertama berpotongan pada titik (2, –1). Akan tetapi, persamaan ketiga tidak melalui titik ini. Jadi tidak terdapat titik yang terletak pada ketiga garis tersebut. (lihat Gambar 1.2.1).

GAMBAR 1.2.1



Sistem (b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan menggunakan substitusi balik, kita lihat bahwa sistem **(b)** memiliki tepat satu penyelesaian (0,1 , –0,3 , 1,5). Penyelesaiannya adalah tunggal karena baris-baris bukan nol dari matriks yang tereduksi membentuk sistem segitiga.

Sistem (c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 3 & 3 & | & 4 \\ 3 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan x_2 dan x_1 yang dinyatakan dalam x_3, maka kita peroleh

$$x_2 = -0{,}2x_3$$
$$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 0{,}6x_3$$

Dari sini terlihat bahwa himpunan penyelesaiannya adalah himpunan semua tripel terurut berbentuk $(1 - 0{,}6\alpha, -0{,}2\alpha, \alpha)$ di mana α adalah bilangan real. Sistem ini konsisten dan memiliki takhingga banyaknya penyelesaian karena x_1 dan x_2 dinyatakan oleh peubah bebas x^3. ▮

SISTEM KEKURANGAN PERSAMAAN (UNDERDETERMINED SYSTEMS)

Suatu sistem dengan m persamaan linear dan n peubah dikatakan *sistem kekurangan persamaan* (*underdetermined*) jika terdapat jumlah persamaan yang lebih sedikit daripada peubah ($m < n$). Meskipun sistem-sistem kekurangan persamaan mungkin takkonsisten, sistem-sistem ini biasanya konsisten dengan takhingga banyaknya penyelesaian. Adalah tidak mungkin bagi sistem kekurangan persamaan untuk hanya memiliki satu penyelesaian. Alasannya adalah bahwa sembarang bentuk eselon baris dari matriks koefisien yang bersangkutan akan memiliki $r \leq m$ baris bukan nol. Jadi akan terdapat r peubah utama dan $n - r$ peubah bebas, di mana $n - r \geq n - m > 0$. Jika sistemnya konsisten, kita dapat memberi peubah-peubah bebasnya dengan nilai-nilai sembarang dan kemudian menyelesaikan peubah-peubah utamanya. Oleh karena itu, suatu sistem kekurangan persamaan yang konsisten akan memiliki takhingga banyaknya penyelesaian.

CONTOH 5.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN.

Sistem (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & 4 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Jelas bahwa sistem **(a)** takkonsisten. Kita dapat menganggap kedua persamaan dalam sistem **(a)** menyatakan bidang-bidang datar dalam ruang berdimensi 3. Biasanya, dua bidang datar berpotongan pada satu garis lurus; akan tetapi, dalam kasus ini bidang-bidang datar tersebut sejajar.

Sistem (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Sistem (b) adalah konsisten, dan karena terdapat dua peubah bebas, maka sistem tersebut akan memiliki takhingga banyaknya penyelesaian. Sering kali jika kita bekerja dengan sistem-sistem seperti ini adalah lebih mudah untuk melanjutkan proses eliminasi sampai semua unsur diatas masing-masing 1 utama dihapuskan. Jadi untuk sistem (b) kita akan melanjutkan untuk mengeliminasi kedua entri pertama dalam kolom kelima dan kemudian elemen pertama dalam kolom keempat.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Jika kita memindahkan peubah-peubah bebasnya ke ruas kanan, maka sebagai akibatnya

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Jadi, untuk sembarang bilangan real α dan β, vektor tupel-5

$$(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta, 2, -1)$$

adalah penyelesaian dari sistem di atas.

Dalam kasus di mana bentuk eselon baris dari suatu sistem konsisten memiliki peubah-peubah bebas adalah baik sekali untuk melanjutkan proses pengeliminasi sampai semua entri di atas masing-masing 1 utama telah dieliminasi seperti dalam sistem (b) dari contoh sebelumnya. Matriks tereduksi yang dihasilkan dikatakan berada dalam *bentuk eselon baris tereduksi (reduced row echelon form).*

BENTUK ESELON BARIS TEREDUKSI

➤ DEFINISI. Suatu matriks dikatakan memiliki *bentuk eselon baris tereduksi* jika:
(i) Matriks memiliki bentuk eselon baris.
(ii) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya entri bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Matriks-matriks berikut memiliki bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proses menggunakan operasi-operasi baris elementer untuk mengubah suatu matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi disebut *reduksi Gauss-Jordan (Gauss-Jordan reduction).*

CONTOH 6. Gunakan reduksi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{2} & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{bentuk eselon baris}$$

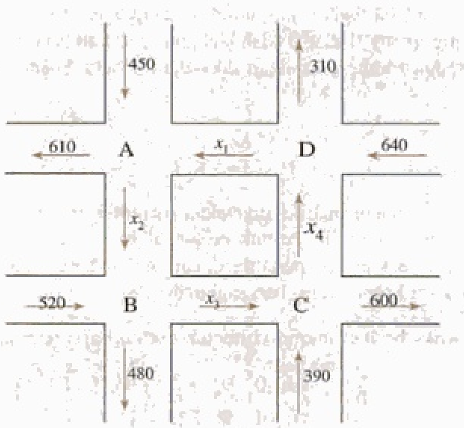
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{bentuk eselon baris tereduksi}$$

Jika kita menetapkan x_4 sama dengan sembarang bilangan real α, maka $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, dan $x_3 = \alpha$. Jadi semua tupel-4 terurut yang berbentuk $(\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$ adalah penyelesaian sistem di atas. ◗

APLIKASI 1: ARUS LALU-LINTAS

Di bagian kota yang ramai dari satu kota tertentu, dua kelompok jalan satu-arah berpotongan seperti diperlihatkan dalam Gambar 1.2.2. Rata-rata jam dari volume lalu-lintas yang memasuki dan meninggalkan bagian ini selama jam sibuk diberikan dalam gambar.

GAMBAR 1.2.2



Tentukan banyaknya lalu lintas antara pada setiap perempatan

PENYELESAIAN. Pada setiap perempatan banyaknya mobil yang masuk harus sama dengan banyaknya yang keluar. Sebagai contoh, pada perempatan A, banyaknya mobil yang masuk adalah $x_1 + 450$ dan banyaknya yang keluar adalah $x_2 + 610$. Jadi

$$x_1 + 450 = x_2 + 610 \qquad \text{(perempatan A)}$$

Dengan cara yang serupa,

$$x_2 + 520 = x_3 = 480 \qquad \text{(perempatan B)}$$
$$x_3 + 390 = x_4 + 600 \qquad \text{(perempatan C)}$$
$$x_4 + 640 = x_1 + 310 \qquad \text{(perempatan D)}$$

Matriks yang diperbesar untuk sistem ini adalah

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array}\right)$$

Bentuk eselon baris tereduksi untuk matriks ini adalah

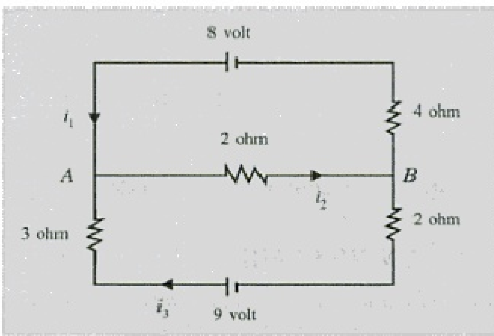
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistem ini adalah konsisten dan karena terdapat satu peubah bebas, maka terdapat banyak penyelesaian yang mungkin. Diagram arus lalu-lintas di atas tidak memberi informasi yang cukup untuk menentukan x_1, x_2, x_3, x_4 secara tunggal. Jika banyaknya lalu-lintas diketahui antara setiap pasang perempatan, maka banyaknya lalu-lintas di jalan raya selebihnya dengan mudah dapat dihitung. Sebagai contoh, jika banyaknya lalu-lintas antara perempatan C dan D memiliki rata-rata 200 mobil per jam, maka $x_4 = 200$. Kita kemudian dapat menyelesaikan x_1, x_2, x_3 dinyatakan dalam x_4.

$$x_1 = x_4 + 330 = 530$$
$$x_2 = x_4 + 170 = 370$$
$$x_3 = x_4 + 210 = 410$$

APLIKASI 2: JARINGAN LISTRIK

Dalam suatu jaringan listrik kita mungkin menentukan besar arus di setiap cabang yang dinyatakan dalam resistansi dan tegangan. Satu contoh rangkaian khusus diberikan dalam Gambar 1.2.3.



GAMBAR 1.2.3

Simbol-simbol dalam gambar ini mempunyai arti sebagai berikut:

Kawat yang dialiri arus listrik
Sumber listrik
Resistor

Sumber listrik biasanya adalah baterai (diukur dalam volt) yang menggerakkan muatan dan menghasilkan arus. Arus ini akan mengalir ke luar dari terminal baterai yang digambarkan oleh garis vertikal yang lebih panjang. Resistansi diukur dalam ohm. Kode huruf menyatakan simpul (node) dan i menyatakan arus antara simpul. Arus-arus diukur dalam ampere. Tanda panah menunjukkan arah dari arus. Akan tetapi jika salah satu arus, misalkan i_2, ternyata menjadi negatif, ini berarti bahwa arus sepanjang cabang itu berlawanan arah dengan tanda panah.

Untuk menentukan kuat arus, digunakan *hukum-hukum Kirchhoff* (*Kirchhoff's laws*):

1. Pada setiap simpul jumlah dari kuat arus yang masuk sama dengan jumlah dari kuat arus yang ke luar.
2. Di sekeliling setiap simpul (*loop*) tertutup jumlah aljabar dari tegangan harus sama dengan jumlah aljabar penurunan tegangan.

Penurunan tegangan E untuk setiap tahanan diberikan oleh *hukum Ohm* (*ohm's law*):

$$E = i\,R$$

di mana i menyatakan arus dalam ampere dan R adalah resistansi dalam ohm.

Marilah kita mencari arus-arus dalam jaringan yang dilukiskan dalam Gambar 1.2.3. Dari hukum pertama, kita peroleh

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0 \qquad &\text{(simpul } A\text{)} \\ -i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \qquad &\text{(simpul } B\text{)} \end{aligned}$$

Berdasarkan hukum kedua,

$$\begin{aligned} 4i_1 + 2i_2 &= 8 \qquad &\text{(simpul atas)} \\ 2i_2 + 5i_3 &= 9 \qquad &\text{(simpul bawah)} \end{aligned}$$

Jaringan tersebut dapat dinyatakan oleh matriks yang diperbesar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

Matriks ini dengan mudah dapat direduksikan menjadi bentuk eselon baris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Penyelesaian dengan substitusi balik akan menghasilkan $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, dan $i_3 = 1$.

SISTEM-SISTEM HOMOGEN

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* (*homogeneous*) jika konstanta-konstanta di ruas kanan semuanya nol. Sistem-sistem homogen selalu konsisten. Adalah hal mudah untuk mencari penyelesaian; tetapkan saja semua peubah-peubahnya sama dengan nol. Jadi, jika suatu sistem homogen $m \times n$ memiliki penyelesaian tunggal, maka penyelesaian ini haruslah penyelesaian trivial $(0, 0, \ldots, 0)$. Sistem homogen dalam contoh 6 terdiri dari $m = 3$ persamaan dengan $n = 4$ peubah. Dalam kasus di mana $n > m$, akan selalu terdapat peubah-peubah bebas, dan sebagai akibatnya juga terdapat penyelesaian taktrivial tambahan. Hasil ini pada dasarnya telah dibuktikan dalam diskusi kita mengenai sistem kekurangan persamaan, tetapi karena pentingnya hasil ini, kami nyatakan sebagai sebuah teorema.

➤ **TEOREMA 1.2.1.** *Sistem persamaan linear homogen $m \times n$ memiliki penyelesaian taktrivial jika $n > m$.*

➤ **BUKTI.** Sistem homogen selalu konsisten. Bentuk eselon baris dari matriks yang bersangkutan memiliki paling banyak m baris bukan nol. Jadi terdapat paling banyak m peubah utama. Karena semuanya secara keseluruhan terdapat n peubah dan $n > m$, maka harus terdapat beberapa peubah bebas. Peubah-peubah bebas ini dapat diberi sembarang nilai. Untuk setiap pemberian nilai ke peubah-peubah bebas ini terdapat satu penyelesaian bagi sistem yang bersangkutan.

APLIKASI 3: PERSAMAAN-PERSAMAAN KIMIA

Dalam proses fotosintesis tumbuh-tumbuhan menggunakan energi terpancar dari sinar matahari untuk mengubah karbon dioksida (CO_2) dan air (H_2O) menjadi glukosa ($C_6H_{12}O_6$) dan oksigen (O_2).

Persamaan kimia dari reaksi ini berbentuk:

$$x_1CO_2 + x_2H_2O \rightarrow x_3O_2 + x_4C_6H_{12}O_6$$

Supaya persamaan menjadi seimbang maka kita harus memilih x_1, x_2, x_3 dan x_4 sehingga banyaknya atom-atom karbon, hidrogen dan oksigen adalah sama pada setiap ruas dari persamaan. Karena karbon dioksida mengandung satu atom karbon dan glukosa mengandung enam atom karbon maka untuk menyeimbangkan atom-atom karbon kita membutuhkan syarat bahwa:

$$x_1 = 6x_4$$

Dengan cara yang serupa untuk menyeimbangkan atom-atom oksigen dibutuhkan syarat:

$$2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4$$

dan akhirnya untuk menyeimbangkan atom-atom hidrogen dibutuhkan syarat

$$2x_2 = 12x_4$$

Jika kita memindahkan semua peubah-peubah ke ruas kiri dari ketiga persamaan ini maka kita peroleh sistem linear homogen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & - & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & - & 12x_4 & = & 0 \end{array}$$

Berdasarkan Teorema 1.2.1 sistem ini memiliki penyelesaian taktrivial. Untuk dapat menyeimbangkan persamaan kimia di atas kita harus mencari penyelesaian (x_1, x_2, x_3, x_4) yang entri-entrinya adalah bilangan bulat taknegatif. Jika kita menyelesaikan sistem ini dengan cara yang biasa maka kita lihat bahwa x_4 adalah peubah bebas dan

$$x_1 = x_2 = x_3 = 6x_4$$

Khususnya jika kita ambil $x_4 = 1$, maka $x_1 = x_2 = x_3 = 6$ sehingga persamaan berbentuk

$$6CO_2 + 6H_2O \rightarrow 6O_2 + C_6H_{12}O_6$$

APLIKASI 4: MODEL EKONOMI UNTUK PERTUKARAN BARANG

Misalkan di suatu masyarakat primitif anggota dari suatu suku ditawarkan tiga bidang pekerjaan : pertanian, membuat alat-alat dan perkakas, menenun dan menjahit pakaian. Anggaplah bahwa pada permulaan suku tersebut tidak memiliki sistem keuangan dan bahwa semua barang dan jasa dibarter. Marilah kita nyatakan ketiga kelompok ini dengan F, M dan C, dan misalkan bahwa grafik berarah dalam Gambar 1.2.4 menunjukkan bagaimana sistem barter ini bekerja.

Gambar 1.2.4 menunjukkan bahwa para petani tetap menahan setengah dari hasil buminya dan memberi seperempat dari hasil buminya kepada para pengusaha pabrik dan seperempat kepada penjahit pakaian. Para pengusaha pabrik membagi barang-barangnya secara merata kepada ketiga kelompok tersebut, masing-masing sepertiga ke setiap kelompok. Kelompok yang menghasilkan pakaian memberi setengah dari pakaian-pakaian tersebut kepada para petani dan membagi setengah bagian yang lain secara merata kepada para pengusaha pabrik dan mereka sendiri.

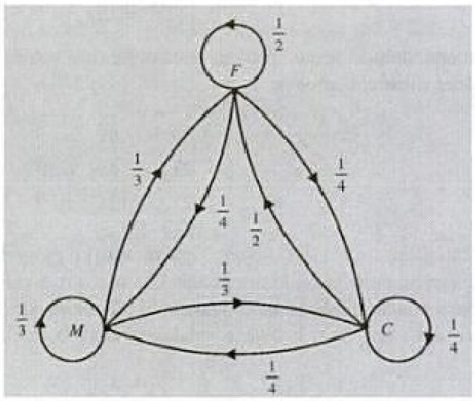
Hasilnya diringkaskan dalam tabel berikut:

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Kolom pertama dari tabel menunjukkan penyaluran hasil bumi yang dihasilkan oleh para petani, kolom kedua menunjukkan penyaluran dari barang-barang hasil produksi, dan kolom ketiga menunjukkan penyaluran pakaian.

Jika banyaknya anggota suku tersebut bertambah maka sistem barter menjadi sangat tidak praktis dan sebagai akibatnya suku tersebut memutuskan untuk mengadakan satu sistem keuangan untuk perdagangan. Untuk sistem ekonomi sederhana ini kita anggap bahwa tidak akan terjadi penimbunan modal atau hutang dan harga-harga untuk masing-masing dari ketiga tipe barang tersebut harus mencerminkan nilai dari sistem barter yang ada. Pertanyaannya adalah bagaimana memberi nilai-nilai pada ketiga tipe barang tersebut yang hampir mewakili sistem barter yang sedang berlaku.

GAMBAR 1.2.4



Masalahnya dapat diubah ke dalam suatu sistem persamaan linear menggunakan suatu model ekonomi yang mula-mula telah dikembangkan oleh seorang pemenang hadiah Nobel yaitu ekonom bernama Wassily Leontief. Untuk model ini kita misalkan x_1 adalah nilai keuangan dari hasil bumi yang dihasilkan oleh para petani, x_2 adalah nilai dari barang-barang yang dihasilkan pabrik, dan x_3 adalah nilai dari semua pakaian yang dihasilkan. Menurut baris pertama dari tabel, nilai dari barang-barang yang diterima para petani mencapai jumlah setengah dari nilai barang yang dihasilkan para petani ditambah sepertiga dari nilai barang-barang yang dihasilkan pabrik dan setengah dari nilai pakaian. Jadi nilai total barang-barang yang diterima oleh petani adalah $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Jika sistemnya adil, maka nilai total dari barang-barang yang diterima para petani harus sama dengan x_1 yaitu nilai total dari hasil bumi yang dihasilkan. Jadi kita peroleh persamaan linear:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1$$

Dengan menggunakan baris kedua dari tabel dan menyamakan nilai barang-barang yang dihasilkan dan yang diterima oleh pengusaha pabrik maka kita peroleh persamaan kedua:

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2$$

Akhirnya, dengan menggunakan baris ketiga dari tabel kita peroleh:

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_3$$

Persamaan-persamaan ini dapat ditulis kembali sebagai sistem homogen

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matriks eselon baris tereduksi untuk matriks yang diperbesar dari sistem ini adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalam matriks ini terdapat satu peubah bebas yaitu x_3. Dengan memberi harga $x_3 = 3$ maka kita peroleh penyelesaian (5, 3, 3) dan penyelesaian umumnya terdiri dari semua kelipatan dari (5, 3, 3). Akibatnya adalah bahwa peubah-peubah x_1, x_2, x_3 harus diberi nilai-nilai dengan perbandingan

$$x_1 : x_2 : x_3 = 5 : 3 : 3$$

Sistem sederhana ini adalah suatu contoh dari model masukan-keluaran Leontief yang tertutup. Model Leontief adalah dasar dari pengertian kita mengenai sistem ekonomi. Aplikasi modernnya dapat melibatkan beribu-ribu industri dan menghasilkan sistem-sistem linear yang sangat besar. Model Leontief akan dipelajari secara lebih terperinci nanti dalam buku ini (Bab 6, Subbab 7).

LATIHAN

1. Manakah dari matriks-matriks berikut yang berada dalam bentuk eselon baris? Manakah yang berada dalam bentuk eselon baris tereduksi?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **(h)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dalam masing-masing matriks berikut, matriks yang diperbesarnya memiliki bentuk eselon baris. Untuk setiap kasus nyatakan apakah sistem linear yang berkorespondensi dengannya konsisten atau tidak. Jika sistemnya memiliki penyelesaian tunggal, carilah penyelesaian tunggal ini.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ **(b)** $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **(d)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ **(f)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3. Dalam masing-masing matriks berikut, matriks yang diperbesarnya memiliki bentuk eselon baris tereduksi. Dalam setiap kasus carilah himpunan penyelesaian untuk sistem linear yang berkorespondensi dengannya.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ **(b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **(d)** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **(f)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

4. Untuk setiap sistem dalam Latihan 3 buatlah daftar dari peubah-peubah utama dan daftar kedua untuk peubah-peubah bebasnya.

5. Untuk setiap sistem persamaan berikut, gunakan eliminasi Gauss untuk memperoleh suatu sistem ekivalen yang matriks koefisiennya memiliki bentuk eselon baris. Nyatakan apakah sistem yang bersangkutan konsisten atau tidak. Jika sistemnya konsisten dan tidak melibatkan peubah-peubah bebas, gunakan substitusi balik untuk mencari penyelesaian tunggalnya. Jika sistemnya konsisten dan terdapat peubah-peubah bebas, transformasikanlah menjadi bentuk eselon baris tereduksi dan cari semua penyelesaiannya.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 9 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -4x_1 + 6x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 11x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -5x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(k)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x^2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 - 5x_2 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(l)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

6. Gunakan reduksi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan masing-masing sistem berikut

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Tinjau sistem linear yang matriks diperbesarnya berbentuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{pmatrix}$$

Untuk nilai berapa dari a sistem ini memiliki penyelesaian tunggal?

8. Tinjau sistem linear yang matriks diperbesarnya berbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & \beta & 3 \end{array}\right)$$

(a). Apakah mungkin bagi sistem ini takkonsisten? Terangkan.
(b). Untuk nilai berapa dari β sistem ini memiliki takberhingga banyaknya penyelesaian?

9. Tinjau sistem linear yang matriks diperbesarnya berbentuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right)$$

(a). Untuk nilai-nilai berapa dari a dan b sistem ini memiliki takhingga banyaknya penyelesaian?
(b). Untuk nilai-nilai berapa dari a dan b sistem ini takkonsisten?

10. Diberikan sistem-sistem linear

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 - 7x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 7x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Selesaikanlah kedua sistem ini dengan menggabungkan ruas-ruas kanannya menjadi suatu matriks B berorde 2×2 dan menghitung bentuk eselon baris tereduksi dari

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

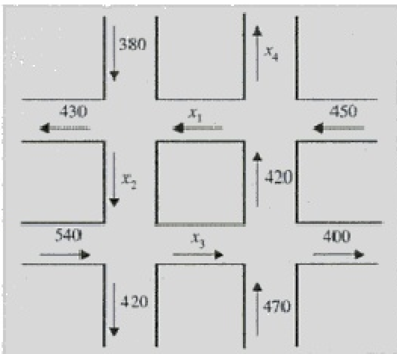
11. Diberikan sistem-sistem linear

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

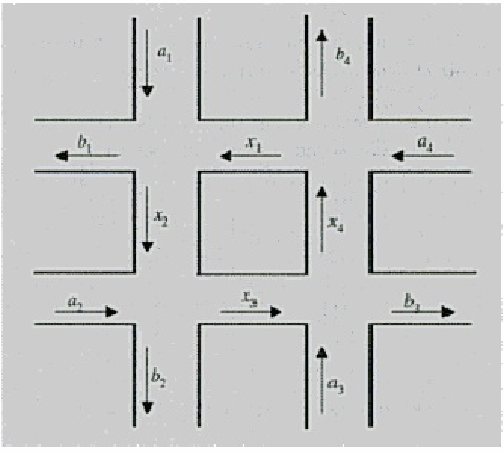
(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad &= -2 \end{aligned}$$

Selesaikanlah kedua sistem ini dengan menghitung bentuk eselon baris dari suatu matriks yang diperbesar $(A|B)$ dan melakukan dua kali substitusi balik.

12. Tentukan nilai-nilai x_1, x_2, x_3, x_4 untuk diagram arus lalu lintas berikut



13. Tinjau diagram arus lalu-lintas berikut di mana $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ adalah bilangan-bilangan bulat positif yang tetap.



Susunlah suatu sistem linear dalam peubah-peubah x_1, x_2, x_3, x_4 dan tunjukkan bahwa sistem yang terbentuk akan konsisten jika dan hanya jika :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai banyaknya mobil yang memasuki dan meninggalkan jaringan lalu-lintas di atas?

14. Misalkan (c_1, c_2) adalah penyelesaian dari sistem 2×2:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

Tunjukkan bahwa untuk sembarang bilangan real α, pasangan terurut $(\alpha c_1, \alpha c_2)$ adalah juga penyelesaian.

15. Dalam Aplikasi 3 penyelesaian (6, 6, 6, 1) diperoleh dengan memberi nilai peubah bebas $x_4 = 1$.

(a) Tentukan penyelesaiannya yang berkorespondensi dengan $x_4 = 0$. Informasi apa, jika ada, yang dapat diberikan dari penyelesaian ini tentang reaksi kimia yang bersangkutan? Apakah istilah penyelesaian trivial adalah cocok untuk kasus ini?

(b) Pilihlah nilai yang lain untuk x_4 seperti 2, 4 atau 5 dan tentukan penyelesaian-penyelesaian yang berkorespondensi dengannya. Bagaimana hubungan antara penyelesaian-penyelesaian taktrivial ini?

16 Cairan bensin mudah terbakar di atmosfir. Jika suatu benda dingin ditempatkan langsung di atas bensin maka air akan memadat pada benda itu dan suatu lapisan karbon juga akan terbentuk pada benda itu. Persamaan kimia untuk reaksi ini berbentuk

$$x_1\ C_6H_6 + x_2\ O_2 \rightarrow x_3\ C + x_4\ H_2O$$

Tentukan nilai-nilai dari x_1, x_2, x_3 dan x_4 untuk menyeimbangkan persamaan ini.

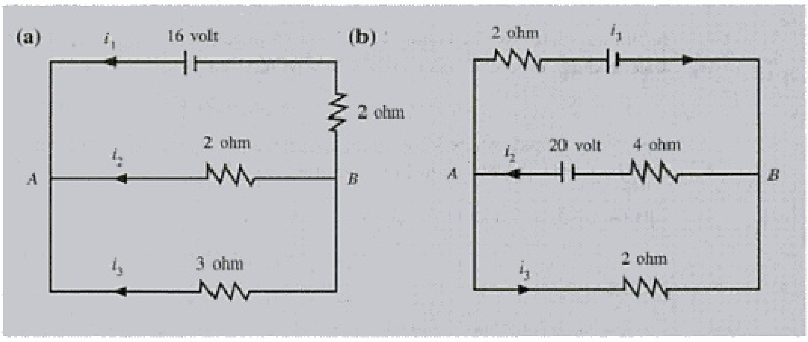
17. Asam nitrat dipersiapkan secara komersial dengan serentetan tiga reaksi kimia. Dalam reaksi pertama nitrogen N_2 dicampur dengan hidrogen H_2 sehingga terbentuk amonia

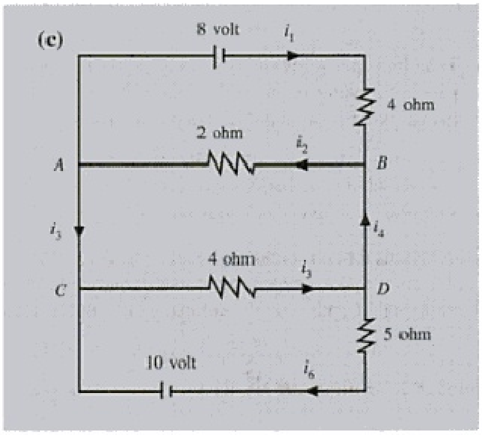
NH_3. Kemudian amonia dicampur dengan oksigen O_2 sehingga terbentuk nitrogen dioksida NO_2 dan air. Akhirnya NO_2 bereaksi dengan sebagian dari air yang terbentuk sehingga menjadi asam nitrat HNO_3 dan nitrogen oksida NO. Jumlah dari masing-masing komponen dari reaksi-reaksi ini diukur dalam mol (satuan baku dari pengukuran untuk reaksi-reaksi kimia). Berapa mol dari nitrogen, hidrogen dan oksigen diperlukan agar supaya dapat menghasilkan delapan mol asam nitrat?

18. Dalam Aplikasi 4 tentukan nilai-nilai relatif dari x_1, x_2 dan x_3, jika penyaluran barang-barang digambarkan seperti dalam tabel berikut:

	F	*M*	*C*
F	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

19. Tentukan kuat arus dari masing-masing arus untuk jaringan-jaringan berikut:





3 ALJABAR MATRIKS

Dalam subbab ini kita definisikan operasi-operasi aritmatika untuk matriks dan kita tinjau beberapa sifat-sifat aljabarnya. Matriks adalah salah satu metode yang sangat ampuh dalam matematika. Untuk dapat menggunakan matriks secara efektif, kita harus mahir dalam ilmu hitung matriks.

Entri-entri dari sebuah matriks disebut *skalar.* Entri-entri ini biasanya merupakan bilangan-bilangan real atau kompleks. Untuk sebagian besar pembahasan di bawah ini kita akan bekerja dengan matriks-matriks yang entri-entrinya adalah bilangan real. Di seluruh lima bab pertama dari buku ini pembaca dapat menganggap bahwa istilah skalar adalah suatu bilangan real. Akan tetapi, dalam Bab 6 akan terdapat beberapa pembahasan pada saat kita menggunakan himpunan bilangan kompleks untuk istilah skalarnya.

NOTASI MATRIKS

Jika kita ingin menuliskan matriks tanpa secara khusus menulis semua entri-entrinya, kita pergunakan huruf-huruf besar A, B, C, dan sebagainya. Pada umumnya, a_{ij} akan menyatakan entri matriks A yang berada pada baris i dan kolom j. Jadi jika A adalah matriks $m \times n$, maka

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kita sekali-sekali akan memendekkan ini menjadi $A = (a_{ij})$. Dengan cara yang serupa, matriks B dituliskan sebagai (b_{ij}), matriks C dituliskan (c_{ij}), dan seterusnya.

VEKTOR

Matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom menjadi perhatian khusus karena matriks tersebut digunakan untuk menyatakan penyelesaian dari sistem-sistem linear. Suatu penyelesaian dari sistem dengan m persamaan linear dalam n peubah adalah suatu tupel-n dari bilangan-bilangan real. Kita akan menyebut suatu tupel-n bilangan-bilangan real sebagai suatu *vektor.* Jika suatu tupel-n dinyatakan sebagai matriks $1 \times n$, maka kita menyebutnya sebagai suatu *vektor baris* (*row vector*). Sebaliknya, jika tupel-n dinyatakan oleh matriks $n \times 1$, maka kita menyebutnya sebagai suatu *vektor kolom* (*column vector*). Sebagai contoh penyelesaian dari sistem linear.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

dapat dinyatakan oleh vektor baris (2, 1) atau vektor kolom $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jika kita bekerja dengan persamaan-persamaan matriks, pada umumnya lebih tepat menyatakan penyelesaian-penyelesaiannya dalam vektor-vektor kolom (matriks-matriks $n \times 1$). Himpunan semua matriks-matriks $n \times 1$ dari bilangan-bilangan real disebut *ruang-n Euclidis* (*Euclidean n-space*) dan biasanya dituliskan dengan R^n. Karena untuk selanjutnya kita akan bekerja semata-mata hanya dengan vektor-vektor kolom, maka kita umumnya akan menghilangkan kata "kolom" dan menyebut elemen-elemen R^n sebagai *vektor-vektor* dan bukan sebagai vektor-vektor kolom.

Notasi baku untuk suatu vektor kolom adalah huruf kecil dengan cetakan tebal:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Jika diberikan suatu matriks A berorde $m \times n$, maka seringkali kita perlu menunjuk pada satu baris atau kolom tertentu. vektor baris ke-i dari A dinyatakan oleh $\mathbf{a}(i, :)$ dan vektor kolom ke-j dinyatakan oleh $\mathbf{a}(:, j)$. Karena kita terutama akan bekerja dengan vektor-vektor kolom, maka adalah baik sekali untuk memiliki notasi yang diperpendek untuk vektor kolom ke-j. Kita akan menggunakan notasi $\mathbf{a}_j$ daripada $\mathbf{a}(:, j)$. Referensi pada vektor-vektor baris adalah jauh lebih jarang, sehingga kita tidak akan menggunakan notasi yang diperpendek apapun juga untuk menyatakan vektor-vektor baris ini.

Jika A suatu matriks $m \times n$, maka vektor-vektor baris dari A diberikan oleh:

$$\mathbf{a}(i, :) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad i = 1, \ldots, m$$

dan vektor-vektor kolom diberikan oleh:

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}(:, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Matriks A dapat dinyatakan oleh vektor-vektor kolomnya maupun oleh vektor-vektor barisnya.

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \qquad \text{atau} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(1,:) \\ \mathbf{a}(2,:) \\ \vdots \\ \mathbf{a}(m,:) \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang serupa, jika B suatu matriks $n \times r$, maka $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r)$

Kesamaan.

Agar dua matriks menjadi sama maka kedua matriks ini harus memiliki orde yang sama dan entri-entrinya yang seletak harus sama.

➤ **DEFINISI.** Dua matriks A dan B yang masing-masing berorde $m \times n$ dikatakan **sama jika** $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Perkalian Skalar.

Jika A suatu matriks dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks yang terbentuk oleh perkalian masing-masing entri dari A dengan α.

➤ **DEFINISI.** Jika A suatu matriks $m \times n$ dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks $m \times n$ yang entri ke $i - j$ nya adalah αa_{ij}.

Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

maka

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad 3A = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

Penjumlahan Matriks.

Dua matriks dengan orde yang sama dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan entri-entri yang seletak.

➤ **DEFINISI.** Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ kedua-duanya adalah matriks $m \times n$, maka **jumlah** $A + B$ adalah matriks $m \times n$ yang entri ke-ij adalah $a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap pasang (i, j).

Sebagai contoh,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jika kita mendefinisikan $A - B$ sebagai $A + (-1)\,B$, maka ternyata bahwa $A - B$ didapat dari mengurangi entri pada B dari setiap entri pada A yang seletak. Jadi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-4 & 4-5 \\ 3-2 & 1-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jika 0 menyatakan matriks dengan orde yang sama dengan A yang semua entri-entrinya adalah 0, maka

$$A + O = O + A = A$$

Jadi, matriks nol bertindak sebagai identitas penjumlahan pada himpunan matriks-matriks $m \times n$. Selanjutnya, setiap matriks A berorde $m \times n$ memiliki invers penjumlahan. Memang benar bahwa,

$$A + (-1)A = O = (-1)A + A$$

Biasanya invers penjumlahan dituliskan sebagai $-A$. jadi

$$-A = (-1)A.$$

PERKALIAN MATRIKS DAN SISTEM LINEAR

Kita masih perlu mendefinisikan operasi yang paling penting, yaitu perkalian dua buah matriks. Sebagian besar dari motivasi di belakang definisi ini berasal dari aplikasi-aplikasi pada sistem-sistem persamaan linear. Jika kita mempunyai sistem dari satu persamaan linear dalam satu peubah, maka hal ini dapat ditulis dalam bentuk

(1) $$ax = b$$

Kita umumnya menganggap a, x dan b sebagai skalar-skalar; akan tetapi, a, x dan b ini dapat diperlakukan sebagai matriks-matriks 1×1. Tujuan kita sekarang adalah untuk mengeneralisasikan persamaan (1) sehingga kita dapat menuliskan suatu sistem linear $m \times n$ dengan satu persamaan matriks

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

di mana A adalah matriks $m \times n$, $\mathbf{x}$ dalam R^n, dan $\mathbf{b}$ dalam R^m. Pertama kali kita tinjau kasus satu persamaan dalam beberapa peubah.

KASUS 1. SATU PERSAMAAN DALAM BEBERAPA PEUBAH

Marilah kita awali dengan memperhatikan kasus satu persamaan dalam beberapa peubah. Sebagai contoh tinjaulah persamaan

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$$

Jika kita tetapkan

$$A = (3 \quad 2 \quad 5) \quad \text{dan} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dan mendefinisikan hasil kali $A\mathbf{x}$ dengan

$$A\mathbf{x} = (3 \quad 2 \quad 5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

maka persamaan $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$ dapat ditulis sebagai persamaan matriks

$$A\mathbf{x} = 4$$

Pada umumnya jika

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)$$

dan $\mathbf{x}$ suatu vektor kolom dengan n entri, maka hasil kali $A\mathbf{x}$ didefinisikan oleh

$$A\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

Sebagai contoh jika

$$A = (2 \quad 1 \quad -3 \quad 4) \quad \text{dan} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

maka

$$A\mathbf{x} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3$$

Perhatikan bahwa hasil kali dari perkalian satu vektor baris di sebelah kiri dengan satu vektor kolom di sebelah kanan adalah suatu skalar. Sebagai akibatnya tipe perkalian ini sering kali disebut sebagai *hasil kali skalar* (*scalar product*).

KASUS 2. *M* PERSAMAAN DALAM *N* PEUBAH

Sekarang tinjau suatu sistem linear $m \times n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

Sekarang diinginkan untuk menuliskan sistem ini dalam bentuk yang serupa dengan (1), yaitu sebagai persamaan matriks

$$A\mathbf{x} = b$$

di mana $A = (a_{ij})$ diketahui, **x** adalah matriks $n \times 1$ dari peubah-peubah, dan **b** suatu matriks $m \times 1$ yang mewakili ruas kanan dari sistem.
Jadi jika kita tetapkan

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

dan tetapkan hasil kali $A\mathbf{x}$ dengan

(4) $$\mathrm{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

maka sistem persamaan linear (2) adalah ekivalen dengan persamaan matriks (3).

Jika diberikan matriks A berorde $m \times n$ dan vektor x dalam R^n, kita dapat menghitung hasil kali Ax berdasarkan (4). Hasil kali Ax akan menjadi matriks berorde $m \times 1$, yaitu suatu vektor dalam R^m. Rumus untuk menentukan entri ke-i dari $A\mathbf{x}$ adalah

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

yang sama dengan $\mathbf{a}(i\,,:)\mathbf{x}$, yaitu hasil kali skalar dari vektor baris ke-i dari A dikalikan dengan vektor kolom x. Jadi

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(1,:)\mathbf{x} \\ \mathbf{a}(2,:)\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}(n,:)\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

CONTOH 1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 \end{pmatrix}$$ ▶

CONTOH 2.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3\,.\,2 & + & 1\,.\,4 \\ 2\,.\,2 & + & 5\,.\,4 \\ 4\,.\,2 & + & 2\,.\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix}$$ ▶

CONTOH 3. Tuliskan sistem persamaan berikut sebagai suatu persamaan matriks $A\mathbf{x} = b$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

APLIKASI 1.

Berat badan Bob adalah 178 pon. Dia ingin mengurangi berat badannya melalui satu rencana diet dan latihan fisik. Sesudah mencari keterangan dari Tabel 1 dia membuat jadwal latihan fisik seperti dalam Tabel 2. Berapa kalori yang akan terbakar dengan melakukan latihan fisik setiap hari jika dia mengikuti rencana ini?

Tabel 1

KALORI YANG TERBAKAR SETIAP JAM

	Berat dalam lb			
Aktivitas latihan	**152**	**161**	**170**	**178**
Jalan kaki 2 mil/jam	213	225	237	249
Lari 5,5 mil/jam	651	688	726	764
Bersepeda 5,5 mil/jam	304	321	338	356
Tenis (secukupnya)	420	441	468	492

Tabel 2

JUMLAH JAM PER HARI UNTUK SETIAP AKTIVITAS

	Jadwal latihan			
	Jalan	**Lari**	**Bersepeda**	**Tenis**
Senin	1,0	0,0	1,0	0,0
Selasa	0,0	0,0	0,0	2,0
Rabu	0,4	0,5	0,0	0,0
Kamis	0,0	0,0	0,5	2,0
Jumat	0,4	0,5	0,0	0,0

PENYELESAIAN. Informasi mengenai Bob berada dalam kolom keempat dari Tabel 1. Informasi ini dinyatakan oleh suatu vektor kolom x. Informasi dalam Tabel 2 dapat dinyatakan oleh suatu matriks A berorde 5×4. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita hitung saja $A\mathbf{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0.5 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 249 \\ 764 \\ 356 \\ 492 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 605,0 \\ 984,0 \\ 481,6 \\ 1162,0 \\ 481,6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Senin} \\ \textit{Selasa} \\ \textit{Rabu} \\ \textit{Kamis} \\ \textit{Jumat} \end{array}$$

Cara lain untuk menuliskan sistem linear (2) sebagai persamaan matriks adalah dengan menyatakan hasil kali $A\mathbf{x}$ sebagai jumlah dari vektor-vektor kolom

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

Sistem persamaan (2) dapat ditulis sebagai persamaan matriks berbentuk

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = b \tag{5}$$

CONTOH 4. Sistem linear

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

dapat ditulis sebagai persamaan matriks:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ ◗

➤ **DEFINISI.** Jika $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ adalah vektor-vektor dalam R^m dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar-skalar, maka jumlah berbentuk

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n$$

disebut suatu **kombinasi linear** (*linear combination*) dari vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

CONTOH 5. Jika kita pilih $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ dalam contoh 4, maka:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ adalah suatu kombinasi linear dari ketiga vektor kolom dari matriks koefisien. Sebagai akibatnya sistem linear dalam contoh 4 adalah konsisten dan

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

adalah penyelesaian untuk sistem tersebut. ◗

Persamaan matriks (5) memberi cara yang baik untuk mencirikan apakah suatu sistem persamaan linear konsisten atau tidak.

Suatu sistem linier Ax=b adalah konsisten jika dan hanya jika dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor kolom dari A

X1 + 2x2 = 1 1 2

2x1 + 4x2= 1 2 4

Perkalian Matrix

A mxn X B nxr = C mxr

CONTOH 8. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

maka adalah tidak mungkin mengalikan A kali B, karena banyaknya kolom dari A tidak sama dengan banyaknya baris dari B. Akan tetapi, adalah mungkin mengalikan B kali A.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$ ◗

Jika A dan B kedua-duanya adalah matriks $n \times n$, maka AB dan BA akan juga merupakan matriks-matriks $n \times n$, tetapi umumnya AB dan BA tidak akan sama. *Perkalian matriks adalah tidak komutatif.*

CONTOH 9. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

sehingga $AB \neq BA$. ◗

APLIKASI 2.

Suatu perusahaan menghasilkan tiga produk. Biaya produksinya dibagi dalam tiga kategori. Pada setiap kategori ini, diberikan suatu taksiran untuk biaya produksi suatu barang dari masing-masing produk. Dibuat juga suatu taksiran untuk jumlah dari masing-masing produk yang akan dihasilkan untuk setiap kuartal. Taksiran-taksiran ini diberikan dalam Tabel 3 dan 4. Perusahaan tersebut ingin menyajikan pada rapat pemegang saham satu tabel yang menunjukkan biaya total untuk setiap kuartal dalam masing-masing dari ketiga kategori: bahan mentah, tenaga kerja, dan biaya tambahan (*overhead*).

TABEL 3

BIAYA PRODUKSI PER BARANG (dollar)

	Produk		
Biaya	**A**	**B**	**C**
Bahan mentah	0,10	0,30	0,15
Tenaga kerja	0,30	0,40	0,25
Biaya tambahan dan serbaneka	0,10	0,20	0,15

TABEL 4

JUMLAH YANG DIHASILKAN PER KUARTAL

	Musim			
Produk	**Panas**	**Gugur**	**Dingin**	**Semi**
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

PENYELESAIAN. Mari kita tinjau masalah tersebut dinyatakan dalam matriks. Masing-masing dari kedua tabel dapat dinyatakan oleh matriks.

$$M = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,30 & 0,15 \\ 0,30 & 0,40 & 0,25 \\ 0,10 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$$

dan

$$P = \begin{pmatrix} 4000 & 4500 & 4500 & 4000 \\ 2000 & 2600 & 2400 & 2200 \\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000 \end{pmatrix}$$

Jika kita membuat hasil kali *MP*, maka kolom pertama dari MP akan menyatakan biaya untuk musim panas.

Bahan mentah ; (0,10) (4000) + (0,30) (2000) + (0,15) (5800) = 1870
Tenaga kerja : (0,30) (4000) + (0,40) (2000) + (0,25) (5800) = 3450
Biaya tambahan
dan serbaneka : (0,10) (4000) + (0,20) (2000) + (0,15) (5800) = 1670

Biaya untuk musim gugur diberikan dalam kolom kedua dari *MP*:

Bahan mentah : (0,10) (4500) + (0,30) (2600) + (0,15) (6200) = 2160
Tenaga kerja : (0,30) (4500) + (0,40) (2600) + (0,25) (6200) = 3940
Biaya tambahan
dan serbaneka : (0,10) (4500) + (0,20) (2600) + (0,15) (6200) = 1900

Kolom 3 dan 4 dari *MP* menyatakan biaya-biaya untuk musim dingin dan musim semi.

$$MP = \begin{pmatrix} 1870 & 2160 & 2070 & 1960 \\ 3450 & 3940 & 3810 & 3580 \\ 1670 & 1900 & 1830 & 1740 \end{pmatrix}$$

Entri-entri dalam baris 1 dari *MP* menyatakan biaya total dari bahan mentah untuk setiap musim. Entri-entri dalam baris 2 dan 3 masing-masing menyatakan biaya total untuk tenaga kerja dan biaya tambahan, untuk setiap musim. Biaya tahunan dalam setiap kategori dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan entri-entri dalam setiap baris. Angka-angka dalam setiap kolom dapat dijumlahkan untuk memperoleh biaya produksi total untuk setiap musim. Tabel 5 meringkaskan biaya produksi total.

TABEL 5

	Musim				
	Panas	**Gugur**	**Dingin**	**Semi**	**Tahun**
Bahan mentah	1.870	2.160	2.070	1.960	8.060
Tenaga kerja	3.450	3.940	3.810	3.580	14.780
Biaya tambahan dan serbaneka	1.670	1.900	1.830	1.740	7.140
Biaya produksi total	6.990	8.000	7.710	7.280	29.980

ATURAN-ATURAN CARA MENULIS

Seperti halnya dalam aljabar biasa, jika suatu pernyataan melibatkan perkalian dan penjumlahan dan tidak terdapat tanda kurung untuk menyatakan urutan dari operasi-operasi tersebut, maka perkalian dilakukan terlebih dahulu sebelum penjumlahan. Hal ini berlaku untuk perkalian skalar maupun perkalian matriks. Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$A + BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

dan

$$3A + B = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

ATURAN-ATURAN ALJABAR

Teorema berikut menyajikan beberapa aturan yang berguna untuk melakukan ilmu hitung matriks.

➤ **TEOREMA 1.3.1** *Masing-masing dari pernyataan berikut adalah sahih untuk setiap skalar α dan β dan untuk setiap matriks A, B, dan C untuk mana operasi-operasi yang bersangkutan terdefinisi.*

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB) \quad (\alpha A)B = A(\alpha B)$
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
9. $\alpha(A + B) = \alpha A + aB$

Kita akan membuktikan dua dari aturan-aturan di atas dan membiarkan selebihnya bagi pembaca untuk membuktikannya.

➤ **BUKTI DARI (4).** Misalkan bahwa $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = (b_{ij})$ dan $C = (c_{ij})$ kedua-duanya matriks $n \times r$. Misal $D = A(B + C)$ dan $E = AB + AC$. Maka:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

dan

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

Tetapi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

sehingga $d_{ij} = e_{ij}$ dan dengan demikian $A(B + C) = AB + AC$. ◗

➤ **BUKTI DARI (3).** Misalkan A matriks $m \times n$, B matriks $n \times r$, dan C matriks $r \times s$. Misal $D = AB$ dan $E = BC$. Kita harus menunjukkan bahwa $DC = AE$. Berdasarkan definisi perkalian matriks,

$$d_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} \quad \text{dan} \quad e_{il} = \sum_{l=1}^{r} b_{kl}c_{lj}$$

Entri ke-ij dari DC adalah

$$\sum_{l=1}^{r} d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}$$

dan entri ke-ij dari AE adalah

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl}c_{lj}\right)$$

Karena

$$\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl}c_{lj}\right)$$

maka

$$(AB)C = DC = AE = A(BC)$$ ◗

Aturan-aturan ilmu hitung yang diberikan dalam Teorema 1.3.1 tampaknya amat wajar karena aturan-aturan tersebut serupa dengan aturan-aturan yang kita gunakan dengan bilangan-bilangan real. Akan tetapi, terdapat beberapa perbedaan penting antara aturan-aturan ilmu hitung matriks dan aturan-aturan ilmu hitung bilangan real. Khususnya, perkalian bilangan-bilangan real adalah komutatif; akan tetapi, kita lihat dalam contoh 6 bahwa perkalian matriks tidak komutatif. Perbedaan ini memerlukan perhatian khusus.

Peringatan: Pada umumnya, $AB \neq BA$. Perkalian matriks *tidak* komutatif

Beberapa perbedaan lainnya antara ilmu hitung matriks dan ilmu hitung bilangan real dijelaskan dalam Latihan-latihan 19, 20, dan 21.

CONTOH 10. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

buktikan bahwa $A(BC) = (AB)C$ dan $A(B + C) = AB + AC$.

PENYELESAIAN.

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix} = (AB)C$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$A(B + C) = AB + AC \quad ◗$$

CATATAN. Karena $(AB)C = A(BC)$, kita boleh menghilangkan tanda kurungnya dan menulis ABC. Hal yang sama juga benar untuk perkalian empat matriks atau lebih. Dalam kasus di mana suatu matriks $n \times n$ dikalikan dengan dirinya sendiri beberapa kali, adalah tepat untuk menggunakan notasi pangkat. Jadi jika k suatu bilangan bulat positif, maka

$$A^k = \underbrace{AA \ldots A}_{k \text{ kali}}$$

CONTOH 11. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

dan pada umumnya

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad ◗$$

APLIKASI 3

Pada suatu kota 30 persen dari wanita yang sudah menikah mengalami perceraian setiap tahun dan 20 persen dari gadis menikah setiap tahun. Di kota tersebut terdapat 8000 wanita yang

Matriks Satuan (Matrik identiti)

Terdapat matik I yang bertindak sebagai satuan utk perkalian matrik yaitu

I A = A I

Untuk sembarang matrik A berorde nxn

Definisi

Matrik satuan adalah matrik I = (δij) berorde nxn dimana

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i=j \\ 0 & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

Invers matriks

Suatu bilangan real a dikatakan memiliki invers perkalian jika terdapt bilangan b sehingga ab = 1.

Sembarangan bilangan bukan nol a memiliki invers perkalian b= 1/a

Definisi

Suatu matri ks A berorde nxn dikatakan tak singuler atau dapat dibalik jika terdapat matrik B sehingga AB = BA = I.

Matrik B disebut sebagai invers perkalian dari A.

Jika B dan C kedua duanya adalah invers perkalian dari A, maka B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C

Jadi satu matrik hanya memiliki satu invers perkalian dari A dan ditulis sebagai A^{-1}

Contoh :

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1/10 & 2/5 \\ 3/10 & -1/5 \end{pmatrix}$ *adalah saling inverskarena*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/10 & 2/5 \\ 3/10 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi. Suatu matriks nxn dikatakan singuler jika tidak memiliki

invers perkalian

Transpos dari sutu matriks
Jika diberikan suatu matriks A berorde mxn sering berguna untuk membentuk matriks A berorde baru mxn yang kolom2nya adalah baris-baris baru dari A

Definisi
Transpos dari suatu matriks A berorde mxn adalah matriks B berorde mxn yang didefinisikan oleh
$b_{ji} = a_{ij}$ untuk j =1,...,n dan i=1,...,m. Transpos dari A adalah A^T
Contoh

$$\text{Jika } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Aturan-aturan aljabar untuk transpose

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Definisi. Suatu matriks A berorde nxn disebut simetris jika $A^T = A$

Matriks-Matriks Elementer

Diberikan suatu sistem linier $Ax = b$ maka kita dapat mengalikan kedua ruas dengan barisan matriks-matriks khusus untuk memperoleh satu sistem ekivalen yang berbentuk eselon baris. Matriks-matriks khusus Yang akan digunakan disebut matriks-matriks elementer. Kita akan menggunakan matriks –matrik ini untuk melihat bagaimana menghitung invers daaari suatu matriks taksinguler.

SISTEM-SISTEM EKIVALEN

Jika diberikan suatu sistem linier $Ax = b$ yang berorde mxn maka kita dapat memperoleh sistem ekivalen dengan mengalikan kedua ruas dari persamaan tsb dg matriks tak singuler m yang berorde mxm

$$A x = b \qquad (1)$$

$$M Ax = Mb \qquad (2)$$

Jelas bahwa setiap penyelesaian dari (1) akan juga merupakan penyelesaian dari (2). Sebaliknya jika $\hat{x}$ adalah penyelesaian

dari (2) maka

$M^{-1}(MAX\hat{}) = M^{-1}(Mb)$

$A\,x\hat{} = b$ sehingga kedua sistem ekivalen

TEOREMA

Jika A dan B adalah matrik-matrik nxn yang tak singuler maka AB juga tak singuler dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Berikut akan ditunjukkan bahwa masing-masing dari ke 3 operasi baris elementer dapat diselesaikan dengan dengan cara mengalikan A disebelah kiri dengan suatu matriks tak singuler.

MARTKS-MATRIKS ELEMENTER

Suatu matriks yg diperoleh dg matriks satuan I dengan melakukan suatu operasi baris elementer disebut matris elementer. Terdapat 3 jenis matriks elementer yang berkorespondensi dg ke 3 jenis operasi baris elementer.

Jenis I.

Matriks elementer jenis I adalah matriks yg diperoleh dg mempertukarkan 2 baris I

$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks elementer jenis I

$$E_1A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Jenis II

Matriks elementer jenis II adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan satu baris dengan kontanta bukan nol.

Contoh : $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ adalah suatu matriks jenis II

$$E_2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a21 & a22 & a23 \\ a11 & a12 & a13 \\ 3a31 & 3a32 & 3a33 \end{pmatrix}$$

$$AE_2 = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a12 & a11 & 3a13 \\ a22 & a21 & 3a23 \\ a32 & a31 & 3a33 \end{pmatrix}$$

Jenis III

Matriks elementer jenis III adalah matriks yang diperoleh dari I dengan menjumlahkan kelipatan dari satu baris pada baris yang lain

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ adalah satu matriks elementer jenis III. Jika A adalah matrik 3x3

maka

$$E_3A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a11&a12&a13\\a21&a22&a23\\a31&a32&a33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a11+3a31&a12+3a32&a13+3a33\\a21&a22&a23\\a31&a32&a33\end{pmatrix}$$

$$AE_3=\begin{pmatrix}a11&a12&a13\\a21&a22&a23\\a31&a32&a33\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a11&a12&3a11+a13\\a21&a22&3a21+a23\\a31&a32&3a31+a33\end{pmatrix}$$

TEOREMA

Jika E adalah suatu matrik elementer, maka E tak singuler dan E^{-1} adalah matrik elementer dengan jenis yang sama.

Definisi.