MODUL 2

DASAR-DASAR FISIKA KUANTUM

PENDAHULUAN

Dasar-dasar Fisika kuantum merupakan bab 2 dari modul ini yang menjelaskan tentang fungsi gelombang, arti fisis dari fungsi gelombang, sifat-sifat fungsi gelombang, operator Hermitian, komutator dan representasi matrik. Fisika kuantum membantu kita memahami aturan fundamental yang mengatur alam semesta, dari skala terkecil (partikel subatomik) hingga proses-proses dalam bintang dan lubang hitam. Ini memberikan wawasan mendalam tentang sifat realitas dan bagaimana partikel berinteraksi di alam semesta, membuka jalan untuk menjawab pertanyaan besar dalam kosmologi dan fisika fundamental. Fisika kuantum adalah kunci untuk memahami banyak fenomena alam yang tidak bisa dijelaskan oleh fisika klasik. Dengan memahami dasar-dasar fisika kuantum, mahasiswa dapat mengerti bagaimana dunia di skala atom dan subatom berfungsi.

Fisika kuantum bukan hanya teori abstrak, ia juga memiliki penerapan langsung dalam teknologi yang kita gunakan setiap hari. Beberapa contoh termasuk transistor, laser dan komputasi kuantum yang merupakan sebuah bidang yang berkembang pesat menggunakan sifat kuantum untuk meningkatkan kecepatan dan efisiensi pemrosesan data. Dengan memahami fisika kuantum, mahasiswa mendapatkan wawasan tentang teknologi masa depan dan berkontribusi dalam pengembangannya. Banyak inovasi dalam ilmu material, teknologi informasi, dan telekomunikasi berbasis pada prinsip-prinsip kuantum. Dengan memahami dasar-dasar fisika kuantum, mahasiswa dapat berkontribusi pada penelitian dan pengembangan di berbagai industri yang menggunakan teknologi kuantum.

Pada kegiatan ini kita akan mempelajari bagaimana fungsi gelombang, arti fisis dari fungsi gelombang, sifat-sifat fungsi gelombang, operator Hermitian, komutator dan representasi matrik, yaitu

1. Kegiatan Belajar 1: Fungsi Gelombang, Arti Fisis Dari Fungsi Gelombang, Sifat-Sifat Fungsi Gelombang.
2. Kegiatan Belajar 2: Operator (Sifat-sifat gelombang dan Operator Hermitian) dan Komutator.

3. Kegiatan Belajar 3: Representasi Matrik.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan memiliki kompetensi mampu menelaah dan mengaplikasikan dasar – dasar fisika kuantum meliputi fungsi gelombang, arti fisis dari fungsi gelombang, sifat-sifat fungsi gelombang, operator Hermitian, komutator dan representasi matrik. Secara lebih khusus, Anda diharapkan:

1. Menganalisis dan menggunakan fungsi gelombang untuk menghitung probabilitas posisi partikel.
2. Menunjukkan sifat-sifat fungsi gelombang, seperti normalisasi, kontinuitas, dan diferensiabilitas.
3. Menerapkan operator posisi, momentum, dan energi pada fungsi gelombang.
4. Menjelaskan hubungan antara komutator operator posisi dan momentum dengan prinsip ketidakpastian.
5. Merepresentasikan operator dalam bentuk matriks dan menerapkan konsep ini untuk sistem kuantum sederhana, seperti spin partikel.
6. Menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan fungsi gelombang, operator, dan komutator dalam konteks sistem kuantum satu dimensi.

Agar memperoleh hasil yang maksimal dalam mempelajari modul ini, ikuti petunjuk pembelajaran berikut ini:

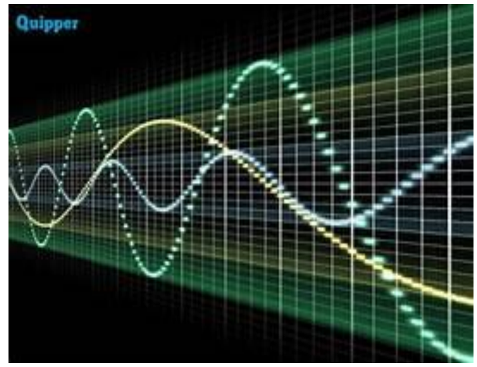
1. Sebelum membaca materi yang akan dipelajari, bacalah bagian Pendahuluan modul ini, sampai Anda memahami betul apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.
2. Bacalah bagian demi bagian, temukan kata-kata kunci dan kata-kata yang Anda anggap baru.
3. Carilah dan baca pengertian kata-kata tersebut dalam daftar kata-kata sulit dalam modul ini atau dalam kamus yang ada.
4. Tangkaplah pengertian demi pengertian dari isi modul ini melalui pemahaman sendiri, tukar pikiran dengan sesama mahasiswa, dan dosen Anda.
5. Mantapkan pemahanan Anda melalui diskusi dengan sesama teman mahasiswa.

Kegiatan Belajar 1

Dasar-dasar Fisika Kuantum

A. Fungsi Gelombang

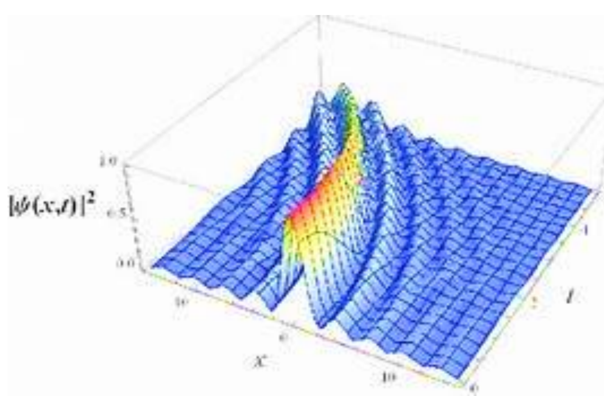
Kita sering mendengar tentang gelombang dan kebanyakan dari kita memahami gelombang dalam ilmu fisika adalah getaran yang merambat misalnya gelombang pada tali, gelombang pada air dan sebagainya. Namun dalam fisika kuantum, gelombang bukan lagi pembahasan tentang getaran melainkan partikel subatomik. Gelombang dan partikel merupakan sebuah landasan fisika kuantum yang berlaku untuk elektron dan juga cahaya. Partikel subatom sendiri merupakan kumpulan maupun gelombang informasi serta konsentrasi energi. Semua benda yang ada di dalam alam semesta merupakan sebuah kumpulan molekul yang terdiri dari kumpulan atom.



Gb. 1.1 Karakteristik Gelombang

Fisika kuantum menggantikan pemahaman deterministik klasik dengan konsep probabilitas, di mana partikel tidak lagi digambarkan sebagai entitas dengan posisi dan momentum pasti, melainkan sebagai entitas dengan probabilitas tersebar dalam ruang. Salah satu konsep utama yang digunakan untuk menggambarkan partikel dalam fisika kuantum adalah fungsi gelombang. Fungsi gelombang (ψ) memainkan peran sentral dalam menggambarkan keadaan fisik sistem kuantum dan memuat semua informasi yang diperlukan untuk memahami dinamika partikel.

Fungsi gelombang, dilambangkan dengan $\psi\ (x,t)$ adalah besaran matematis yang mendeskripsikan keadaan kuantum dari suatu sistem, seperti posisi, momentum, atau energi partikel dalam fisika kuantum untuk koordinat posisi x dan waktu t, adalah solusi dari Persamaan Schrödinger. Fungsi gelombang tidak hanya menyediakan informasi tentang posisi partikel,



Gb. 2.2 Fungsi Gelombang

tetapi juga memberikan probabilitas untuk menemukan partikel tersebut pada posisi tertentu pada saat tertentu.

Fungsi gelombang pada umumnya bersifat kompleks, yaitu memiliki bagian real dan bagian imajiner. Namun, hanya kuadrat dari modulus fungsi gelombang, $|\psi\ (x,t)|^2$, yang memiliki arti fisik, yakni menunjukkan distribusi probabilitas keberadaan partikel. Konsekuensinya, $\psi\ (x,t)$ itu sendiri tidak memiliki makna fisik langsung tetapi berkaitan erat dengan besaran-besaran yang dapat diukur.

1. Persamaan Schrödinger dan Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang ditentukan oleh Persamaan Schrödinger, yang merupakan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan evolusi waktu dari fungsi gelombang untuk sistem kuantum. Bentuk waktu-independen dari Persamaan Schrödinger adalah:

$$\hat{H}\psi\ (x) = E\psi(x)$$

Di mana $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian yang menggambarkan energi total sistem, dan E adalah energi dari keadaan kuantum tersebut. Persamaan Schrödinger memungkinkan kita untuk menemukan fungsi gelombang yang sesuai dengan kondisi tertentu.

Fungsi gelombang yang memenuhi **Persamaan Schrödinger** merupakan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan bagaimana fungsi gelombang berkembang seiring waktu. Dalam bentuk satu dimensi, **persamaan Schrödinger bebas waktu** dinyatakan sebagai:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Di mana:

$\hbar$ adalah konstanta Planck yang dibagi dengan 2π,
m adalah massa partikel,
$V(x)$ adalah potensial yang bekerja pada partikel,
E adalah energi total partikel.

2. Interpretasi Probabilistik

Fungsi gelombang tidak memberikan posisi partikel secara pasti, melainkan memberikan distribusi probabilitas. Kuadrat dari modulus fungsi gelombang, yaitu $|\psi\ (x,t)|^2$, dikenal sebagai probability density, atau kerapatan probabilitas untuk menemukan partikel di titik tertentu dalam ruang pada waktu tertentu. Oleh karena itu:

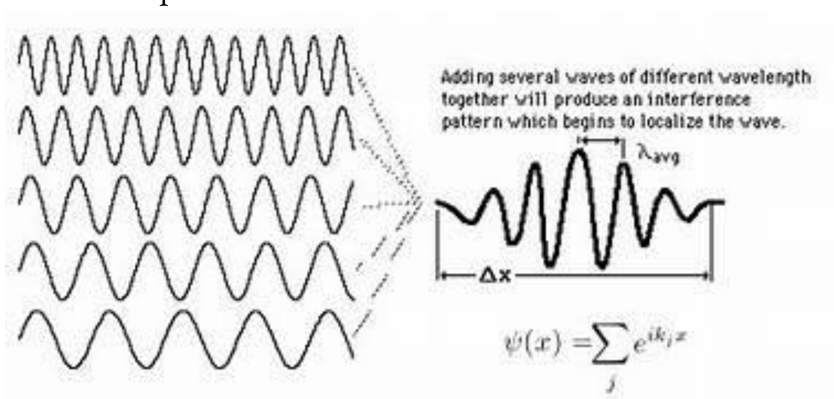
$P\ (x,t) = \ |\psi\ (x,t)|^2$

Dengan *P(x,t)* sebagai probabilitas untuk menemukan partikel di titik x pada waktu t.

3. Paket Gelombang

Dalam kebanyakan situasi fisika, partikel tidak digambarkan dengan satu gelombang datar, melainkan dengan superposisi dari banyak gelombang datar yang berbeda disebut paket gelombang. Paket gelombang memungkinkan kita menggambarkan partikel yang terlokalisasi di ruang, sementara gelombang datar menggambarkan partikel yang sepenuhnya delokalisasi.

Paket gelombang merupakan solusi linier dari fungsi gelombang dan berkaitan langsung dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg. Dalam pendekatan ini, semakin sempit paket gelombang, semakin besar ketidakpastian dalam momentum.



Gb. 2.3 Paket Gelombang

4. Kondisi Batas dan Fungsi Gelombang Terkuantisasi

Dalam banyak kasus, sistem kuantum dibatasi oleh kondisi tertentu, seperti dinding potensial. Fungsi gelombang yang menjelaskan partikel dalam sistem ini harus memenuhi kondisi batas yang sesuai. Contoh yang umum digunakan adalah partikel dalam kotak, di mana partikel hanya dapat memiliki energi terkuantisasi dan fungsi gelombangnya berbentuk gelombang stasioner.

5. Fungsi Gelombang untuk Sistem Multi-Partikel

Untuk sistem yang terdiri dari banyak partikel, fungsi gelombang menjadi lebih rumit. Sebagai contoh, untuk dua elektron dalam sebuah atom, fungsi gelombang harus mencakup koordinat kedua elektron dan memenuhi prinsip Pauli exclusion bagi fermion, di mana dua fermion tidak dapat menempati keadaan kuantum yang sama.

6. Aplikasi Fungsi Gelombang

- Model Atom Hidrogen: Fungsi gelombang yang digunakan untuk mendeskripsikan elektron dalam atom hidrogen memberikan gambaran tentang probabilitas menemukan elektron pada jarak tertentu dari inti.
- Tunneling Kuantum: Salah satu aplikasi penting dari fungsi gelombang adalah dalam fenomena tunneling, di mana partikel dapat melewati penghalang potensial yang seharusnya tidak mungkin secara klasik.
- Komputasi Kuantum: Fungsi gelombang juga merupakan dasar dari komputasi kuantum, di mana keadaan kuantum superposisi dimanipulasi untuk melakukan perhitungan.

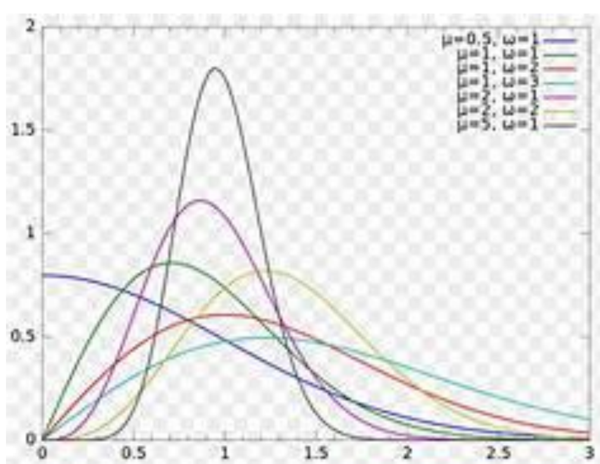
B. Arti Fisis Dari Fungsi Gelombang

Dalam fisika kuantum, fungsi gelombang (ψ) memiliki peran yang sangat penting karena ia menggambarkan keadaan kuantum suatu partikel atau sistem kuantum. Namun, fungsi gelombang itu sendiri tidak memiliki arti fisik langsung. Arti fisis dari fungsi gelombang dapat dijelaskan melalui beberapa konsep kunci:

1. Amplitudo Probabilitas

Fungsi gelombang menyatakan amplitudo probabilitas untuk menemukan partikel dalam keadaan tertentu (misalnya, pada posisi tertentu dalam ruang pada saat tertentu). Karena fungsi gelombang bisa bernilai kompleks, hanya kuadrat dari modulusnya yang memiliki arti fisik yang jelas.

Gb. 2.3 Distribusi Probabilitas



Gb. 2.4 Distribusi Probabilitas

2. Kerapatan Probabilitas

Arti fisik yang utama dari fungsi gelombang diberikan oleh kuadrat modulus dari fungsi gelombang, $|\psi\ (x,t)|^2$, yang disebut kerapatan probabilitas. Ini memberikan probabilitas relatif untuk menemukan partikel di posisi tertentu pada waktu tertentu dalam ruang.

$P\ (x,t) = \ |\psi\ (x,t)|^2$

Di mana *P(x,t)* adalah probabilitas untuk menemukan partikel di posisi *x* pada waktu t.

Kerapatan probabilitas harus memenuhi kondisi bahwa probabilitas total menemukan partikel di seluruh ruang adalah 1 (normalisasi):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi\ (x,t)|^2 dx = 1$$

Dengan demikian, fungsi gelombang memberikan deskripsi probabilistik dari keberadaan partikel.

3. Superposisi Kuantum

Fungsi gelombang juga dapat berada dalam keadaan superposisi. Ini berarti partikel bisa berada di lebih dari satu keadaan kuantum sekaligus. Keadaan superposisi ini dijelaskan dengan fungsi gelombang sebagai kombinasi linear dari beberapa fungsi gelombang:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

Di mana c_1 dan c_2 adalah koefisien amplitudo untuk setiap keadaan. Arti fisis dari ini adalah bahwa probabilitas total adalah gabungan dari dua kemungkinan keadaan partikel.

4. Evolusi Waktu

Fungsi gelombang berevolusi seiring waktu sesuai dengan Persamaan Schrödinger. Ini menggambarkan bagaimana keadaan kuantum (yang diwakili oleh fungsi gelombang) berubah dalam waktu dan bagaimana probabilitas untuk menemukan partikel di lokasi tertentu berubah seiring waktu.

5. Pengukuran dalam Mekanika Kuantum

Dalam mekanika kuantum, ketika dilakukan pengukuran, fungsi gelombang 'kolaps' ke salah satu keadaan eigen tertentu yang sesuai dengan nilai hasil pengukuran. Sebelum pengukuran, fungsi gelombang menyimpan informasi tentang semua kemungkinan keadaan yang bisa diambil oleh partikel. Setelah pengukuran, fungsi gelombang merepresentasikan keadaan partikel yang diukur.

6. Paket Gelombang

Fungsi gelombang dapat membentuk paket gelombang, yang menggambarkan partikel yang terlokalisasi dalam ruang. Ini relevan dalam konteks prinsip ketidakpastian Heisenberg, di mana terdapat ketidakpastian dalam posisi dan momentum partikel. Fungsi gelombang paket memungkinkan partikel untuk memiliki rentang kemungkinan posisi dan momentum, sehingga menyatukan dualitas gelombang-partikel dalam fisika kuantum.

7. Interferensi dan Difraksi

Arti fisis dari fungsi gelombang juga bisa dilihat dalam eksperimen interferensi dan difraksi, di mana partikel kuantum seperti elektron atau foton menunjukkan perilaku seperti gelombang. Fenomena interferensi muncul dari prinsip superposisi fungsi gelombang. Ketika dua fungsi gelombang bertemu, mereka dapat saling memperkuat (interferensi konstruktif) atau saling meniadakan (interferensi destruktif), sehingga menghasilkan pola interferensi.

C. Sifat – sifat Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang (ψ) memiliki beberapa sifat penting yang berhubungan dengan deskripsi keadaan kuantum partikel atau sistem. Sifat-sifat ini memainkan peran sentral dalam memahami perilaku partikel di dunia kuantum dan mematuhi prinsip-prinsip dasar fisika kuantum. Berikut adalah sifat-sifat utama dari fungsi gelombang:

1. Kontinuitas

Fungsi gelombang harus kontinu (tidak memiliki diskontinuitas) dan diferensiabel (memiliki turunan yang kontinu). Ini berarti bahwa fungsi gelombang tidak boleh mengalami lompatan tiba-tiba pada suatu titik dalam ruang. Sifat kontinuitas ini diperlukan untuk memastikan bahwa probabilitas untuk menemukan partikel berubah secara halus dari satu titik ke titik lainnya.

2. Normalisasi

Agar fungsi gelombang memiliki makna probabilistik fungsi gelombang harus dapat dinormalisasi, yang berarti bahwa jumlah total probabilitas untuk menemukan partikel dalam seluruh ruang harus sama dengan 1. Dalam hal ini, integral kuadrat modulus dari fungsi gelombang di seluruh ruang harus sama dengan 1. Proses normalisasi ini memastikan bahwa fungsi gelombang menggambarkan distribusi probabilitas yang sah.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi\ (x,t)|^2 dx = 1$$

3. Linearitas

Fungsi gelombang mematuhi prinsip superposisi atau linearitas. Jika ψ_1 dan ψ_2 adalah solusi dari persamaan Schrödinger, maka kombinasi linear keduanya juga merupakan solusi yang sah. Prinsip superposisi ini memungkinkan fungsi gelombang untuk menggambarkan keadaan kuantum yang merupakan campuran dari beberapa keadaan kuantum lain.

4. Kompleks

Fungsi gelombang dalam fisika kuantum umumnya berupa fungsi kompleks, yang berarti bahwa ia dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\psi\ (x,t) = a(x,t) + ib(x,t)$$

Di mana $a(x,t)$ dan $b(x,t)$ adalah bagian real dan imajiner dari fungsi gelombang, dan i adalah satuan imajiner. Meskipun fungsi gelombang itu sendiri bersifat kompleks, kuadrat modulusnya, yang menggambarkan kerapatan probabilitas, selalu berupa bilangan real:

$$|\psi\ (x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

Di mana $\psi^*(x,t)$ adalah konjugat kompleks dari fungsi gelombang.

5. Solusi Persamaan Schrödinger

Fungsi gelombang harus merupakan solusi dari persamaan Schrödinger, baik persamaan Schrödinger bebas waktu (untuk keadaan stasioner) maupun persamaan Schrödinger bergantung waktu. Persamaan ini mengatur evolusi fungsi gelombang dan menggambarkan bagaimana keadaan kuantum berubah seiring waktu.

Untuk persamaan Schrödinger bebas waktu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Persamaan ini menentukan bentuk fungsi gelombang berdasarkan energi total E dan potensial $V(x)$ yang dialami partikel.

6. Kondisi Batas

Fungsi gelombang harus memenuhi kondisi batas yang sesuai dengan sistem fisik yang dipelajari. Sebagai contoh, untuk partikel dalam kotak (infinite potential well), fungsi gelombang harus bernilai nol pada dinding-dinding kotak:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Di mana L adalah panjang kotak. Kondisi batas ini menghasilkan energi terkuantisasi untuk partikel.

7. Keperiodikan

Untuk sistem-sistem yang memiliki sifat periodik, seperti dalam kristal atau partikel pada cincin (loop), fungsi gelombang sering kali periodik dalam ruang. Ini berarti bahwa nilai fungsi gelombang pada satu titik akan sama dengan nilai di titik yang berbeda, yang berjarak satu periode penuh:

$$\psi(x + L) = \psi(x)$$

Di mana L adalah periode ruang.

8. Kecepatan Grup dan Fase

Fungsi gelombang dalam banyak kasus dapat dianalisis sebagai gelombang sinusoidal dengan kecepatan grup dan kecepatan fase yang berbeda. Kecepatan grup terkait dengan propagasi paket gelombang dan memberikan gambaran tentang bagaimana partikel bergerak, sedangkan kecepatan fase terkait dengan perubahan fase gelombang.

9. Simetri

Fungsi gelombang bisa memiliki simetri tertentu tergantung pada sistem fisika yang dikaji. Fungsi gelombang dapat simetri terhadap transformasi tertentu, seperti simetri rotasi atau simetri translasi. Sebagai contoh, dalam atom hidrogen, fungsi gelombang elektron memiliki simetri rotasi sesuai dengan distribusi orbital atom.

10. Fase Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang memiliki **fase** yang sering kali dapat berubah selama evolusi waktu atau dalam proses interferensi kuantum. Fase fungsi gelombang penting dalam fenomena seperti interferensi dan difraksi, di mana partikel kuantum dapat menunjukkan perilaku interferensi konstruktif atau destruktif tergantung pada perbedaan fase.

RANGKUMAN

Fisika kuantum merupakan salah satu cabang fundamental dalam fisika yang bertujuan untuk memahami perilaku sistem pada skala atomik dan subatomik, di mana hukum-hukum fisika klasik tidak lagi berlaku.

Fungsi gelombang, $\psi\,(x,t)$ adalah representasi matematika yang digunakan untuk menggambarkan keadaan kuantum suatu partikel. Nilai kuadrat modulus dari fungsi gelombang, $|\psi\,(x,t)|^2$, memberikan probabilitas menemukan partikel pada posisi tertentu di ruang. Konsep ini memperlihatkan bahwa dalam dunia kuantum, posisi dan momentum tidak dapat diketahui dengan pasti secara bersamaan (Prinsip Ketidakpastian Heisenberg), sehingga probabilitas menjadi elemen penting dalam prediksi hasil pengukuran.

Fungsi gelombang harus memenuhi beberapa sifat penting, seperti terormalisasi agar probabilitas total sama dengan satu, kontinyu, dan diferensiabel agar dapat dihitung operator momentum dan energi. Fungsi gelombang juga dapat mengalami interferensi, mencerminkan sifat gelombang partikel kuantum.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Diberikan fungsi gelombang dari sebuah partikel dalam satu dimensi sebagai berikut:

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha|x|}$$

   di mana A dan α adalah konstanta positif. Tentukan:

   a. Nilai konstanta normalisasi A agar fungsi gelombang terormalisasi.
   b. Apakah fungsi gelombang ini memenuhi sifat-sifat fungsi gelombang yang diharapkan?

2. Diberikan fungsi gelombang:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   di mana L adalah panjang kotak potensial dan nnn adalah bilangan kuantum.

   Tentukan:

a. Probabilitas menemukan partikel di antara $x = 0$ dan $x = L/2$.

b. Apakah probabilitas ini bergantung pada bilangan kuantum n?

3. Sebuah partikel digambarkan oleh fungsi gelombang:

$$\psi(x) = Be^{ikx}$$

dengan B adalah konstanta normalisasi dan kkk adalah bilangan gelombang. Tentukan:

a. Syarat agar fungsi gelombang ini terormalisasi.

b. Apakah fungsi gelombang ini memenuhi syarat normalisasi? Jelaskan alasanmu.

4. Diberikan fungsi gelombang partikel satu dimensi sebagai berikut:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), & 0 \le x \le L \\ 0, & selain\ itu \end{cases}$$

Tentukan:

a. Tentukan konstanta A sehingga fungsi gelombang terormalisasi.

b. Hitung probabilitas menemukan partikel pada interval $\left[0, \frac{L}{2}\right]$.

Kegiatan Belajar 2

D. Operator dalam fisika kuantum

Dalam fisika kuantum, operator adalah alat matematika yang bertindak pada fungsi gelombang untuk mengekstrak informasi fisik seperti posisi, momentum, energi, dan lain-lain. Operator-operator ini merupakan komponen kunci dari pendekatan formal mekanika kuantum, yang menggantikan konsep klasik seperti posisi dan momentum dengan besaran yang diwakili oleh operator dalam ruang fungsi gelombang. Berikut adalah beberapa poin penting tentang operator dalam fisika kuantum:

a. Operator Posisi (Position Operator)

Operator posisi $\hat{x}$ adalah operator yang mengembalikan posisi partikel. Dalam representasi ruang, operator ini bertindak sebagai pengali pada fungsi gelombang.

$$\hat{x}\,\psi(x) = x\psi\,(x)$$

Artinya, ketika operator posisi x diterapkan pada fungsi gelombang, hasilnya adalah posisi partikel x, dikalikan dengan fungsi gelombang.

b. Operator Momentum (Momentum Operator)

Operator momentum $\hat{p}$ dalam representasi posisi didefinisikan sebagai operator diferensial:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

Ketika operator momentum ini diterapkan pada fungsi gelombang, ia mengukur momentum partikel tersebut. Di sini, $\hbar$\hbar$\hbar$ adalah konstanta Planck yang dibagi 2π, dan iii adalah bilangan imajiner.

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

Operator momentum memainkan peran penting dalam persamaan Schrödinger dan teori kuantum secara umum.

c. Operator Hamiltonian (Hamiltonian Operator)

Operator Hamiltonian Ĥ mewakili energi total sistem kuantum, yaitu gabungan dari energi kinetik dan energi potensial. Dalam satu dimensi, operator Hamiltonian didefinisikan sebagai:

$$\hat{\mathrm{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x)$$

Di mana:

$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ adalah operator energi kinetik,

V(x) adalah energi potensial.

Operator Hamiltonian digunakan dalam persamaan Schrödinger bebas waktu**:**

$$\widehat{H}\,\psi(x) = E\psi(x)$$

Di mana *E* adalah energi total sistem.

d. Operator Energi Kinetik

Energi kinetik dalam fisika kuantum dinyatakan melalui operator diferensial sebagai:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Operator ini bertindak pada fungsi gelombang untuk menghitung energi kinetik partikel berdasarkan distribusi spasial dari fungsi gelombang.

e. Operator Energi Potensial

Energi potensial biasanya tergantung pada posisi partikel, sehingga operator potensial bertindak sebagai fungsi posisi:

$$\hat{V}(x) = V(x)$$

Operator ini memberikan energi potensial sesuai dengan posisi partikel dalam medan potensial *V(x)*.

f. Operator Momentum Sudut (Angular Momentum Operator)

Operator momentum sudut $\hat{L}$ adalah operator yang digunakan untuk menghitung momentum sudut dalam sistem kuantum, khususnya untuk sistem yang memiliki simetri rotasi seperti atom. Dalam bentuk vektor:

$$\hat{L} = r\ x\ \hat{p}$$

Dalam mekanika kuantum, momentum sudut juga terkuantisasi, dan operator momentum sudut memainkan peran penting dalam menggambarkan keadaan kuantum atom.

g. Operator Nilai Harapan (Expectation Value Operator)

Dalam fisika kuantum, nilai yang terukur dari besaran fisik tidak dapat diprediksi secara deterministik, tetapi hanya probabilitasnya yang dapat dihitung. Nilai harapan dari besaran yang diwakili oleh operator Â dihitung sebagai:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)\, dx$$

Di mana ⟨A⟩ adalah nilai harapan operator Â, dan $\psi^*(x)$ adalah konjugat kompleks dari fungsi gelombang.

h. Operator Hermitian

Dalam mekanika kuantum, operator yang terkait dengan besaran fisik harus berupa operator Hermitian. Ini berarti bahwa operator memiliki sifat-sifat berikut:

Â Hermitian jika $\langle \psi_1 | \hat{A}\psi_2 \rangle = \langle \hat{A}\psi_1 | \psi_2 \rangle$

Semua eigenvalue dari operator Hermitian adalah real, yang penting karena besaran fisik seperti energi, momentum, dan posisi harus memiliki nilai real.

i. Operator Lifting (Raising) dan Lowering

Dalam konteks sistem osilator harmonik kuantum, terdapat dua operator penting yang disebut raising operator (pengangkat) dan lowering operator (penurun):

- Raising operator: $\hat{a}$
- Lowering operator**:** $\hat{a}$ Operator ini digunakan untuk mengubah keadaan kuantum dari osilator harmonik, menggerakkan sistem dari satu keadaan energi ke keadaan energi yang lebih tinggi atau lebih rendah.

j. Komutator Operator

Dalam mekanika kuantum, operator-operator tidak selalu komutatif, artinya urutan penerapan operator dapat mempengaruhi hasil. Komutator dari dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ didefinisikan sebagai:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Jika $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ =0, maka kedua operator dikatakan komutatif**,** dan besaran fisik yang mereka wakili dapat diukur secara simultan tanpa ketidakpastian.

Sebagai contoh, komutator posisi dan momentum memberikan hubungan penting:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Hubungan ini merupakan dasar dari prinsip ketidakpastian Heisenberg**.**

1. Sifat-Sifat Operator dalam Fisika Kuantum

Operator dalam fisika kuantum memiliki beberapa sifat penting yang menentukan bagaimana mereka beroperasi pada fungsi gelombang dan berhubungan dengan besaran fisik dalam suatu sistem kuantum. Sifat-sifat ini memastikan bahwa perhitungan yang dilakukan dengan operator tersebut memberikan hasil yang konsisten dengan teori kuantum. Berikut adalah beberapa sifat utama dari operator dalam fisika kuantum:

a. Linearitas

Operator kuantum bersifat linear, artinya jika Â adalah sebuah operator, maka berlaku sifat linear sebagai berikut:

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta skalar, dan ψ_1 serta ψ_2 adalah fungsi gelombang. Sifat ini penting karena menjamin bahwa superposisi fungsi gelombang tetap mengikuti aturan kuantum ketika operator diterapkan.

b. Hermiticity (Operator Hermitian)

Dalam fisika kuantum, operator yang berhubungan dengan observabel fisik seperti energi, momentum, dan posisi harus Hermitian. Operator Hermitian memiliki sifat sebagai berikut:

$$\langle\psi|\hat{A}\phi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\phi\rangle$$

Sifat ini memastikan bahwa nilai eigen dari operator tersebut (yang merupakan hasil pengukuran fisik) adalah bilangan real. Contoh operator Hermitian adalah operator Hamiltonian (Ĥ) yang mewakili energi total sistem.

c. Eigenvalue dan Eigenstate

Operator kuantum memiliki eigenvalue dan eigenstate yang terkait. Jika Â adalah operator dan ψ adalah fungsi gelombang, maka:

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

Di mana λ adalah eigenvalue dari operator Â, dan ψ adalah eigenstate yang sesuai. Dalam konteks fisika kuantum, eigenvalue dari operator biasanya mewakili besaran fisik yang dapat diukur, seperti energi, momentum, atau posisi.

d. Komutatifitas (Komutator)

Dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ komutatif jika urutan penerapan operator tidak mempengaruhi hasilnya, yaitu:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

Jika komutator dua operator bernilai nol, besaran fisik yang terkait dengan kedua operator tersebut dapat diukur secara simultan tanpa ketidakpastian. Sebaliknya, jika komutator tidak bernilai nol, seperti komutator posisi dan momentum $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ maka berlaku prinsip ketidakpastian Heisenberg, di mana besaran yang terkait tidak dapat diukur secara simultan dengan presisi tak terbatas.

2. Operator Hermitian

Dalam fisika kuantum, operator Hermitian adalah jenis operator yang berperan penting dalam menggambarkan besaran fisika yang dapat diukur (observabel), seperti energi, momentum, posisi, dan sebagainya. Operator Hermitian memiliki sifat khusus yang menjamin bahwa nilai-nilai yang dihasilkan dari pengukuran observabel tersebut adalah bilangan real**.** Berikut adalah uraian lengkap tentang operator Hermitian:

a. Definisi Operator Hermitian

Operator Hermitian $\hat{A}$ memenuhi kondisi berikut:

$$\hat{A}^{+} = \hat{A}$$

di mana $\hat{A}^{+}$ adalah operator adjoint (konjugat Hermitian) dari $\hat{A}$. Operator adjoint diperoleh dengan mentransposkan dan mengonjugasi kompleks matriks dari operator tersebut. Secara sederhana, untuk operator Hermitian, hasil operasi konjugat Hermitian sama dengan operator itu sendiri.

b. Sifat-Sifat Operator Hermitian

Operator Hermitian memiliki beberapa sifat penting yang menjadikannya berguna dalam fisika kuantum:

- Nilai Eigen yang Real

  Jika Â adalah operator Hermitian dan ψ adalah fungsi eigen dari operator tersebut dengan nilai eigen a, maka:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

  Sifat utama operator Hermitian adalah nilai eigen aaa selalu real. Ini penting karena observabel fisik dalam eksperimen nyata selalu berupa bilangan real (seperti energi, momentum, dll.).

- Orthogonalitas Fungsi Eigen

  Fungsi eigen yang terkait dengan nilai eigen yang berbeda dari operator Hermitian adalah ortogonal satu sama lain. Jika ψ_1 dan ψ_2 adalah dua fungsi eigen yang memenuhi:

$$\hat{A}\psi_1 = a_1\psi_1 \; dan \; \hat{A}\psi_2 = a_2\psi_2$$

  dengan $a_1 \neq a_2$, maka:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$$

  Sifat ortogonalitas ini merupakan dasar dari konstruksi basis ortonormal dalam ruang Hilbert.

- Ekspektasi Nilai Real

  Untuk setiap fungsi gelombang ψ\psiψ, ekspektasi nilai (nilai harapan) dari operator Hermitian Â selalu real:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \in R$$

  Ekspektasi nilai ini menggambarkan rata-rata hasil pengukuran observabel yang diwakili oleh Â ketika sistem berada dalam keadaan ψ.

- Simetri dalam Fungsi Gelombang

  Operator Hermitian dapat dikaitkan dengan transformasi yang simetri dalam ruang Hilbert. Sebagai contoh, Hamiltonian (yang merupakan operator Hermitian) menggambarkan konservasi energi dan memunculkan evolusi waktu yang uniter.

3. Contoh Operator Hermitian dalam Fisika Kuantum

Beberapa operator observabel fisik yang umum dalam fisika kuantum adalah Hermitian:

- Operator Posisi $\hat{x}$ Dalam basis posisi, operator ini didefinisikan sebagai:

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$$

yang jelas menghasilkan bilangan real x, sehingga operator ini Hermitian.

- Operator Momentum $\hat{p}$: Dalam basis posisi, operator momentum diberikan oleh:

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$$

Ini adalah operator Hermitian karena, jika diuji dalam integral inner product, konjugat Hermitian dari operator momentum sama dengan operator itu sendiri.

- **Operator Hamiltonian** Ĥ: Operator Hamiltonian, yang mewakili energi total sistem, juga merupakan operator Hermitian:

$$\hat{\mathrm{H}} = -\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

Hamiltonian penting karena menentukan evolusi waktu sistem kuantum melalui persamaan Schrödinger.

4. Pentingnya Operator Hermitian dalam Pengukuran

Dalam mekanika kuantum, setiap observabel fisik diwakili oleh operator Hermitian, karena pengukuran observabel selalu menghasilkan nilai real. Dalam proses pengukuran, fungsi gelombang ψ "dikolapskan" ke fungsi eigen dari operator observabel yang sesuai, dan nilai yang terukur adalah nilai eigen yang real dari operator tersebut.

E. Komutator dalam Fisika Kuantum

Dalam fisika kuantum, **komutator** adalah salah satu konsep penting yang menggambarkan hubungan antara dua operator. Komutator dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ adalah ukuran seberapa jauh dua operator tersebut **gagal untuk komutatif**, atau dengan kata lain, seberapa besar urutan penerapan operator mempengaruhi hasil. Komutator ini memberikan informasi tentang apakah besaran fisik yang diwakili oleh operator tersebut dapat diukur secara simultan tanpa adanya ketidakpastian.Secara matematis, komutator dari dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ didefinisikan sebagai:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Jika $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, maka operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ **komutatif**, yang berarti mereka dapat diterapkan dalam urutan apa pun tanpa mempengaruhi hasil. Sebaliknya, jika $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, maka operator tersebut **tidak komutatif**, yang mengindikasikan adanya interaksi atau ketergantungan yang mendalam di antara kedua besaran fisik yang direpresentasikan oleh operator tersebut.

1. Sifat-Sifat Komutator

Komutator memiliki beberapa sifat penting yang sangat berguna dalam analisis kuantum:

a. Antikomutasi

   Komutator adalah operator **antisimetri**, yang berarti:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

   Ini menunjukkan bahwa menukar urutan dua operator menghasilkan tanda yang berlawanan.

b. Distributivitas

   Komutator bersifat distributif terhadap penjumlahan operator, yaitu:

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

   Sifat ini menunjukkan bahwa komutator dapat diperluas atau dikembangkan seperti operasi aljabar biasa.

c. Relasi dengan Bilangan Skalar

Jika c adalah konstanta skalar, maka:

$$[\hat{A}, c\hat{B}] = c[\hat{A}, \hat{B}]$$

Komutator tidak terpengaruh oleh perkalian operator dengan bilangan skalar.

d. Jacobi Identity

Komutator juga memenuhi identitas Jacobi, yaitu:

$$\left[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]\right] + \left[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]\right] + \left[\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = 0$$

Identitas Jacobi penting dalam menjaga struktur matematis sistem kuantum, terutama dalam teori medan kuantum dan aljabar Lie.

2. Contoh Komutator dalam Fisika Kuantum

Komutator banyak digunakan untuk mendefinisikan hubungan fundamental antara observabel dalam fisika kuantum. Berikut adalah beberapa contoh penting:

a. Komutator Posisi dan Momentum

Komutator paling terkenal dalam fisika kuantum adalah antara operator posisi $\hat{x}$ dan momentum $\hat{p}$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Ini adalah dasar dari prinsip ketidakpastian Heisenberg, yang menyatakan bahwa kita tidak bisa mengukur posisi dan momentum secara bersamaan dengan ketidakpastian nol. Ketidakkomutatifan ini menyatakan bahwa ada batasan fundamental dalam pengukuran simultan kedua observabel ini.

b. Komutator Hamiltonian dan Operator Momentum

Jika $\widehat{H}$ adalah operator Hamiltonian (yang mewakili energi total sistem) dan $\hat{p}$adalah operator momentum, maka komutator $[\widehat{H}, \hat{p}]$ memberikan informasi penting tentang evolusi momentum dalam sistem tersebut. Misalnya, dalam sistem sederhana seperti partikel bebas, Hamiltonian dapat dinyatakan sebagai:

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

Komutator $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$, yang menunjukkan bahwa momentum adalah kuantitas yang konservatif dalam sistem ini.

c. Komutator Operator Sudut dan Momentum Angular

Dalam mekanika kuantum, komutator antara komponen-komponen dari operator momentum angular $\hat{L}_x, \hat{L}_y, dan\ \hat{L}_z$, sangat penting dalam mendeskripsikan rotasi sistem:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$$
$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$$
$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$$

Relasi komutasi ini mencerminkan hubungan antara komponen-komponen momentum angular dan prinsip rotasi dalam ruang tiga dimensi.

3. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Komutator secara langsung terkait dengan **prinsip ketidakpastian Heisenberg**, yang menyatakan bahwa untuk dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ jika komutator mereka tidak nol, maka terdapat batasan pada ketepatan pengukuran simultan observabel yang mereka wakili. Secara matematis, prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk dua observabel A dan B adalah:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|$$

Jika komutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ =0, kedua besaran tersebut dapat diukur secara simultan dengan presisi tak terbatas. Namun, jika $[\hat{A}, \hat{B}]$ ≠0, ada batas pada ketepatan yang dapat dicapai dalam pengukuran simultan.

4. Komutator dan Evolusi Waktu

Dalam mekanika kuantum, evolusi waktu dari operator $\hat{A}$ ditentukan oleh komutatornya dengan Hamiltonian $\hat{H}$ dari sistem. Jika $\hat{A}(t)$ adalah operator dalam representasi Heisenberg, maka evolusinya dalam waktu diatur oleh persamaan:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}]$$

Komutator dengan Hamiltonian menentukan bagaimana suatu observabel berubah seiring waktu, dan ini adalah bentuk umum dari persamaan gerak Heisenberg**.**

RANGKUMAN

Dalam mekanika kuantum, operator adalah alat matematis yang digunakan untuk menggambarkan pengukuran besaran fisis seperti momentum, energi, dan posisi. Operator bertindak pada fungsi gelombang *ψ(x)* dan mengubah fungsi tersebut menjadi bentuk lain yang terkait dengan besaran yang sedang diukur.

Operator dapat dituliskan dalam bentuk diferensial, misalnya:

- Operator posisi: $\hat{x} = x$
- Operator momentum: $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$
- Operator energi (Hamiltonian): $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x)$

Besaran fisis yang diukur dalam mekanika kuantum dikaitkan dengan nilai eigen dari operator tersebut. Misalnya, ketika kita menerapkan operator momentum pada fungsi gelombang, nilai eigen yang dihasilkan adalah momentum partikel yang diukur.

Operator Hermitian memiliki peran penting dalam fisika kuantum karena operator-operator yang merepresentasikan besaran yang dapat diukur (observables) selalu bersifat Hermitian. Sifat utama dari operator Hermitian adalah bahwa nilai eigen yang dihasilkannya selalu bilangan real, sehingga cocok untuk menggambarkan pengukuran fisik. Sebagai contoh, operator momentum dan energi (Hamiltonian) adalah operator Hermitian, dan mereka memiliki spektrum nilai eigen yang dapat diukur secara fisis.

Komutator dalam mekanika kuantum mengukur ketidaksalingbebasan (non-commutativity) antara dua operator. Jika dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ memiliki komutator non-nol, maka pengukuran dua besaran yang diwakili oleh operator tersebut tidak dapat dilakukan secara bersamaan dengan akurasi yang sempurna. Komutator dari dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ didefinisikan sebagai:$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

Salah satu contoh komutator penting dalam fisika kuantum adalah komutator antara operator posisi $\hat{x}$ dan operator momentum $\hat{p}$: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Komutator ini menjadi dasar dari Prinsip Ketidakpastian Heisenberg**,** yang menyatakan bahwa terdapat batasan dalam akurasi pengukuran posisi dan momentum secara bersamaan. Semakin tepat posisi partikel diukur, semakin tidak pasti pengukuran momentumnya, dan sebaliknya.

Prinsip ini dapat dinyatakan sebagai: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Artinya, produk dari ketidakpastian dalam posisi Δx dan momentum Δp tidak bisa lebih kecil dari $\frac{\hbar}{2}$. Ini merupakan konsekuensi langsung dari komutator antara posisi dan momentum.

Operator dalam mekanika kuantum bertindak pada fungsi gelombang untuk memberikan informasi tentang besaran fisik yang diukur, seperti posisi, momentum, dan energi.

Operator Hermitian penting karena mereka memiliki nilai eigen real yang cocok untuk menggambarkan hasil pengukuran fisis.

Komutator mengukur ketidakmampuan untuk mengukur dua besaran secara bersamaan dengan akurasi sempurna, dengan komutator antara posisi dan momentum menjadi dasar dari prinsip ketidakpastian Heisenberg.

LATIHAN

1. Diberikan fungsi gelombang partikel dalam satu dimensi sebagai berikut:

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

   dengan A dan k adalah konstanta. Tentukan:

a. Hitung momentum partikel menggunakan operator momentum $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

b. Apakah fungsi gelombang ini merupakan eigenfungsi dari operator momentum?

2. Diberikan operator $\hat{A} = -i\frac{d}{dx}$ Periksa apakah operator ini merupakan operator Hermitian.
   a. Gunakan definisi operator Hermitian: $\langle \phi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}\phi | \psi \rangle$, dan periksa apakah operator $\hat{A}$ memenuhi syarat ini.
   b. Berikan kesimpulan apakah $\hat{A}$ adalah Hermitian atau bukan.

Kegiatan belajar 3

F. Representasi Matriks dalam Fisika Kuantum

Dalam fisika kuantum, representasi matriks adalah salah satu cara penting untuk menggambarkan operator dan fungsi gelombang. Matriks digunakan untuk merepresentasikan operator yang bekerja pada ruang vektor keadaan kuantum (ruang Hilbert). Pendekatan ini pertama kali dikembangkan oleh Werner Heisenberg dalam **mekanika matriks**, yang menjadi salah satu formulasi awal dari mekanika kuantum. Berikut adalah uraian tentang representasi matriks dalam konteks fisika kuantum.

1. Vektor Keadaan (State Vectors) dalam Basis Diskret

Dalam fisika kuantum, keadaan sistem kuantum dinyatakan oleh vektor keadaan $|\psi\rangle$ di ruang Hilbert. Dalam basis diskret (misalnya, basis eigen fungsi dari suatu operator observabel seperti operator posisi atau momentum), vektor keadaan ini dapat diwakili sebagai kolom vektor. Misalnya, jika $|\psi\rangle$ adalah keadaan sistem, maka dalam basis $|n\rangle$, kita memiliki:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

di mana c_n adalah komponen $|\psi\rangle$ dalam basis $|n\rangle$. Dalam representasi matriks, vektor keadaan $|\psi\rangle$ ditulis sebagai:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Setiap komponen c_n adalah amplitudo probabilitas untuk menemukan sistem dalam keadaan $|n\rangle$, dan informasi ini direpresentasikan sebagai entri dalam vektor kolom.

2. Operator sebagai Matriks

Operator kuantum, yang bertindak pada vektor keadaan, juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Jika $\hat{A}$ adalah operator, maka elemen matriks dari $\hat{A}$ dalam basis $|n\rangle$ diberikan oleh:

$$A_{mn} = \langle m|\hat{A}|n\rangle$$

di mana $\langle m|$ adalah fungsi eigen dari operator observabel. Elemen matriks A_{mn} menunjukkan bagaimana operator $\hat{A}$ "menghubungkan" basis $|n\rangle$ dan $|m\rangle$.

Secara umum, operator kuantum $\hat{A}$ dalam basis diskret dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Elemen-elemen A_{mn} menentukan cara operator $\hat{A}$ bertindak pada vektor keadaan $|\psi\rangle$.

3. Representasi Matriks dari Operator Observabel

Dalam fisika kuantum, observabel fisik seperti posisi $\hat{x}$ momentum $\hat{p}$, energi $\hat{H}$, dan momentum angular $\hat{L}$ sering kali direpresentasikan sebagai operator dalam bentuk matriks.

a. Operator Posisi dan Momentum

Operator posisi $\hat{x}$ dan momentum $\hat{p}$ dalam basis momentum atau basis posisi dapat direpresentasikan sebagai matriks, yang bertindak pada fungsi gelombang. Sebagai contoh, dalam basis momentum, operator posisi $\hat{x}$ mungkin memiliki elemen matriks yang rumit tergantung pada transformasi Fourier antara basis posisi dan momentum.

b. Operator Spin

Representasi matriks operator spin sering digunakan dalam sistem dua tingkat (seperti spin-1/2). Operator spin $\hat{S}_x, \hat{S}_y\ dan\ \hat{S}_z$ memiliki representasi matriks dalam basis eigen dari $\hat{S}_z$. Sebagai contoh, matriks Pauli σ_x, σ_y dan σ_z $|+\rangle$ dan $|-\rangle$ adalah:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Operator-operator ini digunakan untuk menggambarkan observasi spin dan interaksi spin dengan medan magnet dalam sistem dua tingkat.

4. Transformasi Matriks (Representasi Basis yang Berbeda)

Keadaan kuantum dan operator bisa dinyatakan dalam basis yang berbeda, seperti basis posisi atau momentum. Untuk berpindah dari satu basis ke basis lain, kita menggunakan transformasi matriks. Jika $\hat{A}$ adalah operator dalam suatu basis, maka transformasi ke basis lain diberikan oleh matriks transformasi T, dan operator baru dalam basis tersebut adalah:

$$\hat{A}' = T\hat{A}T^{-1}$$

Transformasi ini sering digunakan dalam representasi spin, momentum angular, dan simetri dalam fisika kuantum.

5. Operator Hermitian dalam Representasi Matriks

Operator Hermitian, yang memiliki nilai eigen real, sering kali direpresentasikan dalam bentuk matriks simetri. Jika $\hat{A}$ adalah operator Hermitian, maka elemen-elemen matriksnya memenuhi:

$$A_{mn} = A^{*}_{mn}$$

Dengan kata lain, matriks dari operator Hermitian adalah matriks yang transpos konjugatnya sama dengan dirinya sendiri. Contoh paling umum dari operator Hermitian adalah Hamiltonian dalam sistem fisika kuantum.

6. Contoh Representasi Matriks untuk Operator

Berikut adalah contoh representasi matriks dari beberapa operator kuantum dalam basis diskret.

a. Hamiltonian untuk Osilator Harmonik Kuantum

Hamiltonian osilator harmonik kuantum dalam basis keadaan $|n\rangle$ diberikan oleh:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Elemen-elemen matriks Hamiltonian dalam basis $|n\rangle$ berbentuk diagonal:

$$H_{nm} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ini menunjukkan bahwa energi sistem kuantum pada tingkat nnn adalah diskret, dengan nilai $E_{nm} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

b. Operator Momentum Angular

Operator momentum angular dalam basis momentum angular $|l,\mathrm{m}\rangle$ dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Misalnya, elemen matriks dari operator $\hat{L}_z$ dalam basis $|l,\mathrm{m}\rangle$ adalah diagonal:

$$\hat{L}_z \mid l, \mathrm{m}\rangle = \hbar \mathrm{m} \mid l, \mathrm{m}\rangle$$

Dalam representasi matriks, operator $\hat{L}_z$, menjadi matriks diagonal dengan nilai eigen $\hbar m$ di sepanjang diagonal.

7. Keuntungan Representasi Matriks

a. **Keterhubungan dengan Aljabar Linear**: Representasi matriks membuat banyak perhitungan kuantum menjadi lebih sederhana, karena kita dapat menggunakan teknik-teknik aljabar linear seperti diagonaliasi, inversi matriks, dan perkalian matriks untuk menyelesaikan masalah.

b. **Keterkaitan dengan Basis**: Representasi matriks memungkinkan kita memproyeksikan operator dan keadaan kuantum ke dalam basis yang berbeda untuk memperoleh hasil pengukuran yang diinginkan.

c. **Numerik dan Komputasional**: Representasi matriks sangat berguna dalam pendekatan numerik dan komputasional, seperti dalam metode matriks densitas atau simulasi Monte Carlo untuk sistem kuantum kompleks.

RANGKUMAN

Dalam fisika kuantum, representasi matriks adalah salah satu cara untuk menggambarkan operator dan fungsi gelombang dalam bentuk matriks dan vektor. Pendekatan ini penting karena banyak sistem kuantum dapat dianalisis lebih mudah menggunakan aljabar matriks, terutama ketika mempelajari ruang keadaan yang diskrit, seperti dalam sistem dengan beberapa tingkat energi.

Operator yang bertindak pada fungsi gelombang dapat direpresentasikan sebagai matriks, dan fungsi gelombang itu sendiri sebagai vektor dalam ruang Hilbert. Penggunaan representasi matriks sangat umum dalam teori matriks di fisika kuantum, seperti pada teori spin, osilator harmonik kuantum, dan sistem dengan tingkat energi terkuantisasi.

Fungsi gelombang dalam ruang Hilbert direpresentasikan sebagai vektor kolom (vektor keadaan), sedangkan operator yang bertindak pada fungsi gelombang direpresentasikan sebagai matriks. Ruang Hilbert adalah ruang vektor berdimensi tak hingga atau berhingga, di mana setiap keadaan kuantum dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi basis yang ortogonal. Dalam representasi matriks, fungsi basis ini dinyatakan sebagai vektor standar. Misalnya, fungsi gelombang suatu partikel dapat dinyatakan sebagai:

$$| \psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Operator yang bertindak pada fungsi gelombang, seperti operator momentum atau energi, direpresentasikan sebagai matriks.

Operator dalam mekanika kuantum seperti posisi $\hat{x}$, momentum $\hat{p}$, dan Hamiltonian $\hat{H}$, dapat direpresentasikan sebagai matriks. Misalnya, dalam basis tertentu, operator momentum dapat memiliki bentuk matriks yang berbeda tergantung pada basis yang dipilih. Operator Hermitian dalam fisika kuantum, yang digunakan untuk mewakili besaran fisik yang terukur, direpresentasikan oleh matriks Hermitian. Matriks Hermitian memiliki elemen-elemen yang simetris terhadap diagonalnya dan memiliki nilai eigen yang real, sesuai dengan fakta bahwa besaran fisik harus menghasilkan hasil pengukuran yang real.

Representasi matriks adalah metode penting dalam fisika kuantum yang memungkinkan penyederhanaan analisis sistem kuantum, terutama ketika bekerja dengan ruang keadaan diskrit atau sistem yang terkuantisasi. Dengan mengubah fungsi gelombang menjadi vektor dan operator menjadi matriks, kita dapat menerapkan teknik aljabar matriks untuk menyelesaikan berbagai masalah kuantum. Representasi ini sangat berguna dalam perhitungan nilai eigen, analisis komutator, dan studi operator Hermitian.

LATIHAN

1. Diberikan basis $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ di mana operator posisi $\hat{x}$, dalam basis ini direpresentasikan oleh matriks berikut:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

a. Tentukan nilai eigen dari operator posisi $\hat{x}$.
b. Apakah matriks $\hat{x}$ ini merupakan operator Hermitian?

2. Diberikan dua operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ dalam basis tertentu dengan matriks berikut:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a. Hitung komutator $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

b. Apakah kedua operator ini saling komutatif? Jelaskan apa implikasi dari hasil ini dalam fisika kuantum.

DAFTAR PUSTAKA

Griffiths, D. J. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics* (3rd ed.). Pearson.

Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (2019). *Quantum Mechanics* (Vol. 1 & 2). Wiley.

Shankar, R. (2020). *Principles of Quantum Mechanics* (2nd ed.). Springer.

Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2017). *Modern Quantum Mechanics* (2nd ed.). Addison-Wesley.

Merzbacher, E. (2020). *Quantum Mechanics* (3rd ed.). Wiley.

Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary ed.). Cambridge University Press.

Feynman, R. P., & Hibbs, A. R. (2010). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications.

Ballentine, L. E. (2014). *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific.