# LINIER PROGRAMMING

**Prinsip:**

Setiap organisasi berusaha mencapai tujuan yang telah ditetapkan sesuai dengan keterbatasan sumber daya.

**Linier Programming:**

Teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumber daya secara optimal

# LINIER PROGRAMMING

**suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Masalah tersebut timbul apabila seseorang diharuskan untuk memilih atau menentukan tingkat setiap kegiatan yang akan dilakukannya, dimana masing-masing kegiatan membutuhkan sumber yang sama sedangkan jumlahnya terbatas**

# Model linier Programming:

- Pengertian, Contoh masalah dan Perumusan model
- Metode penyelesaian (grafik dan simpleks)
- Interpretasi hasil
- Analisis sensistivitas
- Penyimpangan-penyimpangan dari bentuk baku
- Model Dualitas
- Penyelesaian kasus (Aplikasi paket komputer)

**Penerapan:** Pengalokasian Sumberdaya

- Perbankan : portofolio investasi
- Periklanan
- Industri manufaktur : penggunaan mesin – kapasitas produksi
- Pengaturan komposisi bahan makanan
- Distribusi dan pengangkutan
- Penugasan karyawan

## Karakteristik Persoalan LP:

- Ada tujuan yang ingin dicapai
- Tersedia beberapa alternatif untuk mencapai tujuan
- Sumberdaya dalam keadaan terbatas
- Dapat dirumuskan dalam bentuk matematika (persamaan/ketidaksamaan)

Contoh pernyataan ketidaksamaan:

Untuk menghasilkan sejumlah meja dan kursi secara optimal, total biaya yang dikeluarkan tidak boleh lebih dari dana yang tersedia.

Pernyataan bersifat normatif

## Dalam model LP dikenal 2 (dua) macam "fungsi",

1. **Fungsi tujuan** adalah fungsi yang menggambarkan tujuan sasaran di dalam permasalahan LP yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumberdaya-sumberdaya, untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal. Pada umumnya nilai yang akan dioptimalkan dinyatakan sebagai **Z**.

2. **Fungsi batasan** merupakan bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

# MODEL LP

| Kegiatan Sumber | Pemakaian sumber per unit Kegiatan (keluaran) | | | | | Kapasitas Sumber |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | …. | n | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | …. | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | …. | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | …. | $a_{3n}$ | $b_3$ |
| … | … | … | … | | … | … |
| m | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{m3}$ | …. | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| ΔZ pertambahan tiap unit | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | | $C_n$ | |
| Tingkat kegiatan | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | | $X_n$ | |

Model Matematis???

# Model Matematis

- Fungsi tujuan:
  - Maksimumkan $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$
- Batasan :

1. $a_{11}X_{11} + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$
2. $a_{21}X_{11} + a_{22}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_1$

.....

m. $a_{m1}X_{11} + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$

dan

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ \ldots\ldots\ X_n \geq 0$

# Asumsi-asumsi Dasar linier Programming

1. **Proportionality**

   naik turunnya nilai Z dan penggunaan sumber atau fasilitas yang tersedia akan berubah secara *sebanding* (proportional) dengan perubahan tingkat kegiatan

2. **Additivity**

   nilai tujuan tiap kegiatan tidak saling mempengaruhi, atau dalam LP dianggap bahwa kenaikan dari nilai tujuan (Z) yang diakibatkan oleh kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai Z yang diperoleh dari kegiatan lain

# Asumsi-asumsi Dasar linier Programming

3. **Divisibility**

   keluaran (output) yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa bilangan pecahan. Demikian pula dengan nilai Z yang dihasilkan

4. **Deterministic (Certainty)**

   Asumsi ini menyatakan bahwa semua parameter yang terdapat dalam model LP ($a_{ij}$, $b_i$ $C_j$) dapat diperkirakan dengan pasti, meskipun jarang dengan tepat

# Metode penyelesaian masalah:

- ✓ Grafis (2 variabel)
- ✓ Matematis (Simplex method)

**Contoh Persoalan: 1 (Perusahaan Meubel)**

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan.

Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesan hanya 48 jam kerja. Utk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan utk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan,

Laba utk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing Rp. 80.000 dan Rp. 60.000,-

Berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?

## Perumusan persoalan dlm bentuk tabel:

| Proses | Waktu yang dibutuhkan per unit | | Total jam tersedia |
|---|---|---|---|
| | Meja | Kursi | |
| Perakitan | 4 | 2 | 60 |
| Pemolesan | 2 | 4 | 48 |
| Laba/unit | 80.000 | 60.000 | |

## Perumusan persoalan dlm bentuk matematika:

Maks.: Laba = 8 M + 6 K (dlm satuan Rp.10. 000)

Dengan kendala:

$$4M + 2K \leq 60$$
$$2M + 4K \leq 48$$
$$M \geq 0$$
$$K \geq 0$$

# Langkah-langkah dalam Perumusan Model LP

1. Definisikan Variabel Keputusan (Decision Variable)
   - ☑ Variabel yang nilainya akan dicari
2. Rumuskan Fungsi Tujuan:
   - ☑ Maksimisasi atau Minimisasi
   - ☑ Tentukan koefisien dari variabel keputusan
3. Rumuskan Fungsi Kendala Sumberdaya:
   - ☑ Tentukan kebutuhan sumber daya untuk masing-masing peubah keputusan.
   - ☑ Tentukan jumlah ketersediaan sumber daya sebagai pembatas.
4. Tetapkan kendala non-negatif
   - ☑ Setiap keputusan (kuantitatif) yang diambil tidak boleh mempunyai nilai negatif.

# Perumusan persoalan dalam model LP.

- ☑ **Definisi variabel keputusan:**

  Keputusan yang akan diambil adalah berapakah jumlah meja dan kursi yang akan dihasilkan. Jika meja disimbolkan dgn M dan kursi dengan K, maka definisi variabel keputusan:

  M = jumlah meja yang akan dihasilkan (dlm satuan unit)
  K = jumlah kursi yang akan dihasilkan (dlm satuan unit)

- ☑ **Perumusan fungsi tujuan:**

  Laba utk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing Rp. 80.000 dan Rp. 60.000. Tujuan perusahaan adalah untuk memaksimumkan laba dari sejumlah meja dan kursi yang dihasilkan. Dengan demikian, fungsi tujuan dpt ditulis:

  Maks.: Laba = 8 M + 6 K (dlm satuan Rp.10. 000)

## ☑ Perumusan Fungsi Kendala:

- **Kendala pada proses perakitan:**

  Utk menghasilkan 1 buah meja diperlukan waktu 4 jam dan utk menghasilkan 1 buah kursi diperlukan waktu 2 jam pd proses perakitan. Waktu yang tersedia adalah 60 jam.

  $$4M + 2K \leq 60$$

- **Kendala pada proses pemolesan:**

  Utk menghasilkan 1 buah meja diperlukan waktu 2 jam dan utk menghasilkan 1 buah kursi diperlukan waktu 4 jam pd proses pemolesan. Waktu yang tersedia adalah 48 jam.

  $$2M + 4K \leq 48$$

- **Kendala non-negatif:**

  Meja dan kursi yang dihasilkan tidak memiliki nilai negatif.

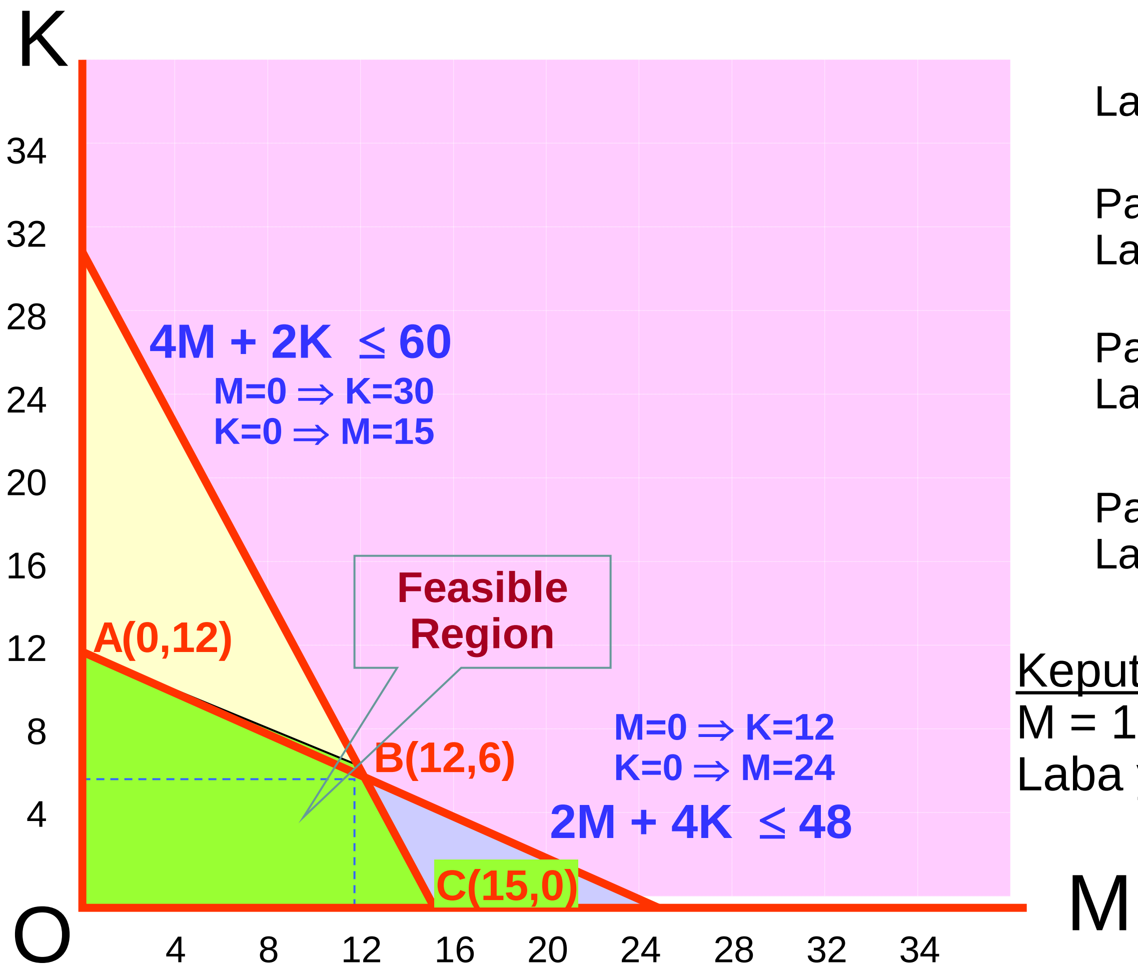
  $$M \geq 0$$

  $$K \geq 0$$

# Penyelesaian secara grafik:

(Hanya dapat dilakukan untuk model dengan 2 decision variables)

Gambarkan masing-masing fungsi kendala pada grafik yang sama.




Laba = 8M + 6K

Pada A: M = 0, K = 12
Laba = 6 (12) = 72

Pada B: M = 12, K = 6
Laba = 8(12) + 6(6) = 132

Pada C: M = 15, K = 0
Laba = 8 (15) = 120

<u>Keputusan:</u>
M = 12 dan K = 6
Laba yang diperoleh = 132.000

## Contoh Persoalan: 2 (Reddy Mikks Co.)

Reddy Mikks Co. mempunyai sebuah pabrik kecil yang menghasilkan 2 jenis cat yaitu utk interior dan eksterior. Bahan baku utk cat tsb adalah bahan A dan bahan B, yang masing2 tersedia maksimum 6 ton dan 8 ton per hari. Kebutuhan masing2 jenis cat per ton thdp bahan baku disajikan pd tabel berikut:

| Bahan baku | Kebuthn bahan baku per ton cat | | Ketersediaan Maksimum (ton) |
|---|---|---|---|
| | Eksterior | Interior | |
| Bahan A | 1 | 2 | 6 |
| Bahan B | 2 | 1 | 8 |

Permintaan harian cat interior lebih tinggi dari permintaan cat eksterior, tetapi tidak lebih dari 1 ton per hr. Sedangkan permintaan cat interior maksimum 2 ton per hari. Harga cat interior dan eksterior masing-masing 3000 dan 2000.

Berapa masing-masing cat harus diproduksi oleh perusahaan utk memaksimumkan pendapatan kotor?

# Perumusan persoalan kedalam model LP

**Definisi variabel keputusan:**

CE = jmlh cat eksterior yang diproduksi (ton/hari)
CI = jmlh cat interior yang diproduksi (ton/hari)

☑ **Perumusan fungsi tujuan:**

Maks.: Pdpt kotor, $Z = 3\ CE + 2\ CI$ (dlm ribuan)

☑ **Perumusan Fungsi Kendala:**

- **Kendala ketersediaan bahan baku A:**

  $CE + 2\ CI \leq 6$

- **Kendala ketersediaan bahan baku B:**

  $2\ CE + CI \leq 8$

- **Kendala Permintaan :**

  $CI - CE \leq 1$ : jml maks Kelebihan CI dibading CE

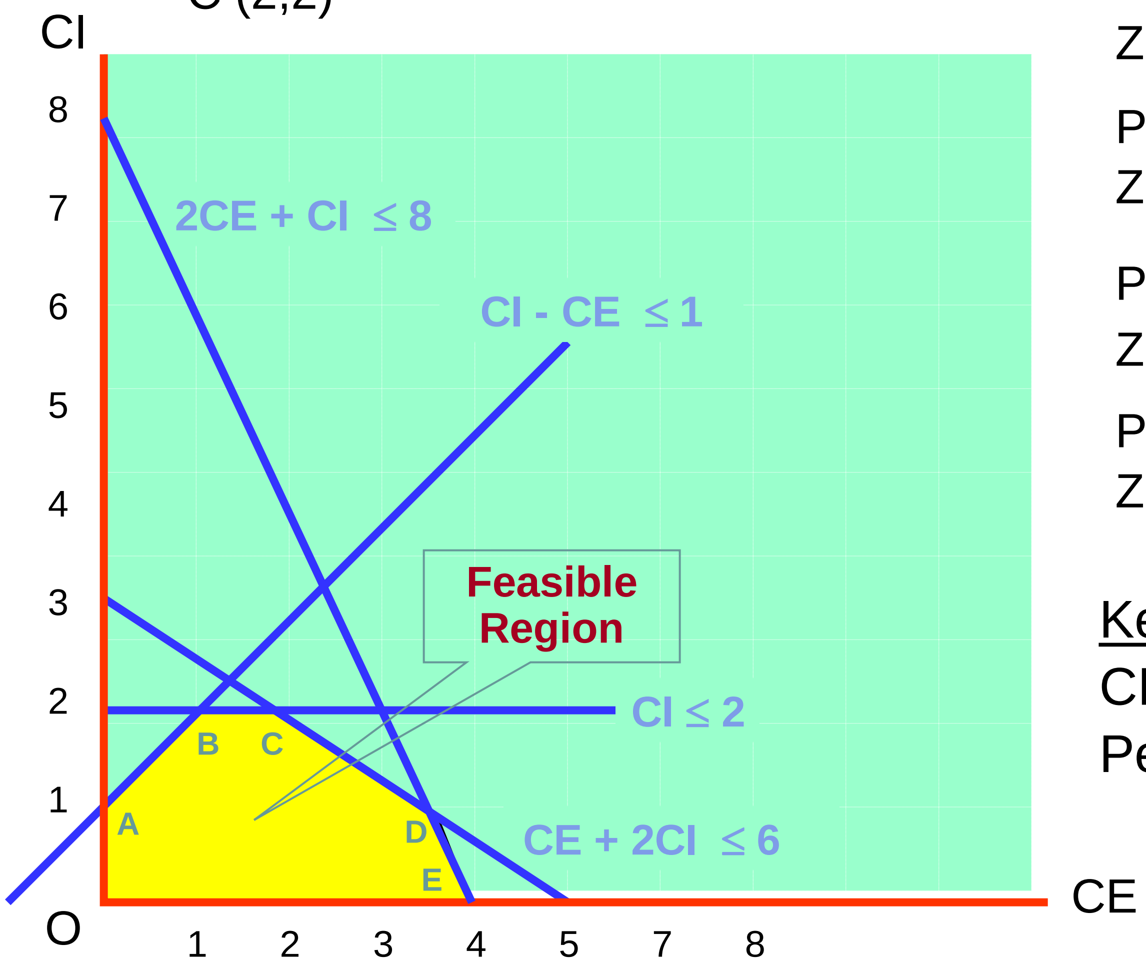
  $CI \leq 2$ : permintaan maks CI

- **Kendala non-negatif:**

  $CI \geq 0;\ CE \geq 0.$

# Penyelesaian secara grafik:

A (0,1)
B (1,2)
C (2,2)
D ($3^1/_3$, $1^1/_3$)
E (4,0)




Pendapatan kotor:
$Z = 3\ CE + 2\ CI$

Pada A:
$Z = 3(0) + 2(1) = 2$

Pada B:
$Z = 3(1) + 2(2) = 7$

Pada C:
$Z = 3(2) + 2(2) = 10$

Pada D:
$Z = 3(3^1/_3) + 2(1^1/_3) = 12^2/_3$

Pada E:
$Z = 3(4) + 2(0) = 12$

<u>Keputusan:</u>
CE = $3^1/_3$ dan CI = $1^1/_3$
Pendapatan kotor:
$Z = 12^2/_3$ ribu.

# Beberapa konsep penting dalam penyelesaian persoalan LP

- **Extreme points:**

  Titik-titik sudut daerah kelayakan (feasbile region)

- Infeasible Solution:

  Tidak ada solusi karena tdk semua kendala terpenuhi.

- Unbounded Solution:

  Solusi yang disbebabkan karena fungsi tujuan dibuat tanpa batas dan tdk melanggar funggsi kendala.

- Redundancy:

  Redundancy terjadi karena adanya kendala yang tdk mempengaruhi daerah kelayakan.

- Alternative optima:

  Solusi yang tdk memberikan nilai yang unik, terjadi bila garis fungsi tujuan berimpit dgn garis salah satu kendala.

# linier PROGRAMMING DENGAN METODE GRAFIK

**Contoh :**

Perusahaan sepatu membuat 2 macam sepatu. Yang pertama merek $\mathbf{I_1}$, dgn sol karet, dan merek $\mathbf{I_2}$ dgn sol kulit. Diperlukan 3 macam mesin. Mesin 1 membuat sol karet, mesin 2 membuat sol kulit, dan mesin 3 membuat bagian atas sepatu dan melakukan assembling bagian atas dengan sol. Setiap lusin sepatu merek $\mathbf{I_1}$ mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 2 jam, kemudian tanpa melalui mesin 2 terus dikerjakan di mesin 3 selama 6 jam. Sedang untuk sepatu merek $\mathbf{I_2}$ tidak diproses di mesin 1, tetapi pertama kali dikerjakan di mesin 2 selama 3 jam kemudian di mesin 3 selama 5 jam. Jam kerja maksimum setiap hari mesin 1 adalah 8 jam, mesin 2 adalah 15 jam, dan mesin 3 adalah 30 jam. Sumbangan terhadap laba setiap lusin sepatu merek $\mathbf{I_1}$ = Rp 30.000,00 sedang merek $\mathbf{I_2}$ **=** Rp 50.000,00. Masalahnya adalah menentukan berapa lusin sebaiknya sepatu merek $\mathbf{I_1}$ dan merek $\mathbf{I_2}$ yang dibuat agar bisa memaksimumkan laba.

# Bentuk Tabel

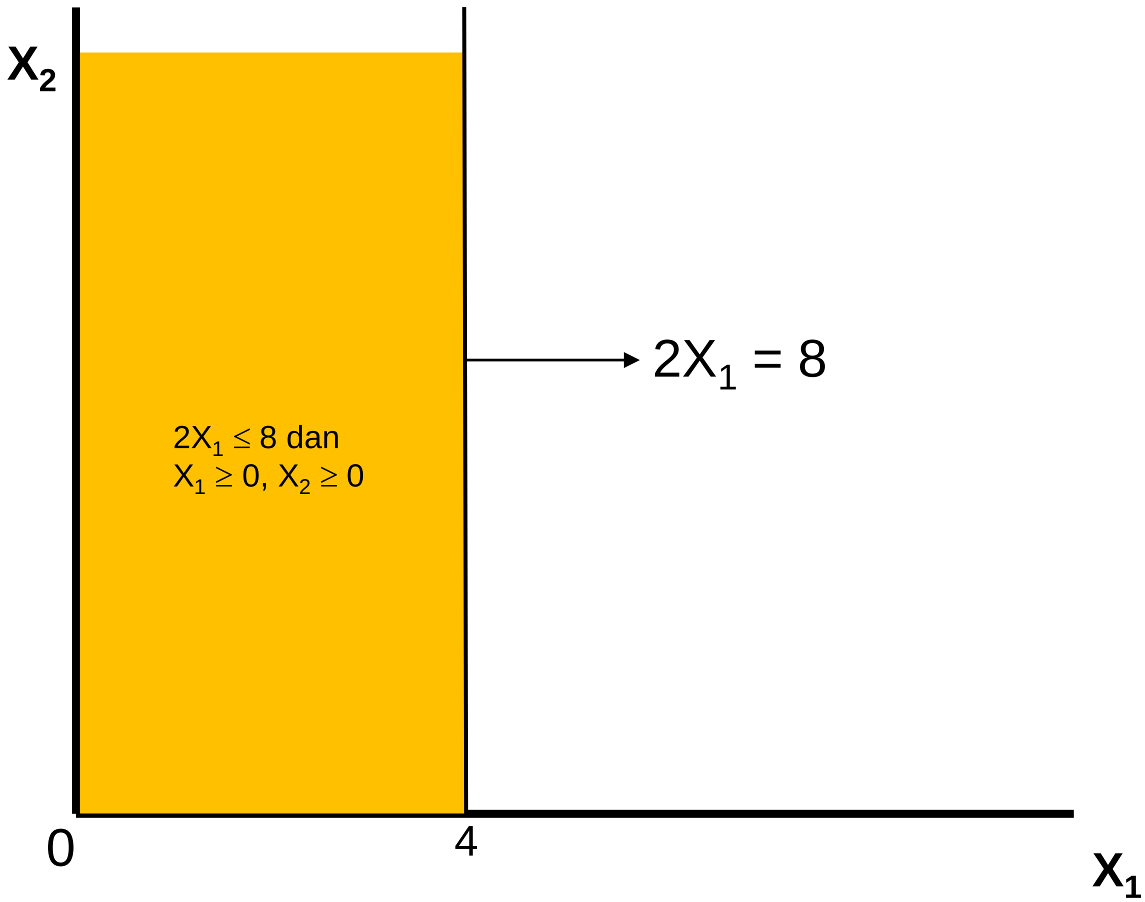
| Merek<br>Mesin | $I_1$<br>$(X_1)$ | $I_2$<br>$(X_2)$ | Kapasitas Maksimum |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 8 |
| 2 | 0 | 3 | 15 |
| 3 | 6 | 5 | 30 |
| Sumbangan laba | 3 | 5 | |

# Bentuk Matematis

- Maksimumkan $Z = 3X_1 + 5X_2$
- Batasan (constrain)

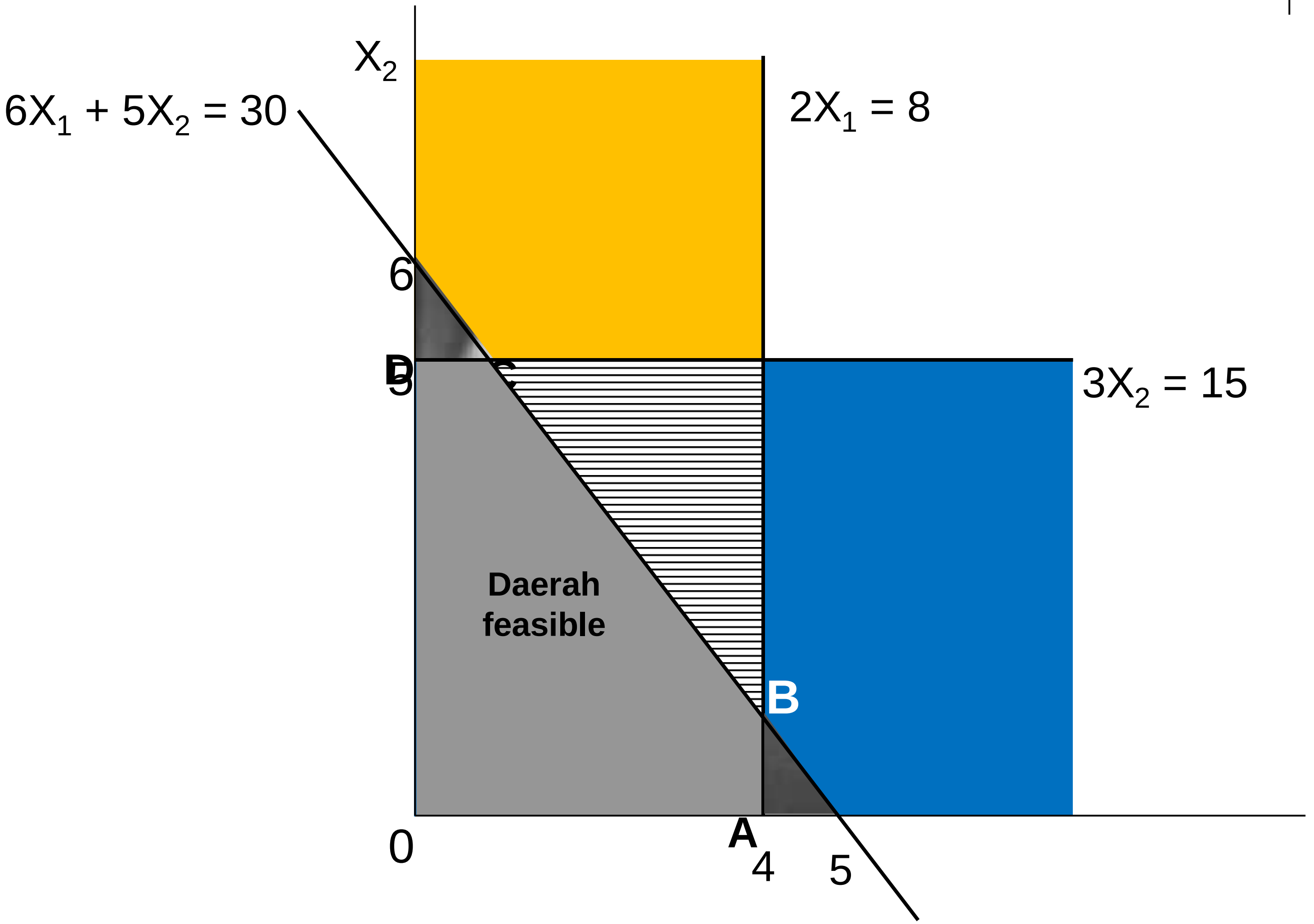
$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 2X_1 & & \leq 8 \\
(2) & & 3X_2 & \leq 15 \\
(3) & 6X_1 + & 5X_2 & \leq 30
\end{array}
$$

# Fungsi batasan pertama ($2 X_1 \leq 8$)



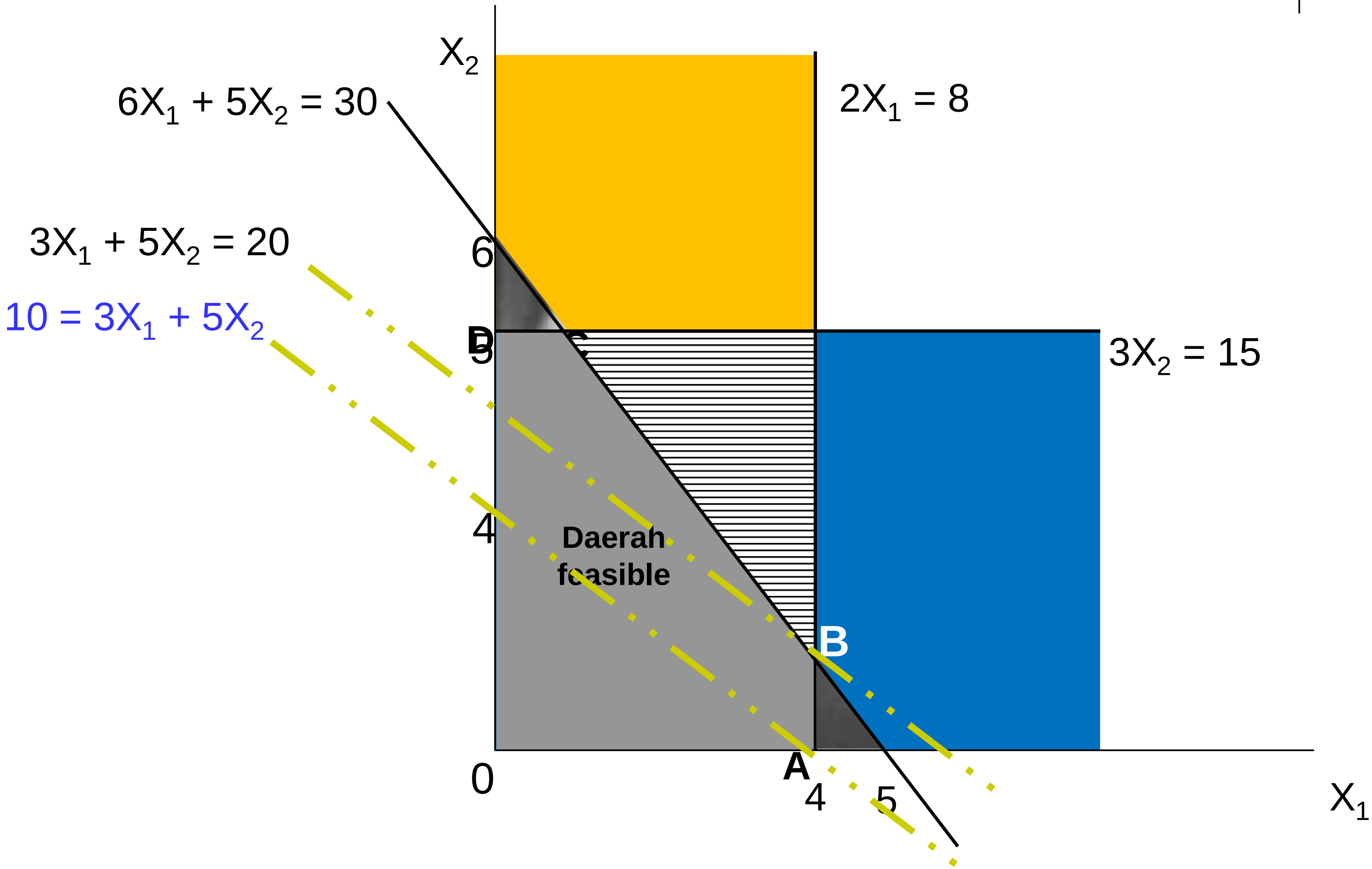

Gambar di atas merupakan bagian yang memenuhi batasan-batasan:
$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ dan $2X_1 \leq 8$

# Fungsi batasan ($2X_1 \leq 8$); $3X_2 \leq 15$; $6X_1 + 5X_2 \leq 30$; $X_1 \geq 0$ dan $X_2 \geq 0$



# MENCARI KOMBINASI YANG OPTIMUM

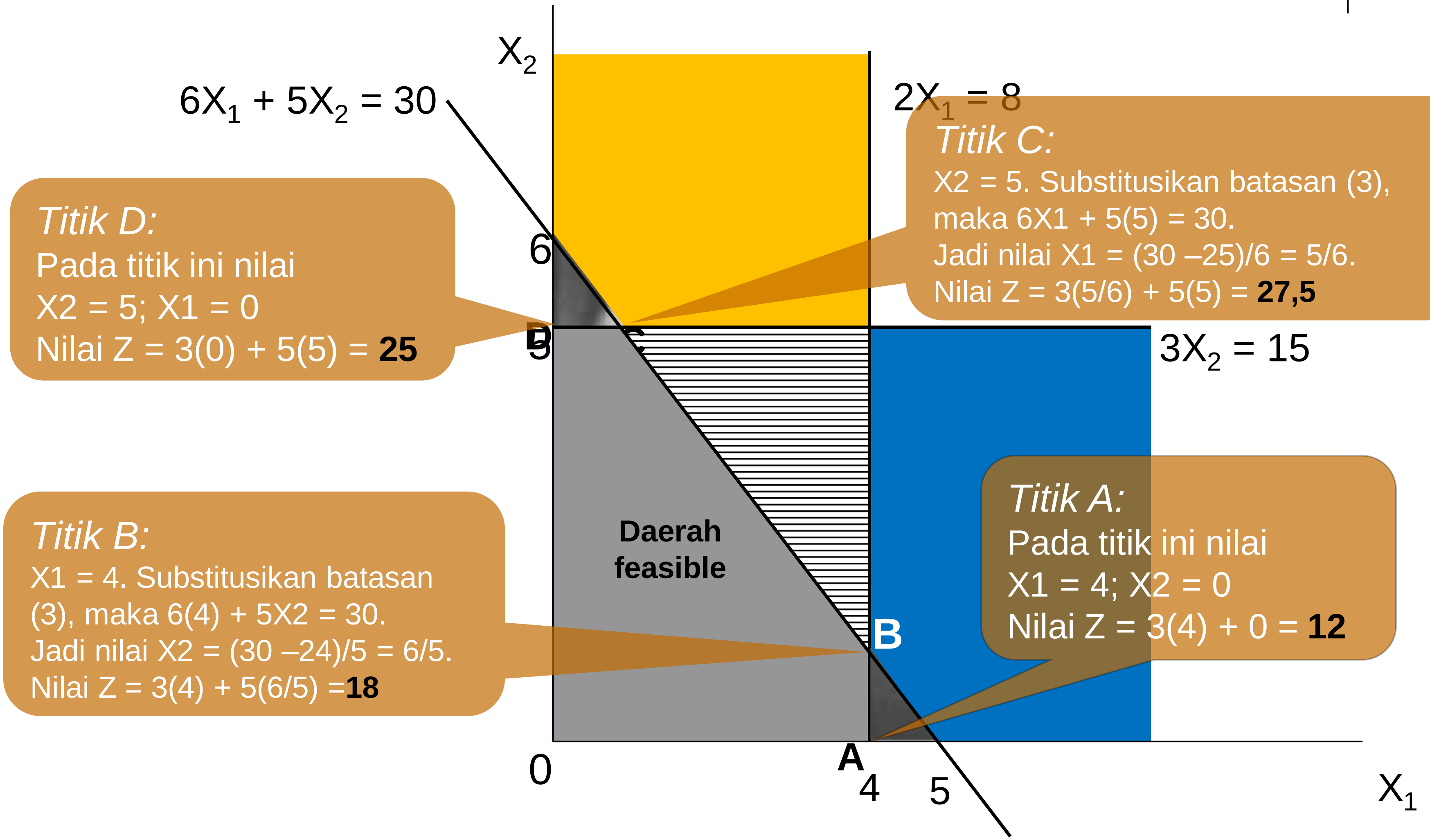
1. Dengan menggambarkan fungsi tujuan



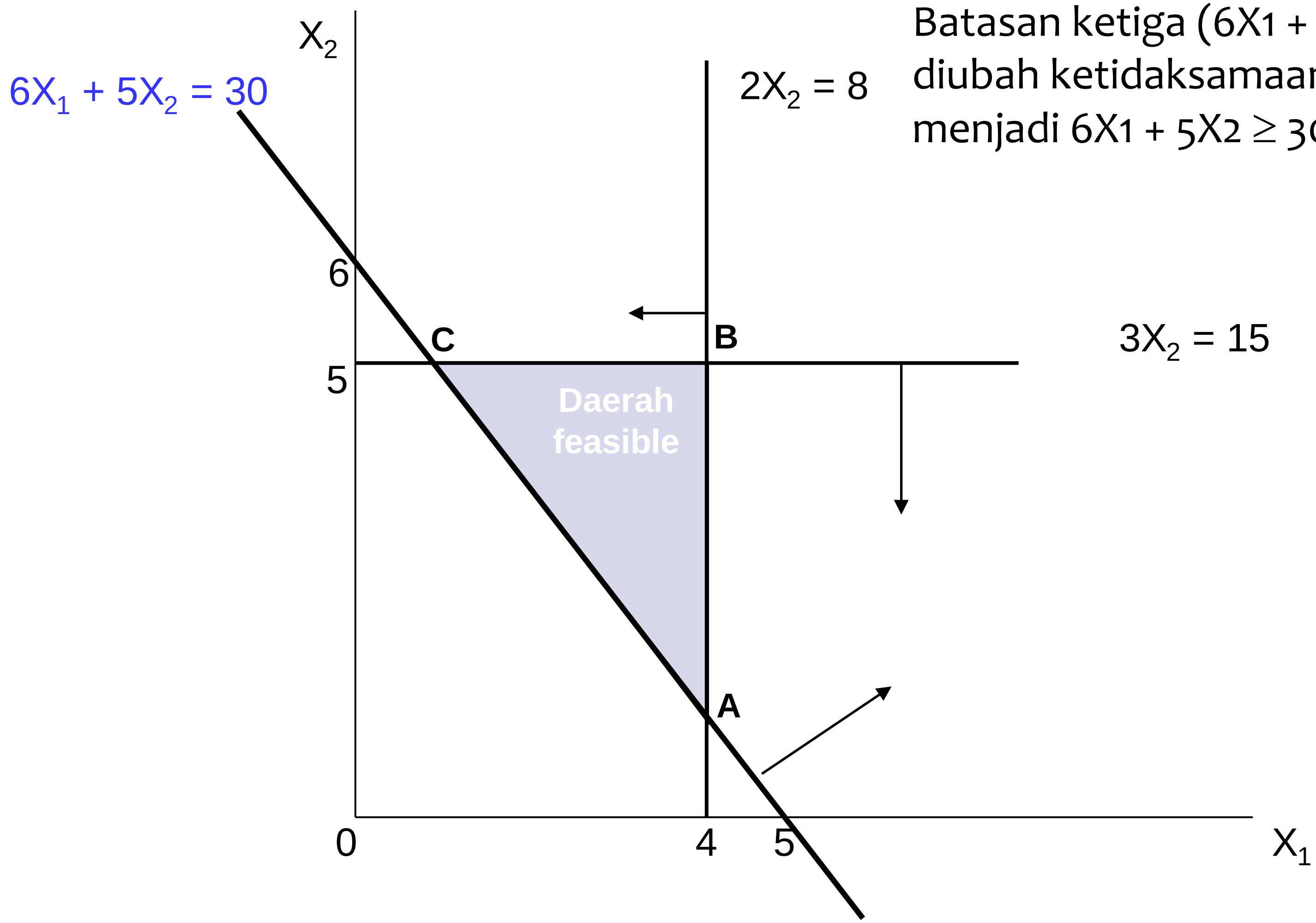
# MENCARI KOMBINASI YANG OPTIMUM

2. Dengan membandingkan nilai Z pada tiap-tiap alternatif

$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

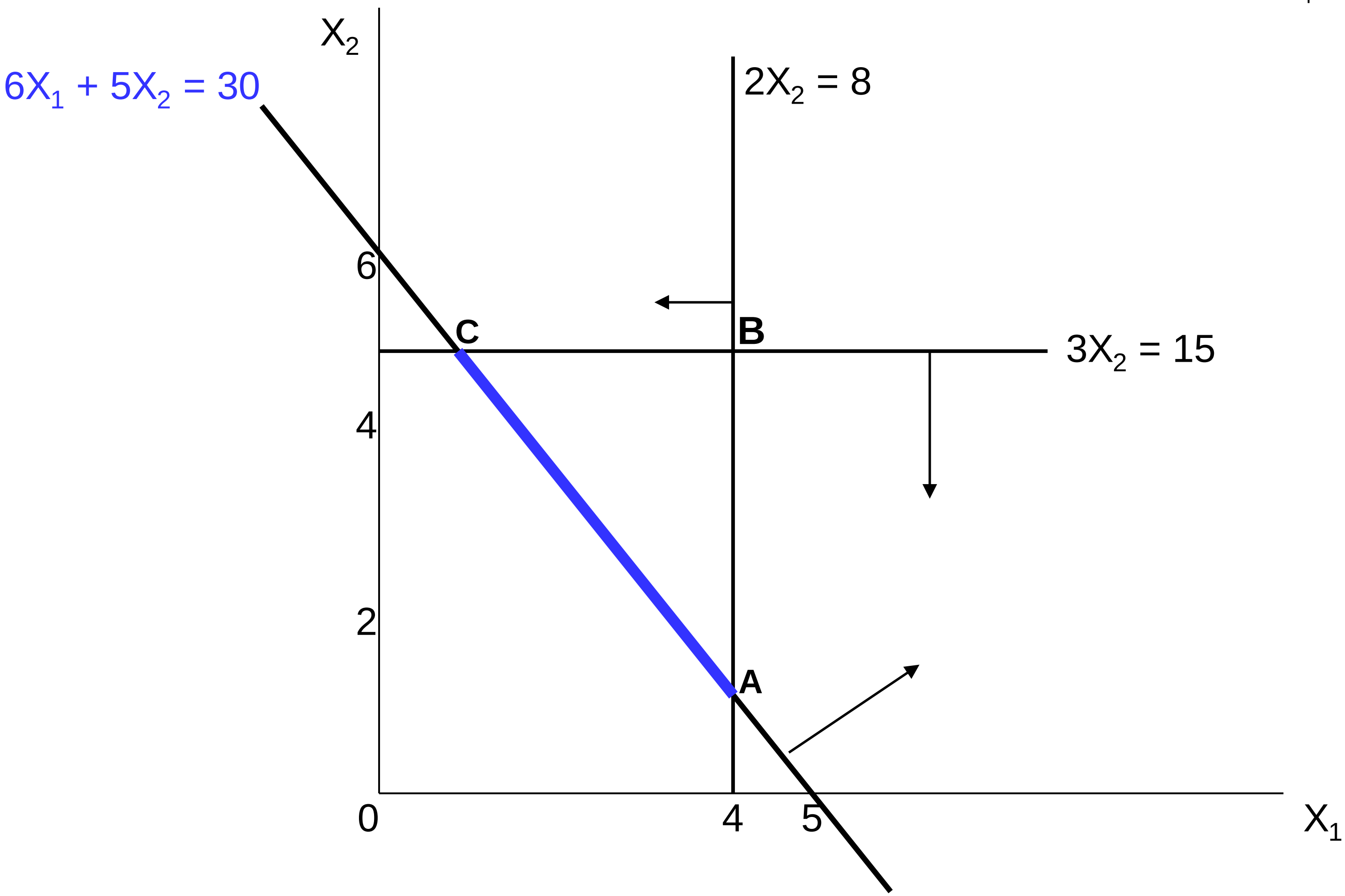


# Fungsi batasan bertanda “lebih besar atau sama dengan ( $\geq$ )




Contoh :
Batasan ketiga ($6X1 + 5X2 \leq 30$) diubah ketidaksamaannya menjadi $6X1 + 5X2 \geq 30$

# Fungsi batasan bertanda “sama dengan” ( = )



# Contoh Minimisasi (Reddy Mikks Co.)

Minimisasi dapat berupa meminimumkan biaya produksi. Solusi optimal tercapai pada saat garis fungsi tujuan menyinggung daerah fasible yang terdekat dengan titik origin.

Perusahaan makanan ROYAL merencanakan untuk membuat dua jenis makanan yaitu Royal Bee dan Royal Jelly. Kedua jenis makanan tersebut mengandung vitamin dan protein. Royal Bee paling sedikit diproduksi 2 unit dan Royal Jelly paling sedikit diproduksi 1 unit. Tabel berikut menunjukkan jumlah vitamin dan protein dalam setiap jenis makanan:

| Kandungan per unit | Jenis makanan | | Kebutuhan minimum |
|---|---|---|---|
| | Royal Bee | Royal Jelly | |
| Vitamin | 2 | 1 | 8 |
| Protein | 2 | 3 | 12 |
| Biaya per unit | 100 | 80 | |

Bagaimana menentukan kombinasi kedua jenis makanan agar meminimumkan biaya produksi.

# Perumusan persoalan kedalam model LP

**Definisi variabel keputusan:**

X1 = Royal Bee
X2 = Royal Jelly

- ☑ **Perumusan fungsi tujuan:**

  Min.: Kebutuhan, $Z = 100X1 + 80\ X2$ (dlm ribuan)

- ☑ **Perumusan Fungsi Kendala:**
  - **Kendala kebutuhan minimum vitamin :**

    $2X1 + X2 \geq 8$
  - **Kendala kebutuhan minimum protein:**

    $2X1 + 3X2 \geq 12$
  - **Kendala Produksi :**

    $X1 \geq 2$ : Produksi minimum Royal Bee

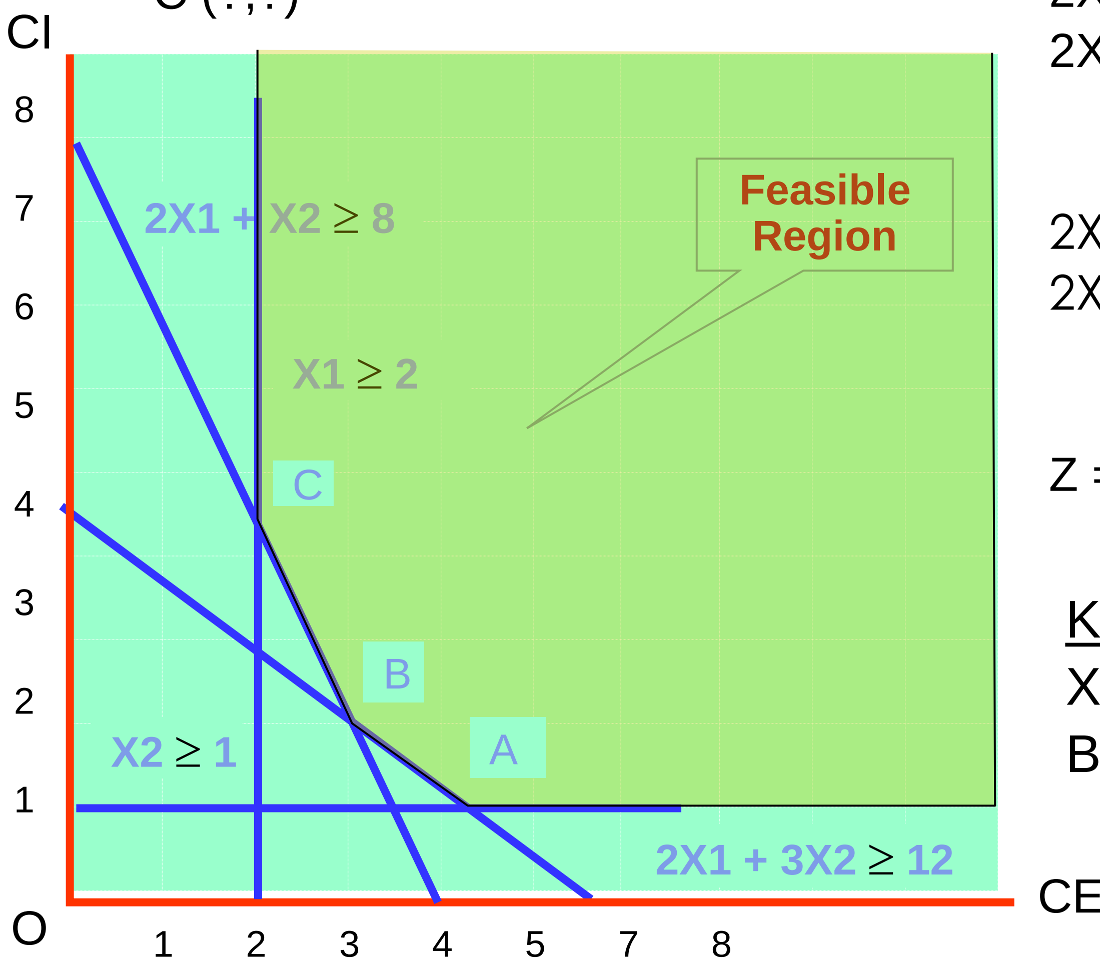
    $X2 \geq 1$ : Produksi minimum Royal Jelly
  - **Kendala non-negatif:**

    $CI \geq 0$; $CE \geq 0$.

# Penyelesaian secara grafik:

Pendapatan kotor:
Z = 100 X1 + 80 X2

A (?,?)
B (3,2)
C (?,?)




Pada titik B :
Terdekat dengan titik origin
2X1+ X2 = 8
2X1+3X2 = 12
-2X2 = -4 → X2 = 2

2X1+ X2 = 8
2X1 + 2 = 8
2X1 = 6 → X1 = 3

Z = 100(3) + 80(2) = 460

<u>Keputusan:</u>
X1 = 3 dan X2 = 2
Biaya Produksi:
Z = 460 ribu.