Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Peta dan Prapeta suatu Titik

1. Jika $x \in D_f$, maka $f(x)$ dinamakan peta dari x.
2. Jika $y \in R_f$, maka himpunan $f^{-1}(y) = \{x \in D_f \mid f(x) = y\}$ dinamakan prapeta dari y.

Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers (Lanjutan)

Peta dan Prapeta suatu Himpunan

1. Jika $A \in D_f$, maka $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ dinamakan peta dari himpunan A.
2. Jika $B \in R_f$, maka himpunan $f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}$ dinamakan prapeta dari himpunan B.

Fungsi Komposisi

Fungsi Komposisi $g \circ f$

Jika f dan g adalah fungsi dengan $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat fungsi dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g. Fungsi ini dinamakan komposisi dari g dan f. Dinotasikan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

1. Daerah definisi $g \circ f$ ialah prapeta dari $R_f \cap D_g$ terhadap f, yaitu

$$D_{g \circ f} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

2. Daerah hasil $g \circ f$ ialah peta dari $R_f \cap D_g$ terhadap g, yaitu

$$R_{g \circ f} = g(R_f \cap D_g) = \{g(t) \in R_g \mid t \in R_f\}$$

Contoh : Tentukan $D_{g \circ f}$ dan $R_{g \circ f}$, jika diketahui $f(x) = 1 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

Tugas Kelompok

Tugas Kelompok

Jika diketahui $f(x) = 1 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Tentukan:

1. D_f, R_f, D_g dan R_g
2. $R_f \cap D_g$
3. $D_{g \circ f}$
4. $R_{g \circ f}$
5. Bentuk dari $(g \circ f)(x)$

Fungsi Komposisi (Lanjutan)

Fungsi Komposisi $f \circ g$

Jika f dan g adalah fungsi dengan $R_g \cap D_f \neq \emptyset$, maka terdapat fungsi dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g. Fungsi ini dinamakan komposisi dari g dan f. Dinotasikan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

1. Daerah definisi $f \circ g$ ialah prapeta dari $R_g \cap D_f$ terhadap g, yaitu

$$D_{f \circ g} = g^{-1}(R_g \cap D_f) = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

2. Daerah hasil $f \circ g$ ialah peta dari $R_g \cap D_f$ terhadap f, yaitu

$$R_{f \circ g} = f(R_g \cap D_f) = \{f(t) \in R_f \mid t \in R_g\}$$

Contoh : Tentukan $D_{f \circ g}$ dan $R_{f \circ g}$, jika diketahui $f(x) = 1 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

TUGAS

TUGAS

Tentukan $D_{g\circ f}$ dan $R_{g\circ f}$ dari komposisi fungsi $f(x) = 4x - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

Fungsi Satu Kesatu (Fungsi Injektif)

Definisi

Fungsi f dikatakan satu-kesatu jika prapeta dari setiap unsur di R_f terdiri dari tepat satu unsur. Atau Fungsi f dikatakan satu-kesatu jika untuk setiap $x, y \in D_f$ berlaku $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

Fungsi $f(x) = x^3$ adalah fungsi satu-kesatu karena untuk setiap $x, y \in D_f = \mathbb{R}$ berlaku $x^3 = y^3 \rightarrow x = y$.

Fungsi Invers

Definisi

Jika f fungsi satu-kesatu, maka invers dari fungsi f, ditulis f^{-1} adalah suatu fungsi tunggal yang terdefinisi pada R_f dan memenuhi

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{untuk setiap } x \in D_f$$

Teorema

1. Jika f fungsi satu-kesatu dan f^{-1} adalah invers dari fungsi f, maka $f(f^{-1}(x)) = x$ untuk setiap $x \in D_f$.
2. Jika f fungsi satu-kesatu dan f^{-1} adalah invers dari fungsi f, maka untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ berlaku

$$y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Latihan

Fungsi satu-satu

1. Jika diketahui $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ merupakan fungsi satu-kesatu. Tentukan
   (a) D_f
   (b) R_f
   (c) Tentukan invers dari fungsi f
2. Jika diketahui $g(x) = x^2 - 2x - 3, \quad x \geq 1$ merupakan fungsi satu-kesatu. Tentukanlah invers dari fungsi g.