

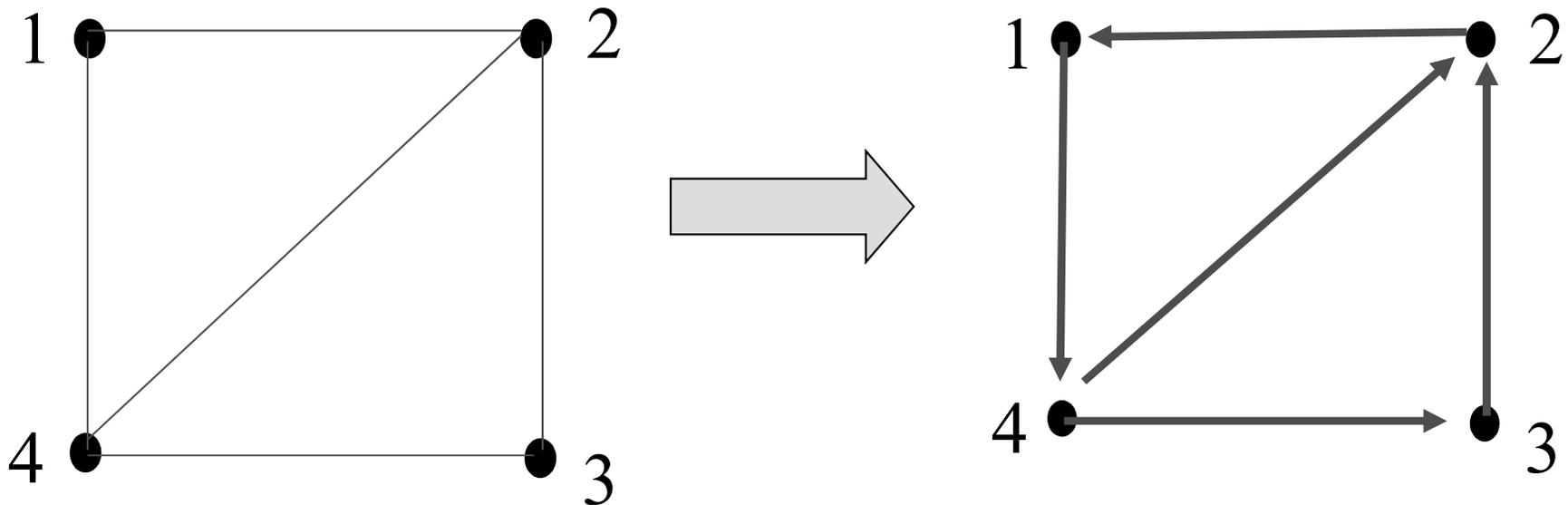
Graf Euler

Lintasan Euler adalah : Lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Euler adalah : Sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali.

Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **Graf Euler (Eulerian graph)**. Sedangkan Graf yang mempunyai lintasan Euler disebut **Graf semi-Euler (semi-Eulerian graph)**.

Contoh

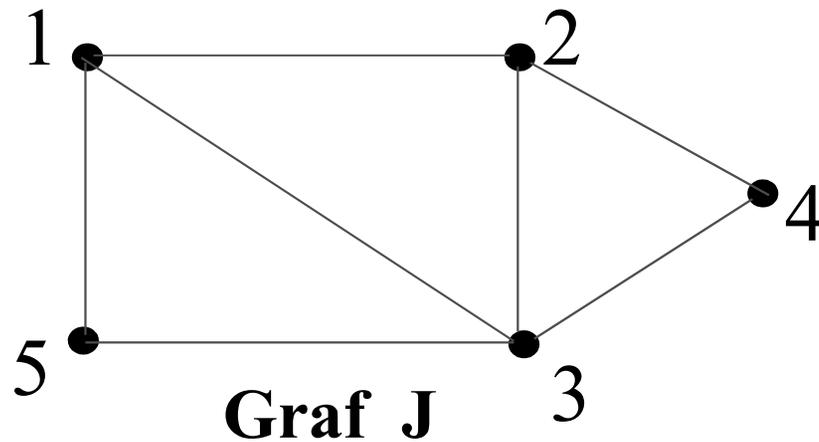
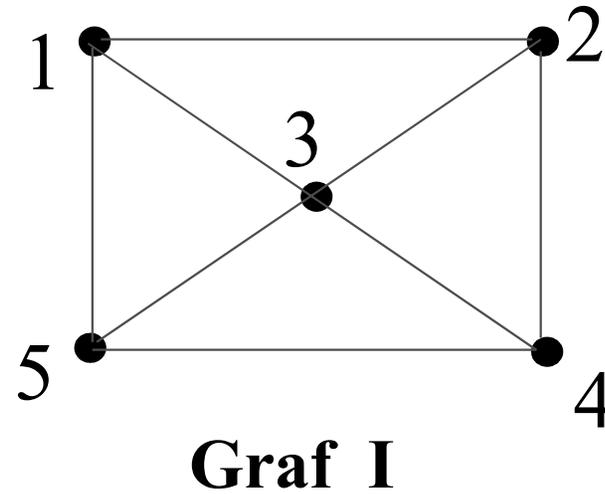
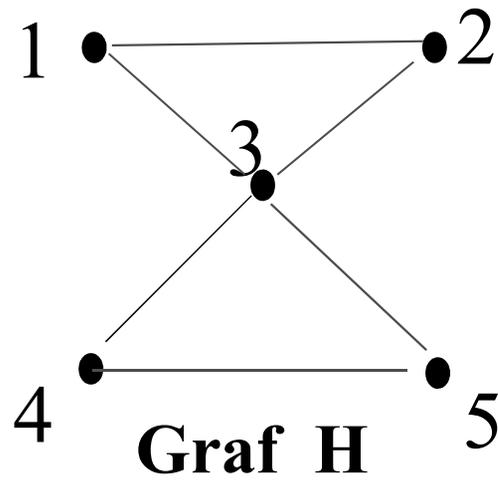


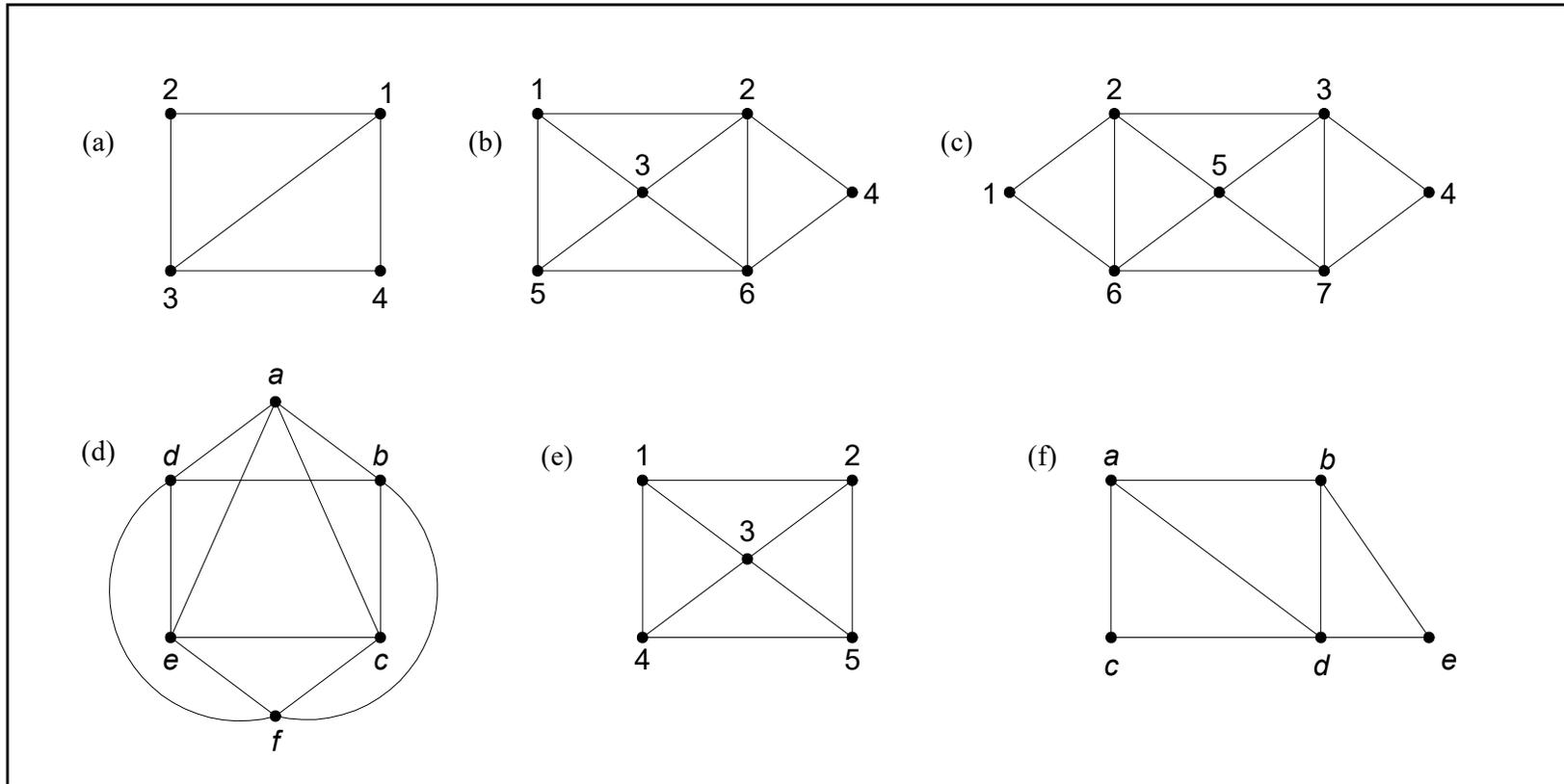
Lintasan Euler pada graf : 4,2,1,4,3,2.

Adakah lintasan Euler yang lain?

Graf yang mempunyai lintasan Euler (graf semi Euler)

Graf manakah yang mempunyai lintasan euler?
Graf manakah yang mempunyai sirkuit Euler?



Contoh:

Gambar (a) , (b), dan (f) graf semi-Euler

(c) dan (d) graf Euler

(e) bukan graf semi-Euler atau graf Euler

Teorema 1

Graf terhubung G adalah graf euler jika dan hanya jika derajat dari masing-masing titik adalah genap.

Teorema 2

- a. Jika graf G memiliki lebih dari dua titik berderajat ganjil, maka G adalah graf non euler.
- b. Jika G memiliki dua titik berderajat ganjil, maka G memiliki lintasan euler dan ini berlaku juga ketika memiliki satu titik berderajat ganjil.

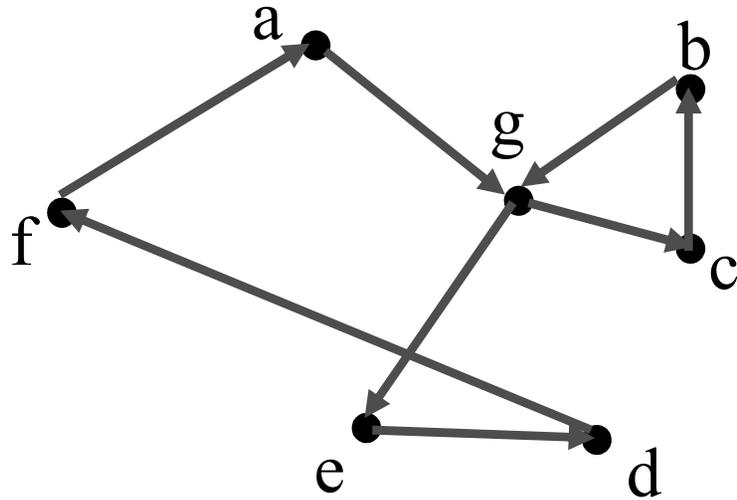
Teorema 3

Suatu graf terhubung adalah graf semi euler jika dan hanya jika memiliki tepat dua titik yang berderajat ganjil.

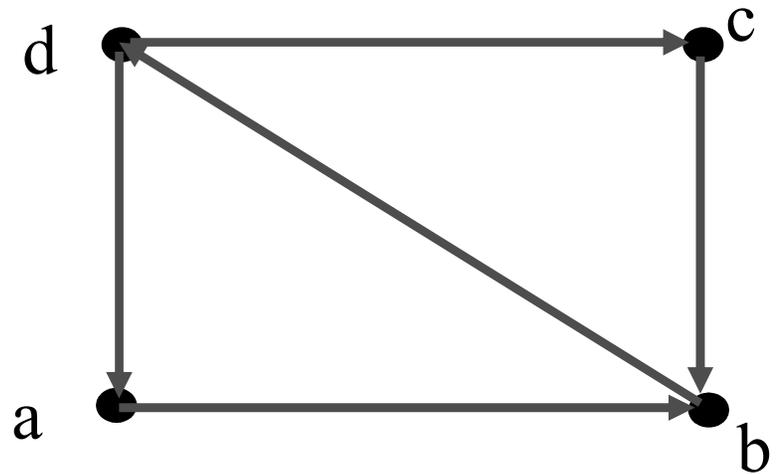
Teorema 4

Graf berarah G memiliki sirkuit euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap titik memiliki derajat masuk dan derajat keluar sama.

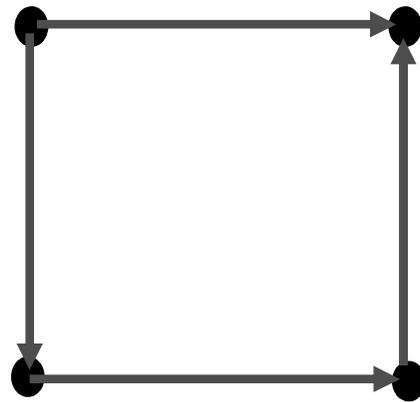
Graf G memiliki lintasan euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap titik memiliki derajat masuk dan derajat keluar sama kecuali dua titik, yang pertama memiliki derajat keluar satu lebih besar dari derajat masuk, dan yang kedua memiliki derajat masuk lebih besar dari derajat keluar.



Graf berarah yang memiliki sirkuit Euler (a,g,c,b,g,e,d,f,a)

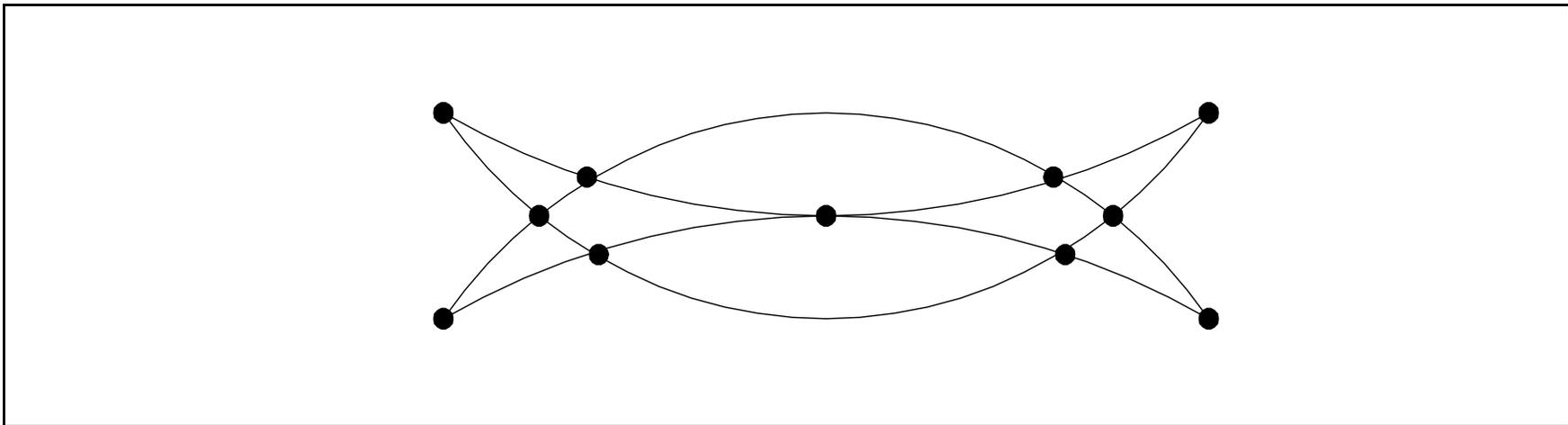


Graf berarah yang memiliki lintasan Euler (d,a,b,d,c,b)



Graf berarah yang tidak memiliki lintasan Euler dan sirkuit Euler

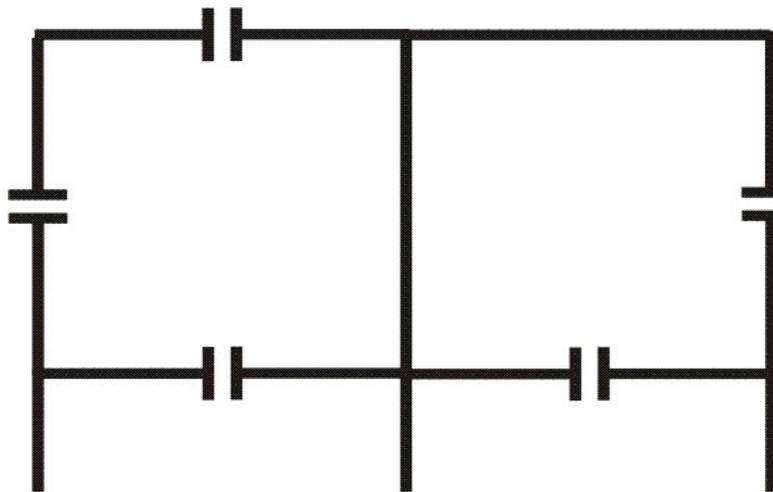
Mungkinkah melukis graf di bawah ini dengan sebuah pensil, dimulai dari sebuah simpul dan tidak menggambar ulang sebuah garispun?



Bulan sabit Muhammad

APLIKASI

Gambar dibawah ini adalah denah lantai dasar sebuah gedung. Apakah dimungkinkan berjalan melalui setiap pintu di lantai itu hanya satu kali saja jika kita boleh memasuki pintu yang mana saja ?



Nyatakan setiap ruangan (termasuk ruang luar) sebagai simpul dan pintu-pintu yang menghubungkan antar ruang sebagai sisi, graf yang dihasilkan ditunjukkan dengan garis putus-putus.

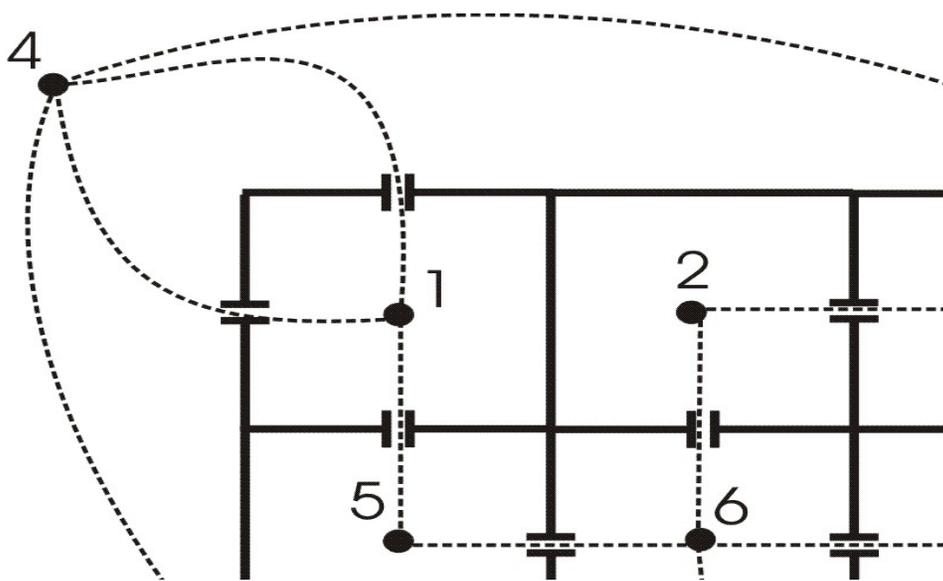
Setiap pintu hanya boleh dilalui sekali yang dipandang sebagai sisi di dalam graf. Karena kita tidak diharuskan harus kembali ke titik asal keberangkatan, maka persoalan ini sebenarnya adalah menentukan apakah didalam graf tersebut terdapat lintasan Euler.

Agar graf mempunyai lintasan Euler, maka harus terdapat dua simpul berderajat ganjil, dan simpul lainnya berderajat genap.

Dari representasi graf tersebut diperoleh :

- (a). Dua simpul berderajat ganjil yaitu simpul 1 dan simpul 7
- (b). Simpul lainnya berderajat genap

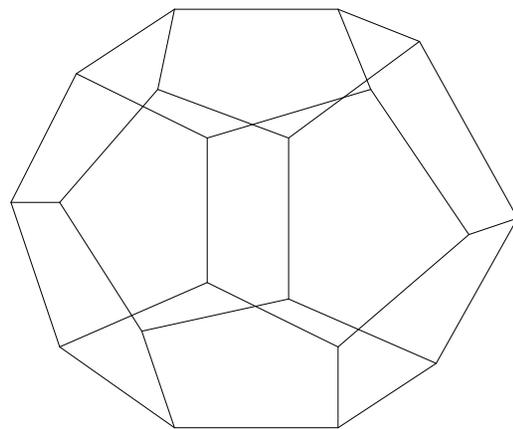
Menurut teorema, pasti terdapat lintasan Euler dalam graf tersebut. Jadi, kita dapat melewati pintu itu tepat satu kali.



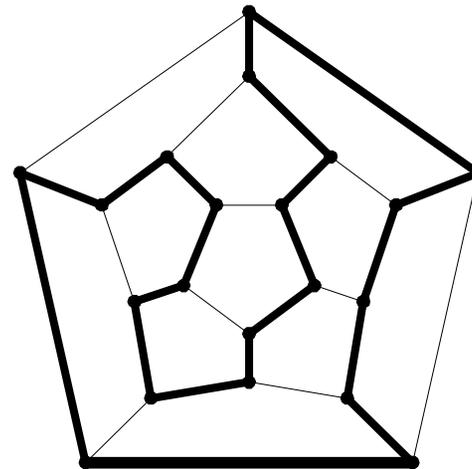
Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Sir Wiliam Hamilton pada tahun 1859 membuat permainan dodecahedron yang ditawarkan pada pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari 12 buah pentagonal dan ada 20 titik sudut (setiap sudut diberi nama ibu kota setiap negara) . Permainan ini membentuk perjalanan keliling dunia yang mengunjungi setiap ibu kota Negara tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Ini tak lain adalah mencari sirkuit Hamilton.

Masalah tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar berikut ini :



(a)

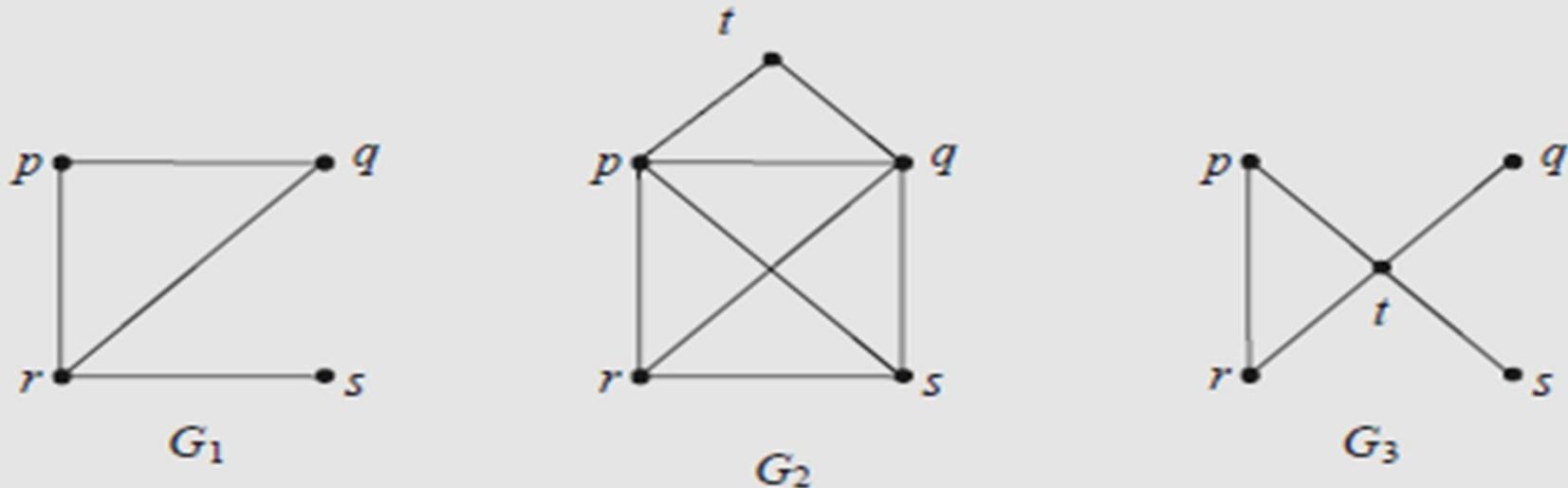


(b)

Gambar (a) *Dodecahedron* Hamilton, dan (b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton

- ❑ **Lintasan Hamilton** suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap titik dalam graf tersebut tepat satu kali.
- ❑ Jika lintasan tersebut kembali ketitik awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan **sirkuit Hamilton**.
- ❑ Graf yang memuat sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton (*Hamiltonian graph*), sedangkan graf yang memuat lintasan Hamilton dinamakan graf semi Hamilton (*semi-Hamiltonian graph*).

Contoh



Graf G_1 merupakan graf semi Hamilton, salah satu lintasan hamiltonya adalah : $s - r - q - p$.

Graf G_2 merupakan graf hamilton, salah satu sirkuit hamiltonnya adalah : $t - q - r - s - p - t$.

Sementara itu pada graf G_3 tidak terdapat lintasan maupun sirkuit hamilton.

Teorema Dirac (syarat cukup):

Jika G adalah graf sederhana dengan n buah titik ($n \geq 3$) sedemikian hingga derajat tiap titik paling sedikit $n/2$ (yaitu $d(v) \geq n/2$ untuk setiap titik v di G) maka G adalah graf Hamilton.

Contoh :

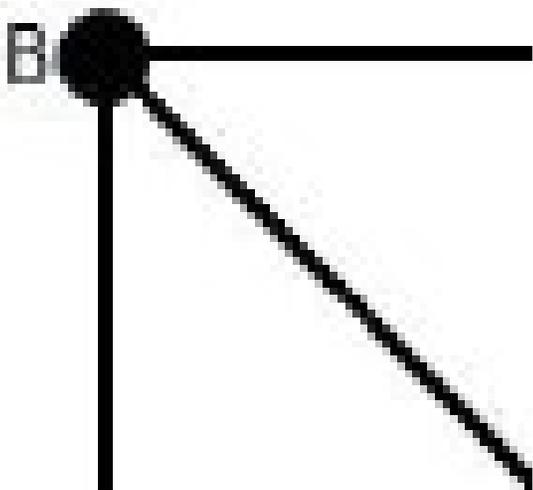


Graf yang tidak ada sirkuit hamilton

Teorema Ore :

Jika G adalah graf sederhana dengan n buah titik ($n \geq 3$) sedemikian hingga $d(v) + d(u) \geq n$ untuk setiap pasang titik tidak bertetangga u dan v , maka G adalah graf Hamilton

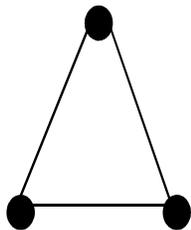
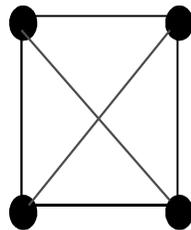
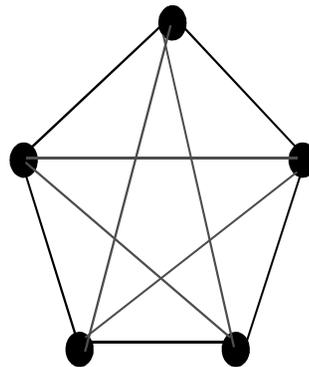
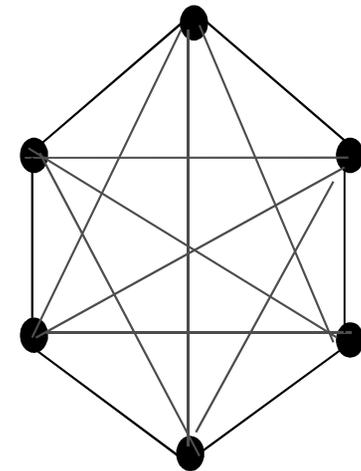
Contoh :



Graf hamilton

Teorema

- a) Setiap graf lengkap K_n , $n \geq 3$ adalah graf Hamilton
- b) Di dalam graf lengkap K_n , $n \geq 3$ terdapat sebanyak $(n - 1)! / 2$ buah sirkuit Hamilton

 K_3  K_4  K_5  K_6

Teorema

Di dalam graf lengkap G dengan n buah titik

:

- $n \geq 3$ dan n ganjil, terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan)
- $n \geq 4$ dan n genap, terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas

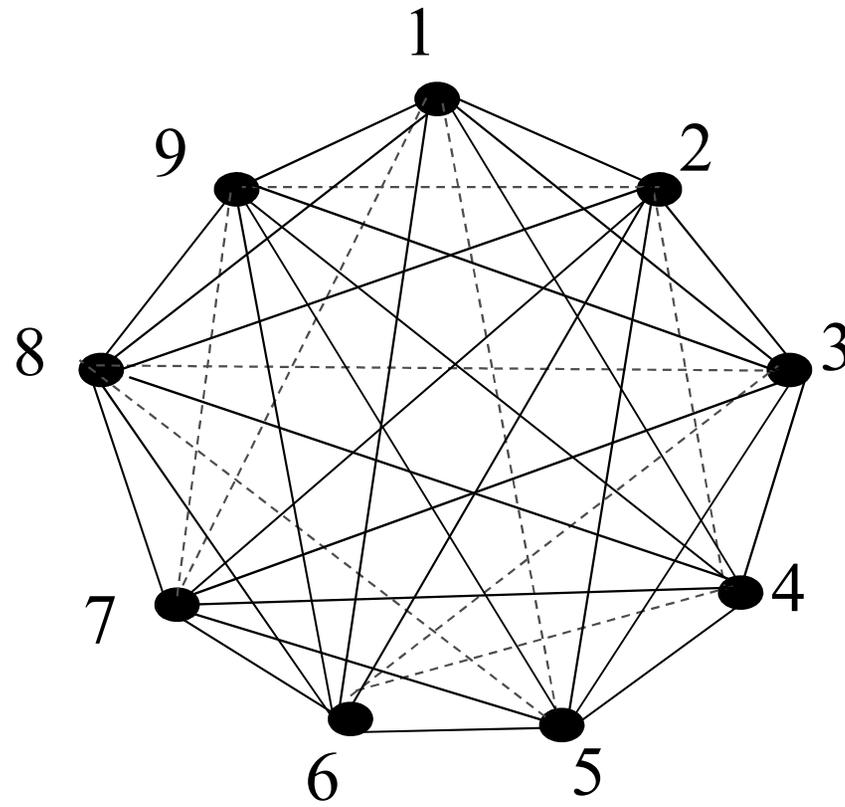
Contoh

Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar.

Mereka memutuskan duduk sedemikian hingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dilaksanakan ?

Penyelesaian :

Dapat direpresentasikan oleh sebuah graf dengan 9 buah titik sedemikian hingga setiap titik menyatakan anggota klub dan sisi yang menghubungkan 2 buah titik menyatakan kedua titik tersebut bertetangga tempat duduk

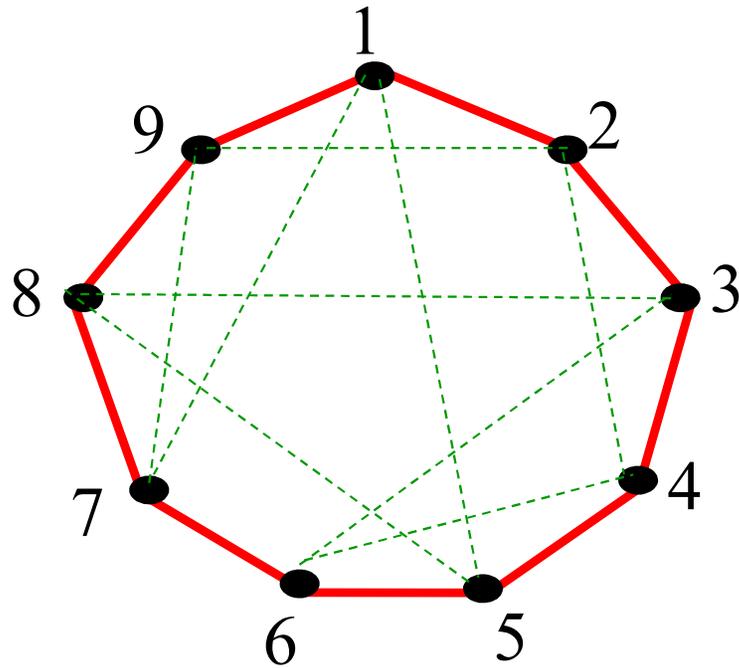


Contoh pengaturan tempat duduk adalah :

↪ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,1 (garis merah)

↪ 1,5,8,3,6,4,2,9,7,1 (garis putus-putus dan hijau)

Ini merupakan 2 buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.



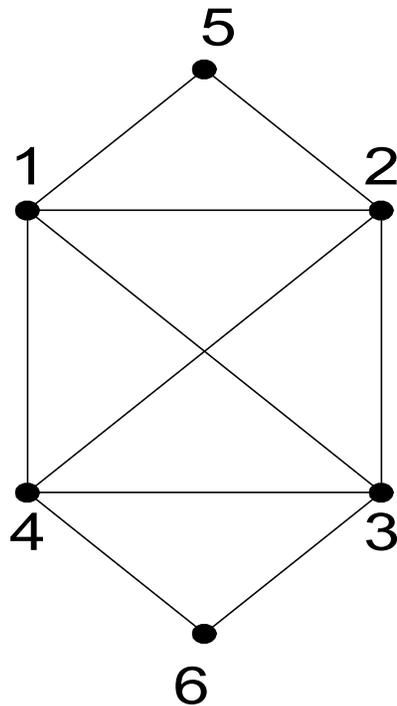
Adakah sirkuit Hamilton yang lain?

Menurut Teorema, jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda untuk $n = 9$ adalah

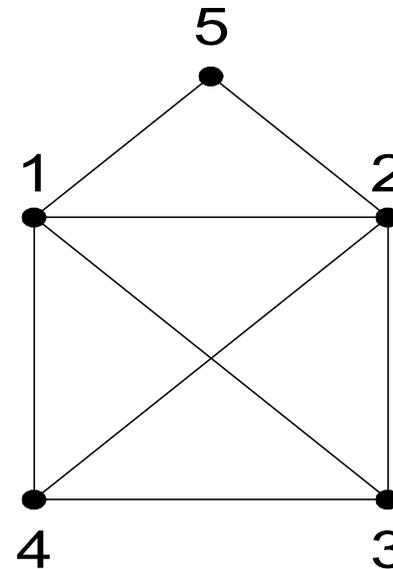
$$(9 - 1) / 2 = 4$$

Jadi pengaturan tempat duduk yang berbeda dapat dilakukan selama 4 hari. Hal ini berarti setiap peserta mempunyai tetangga yang berbeda dengan hari sebelumnya.

Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, mengandung sirkuit Euler dan lintasan Hamilton, mengandung lintasan Euler maupun lintasan Hamilton, tidak mengandung lintasan Euler namun mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya.



(a)



(b)

Graf pada Gambar (a) mengandung sirkuit Hamilton maupun sirkuit Euler, sedangkan graf pada Gambar (b) mengandung sirkuit Hamilton dan lintasan Euler.

Aplikasi Hamilton Graf

1. Knights Tour

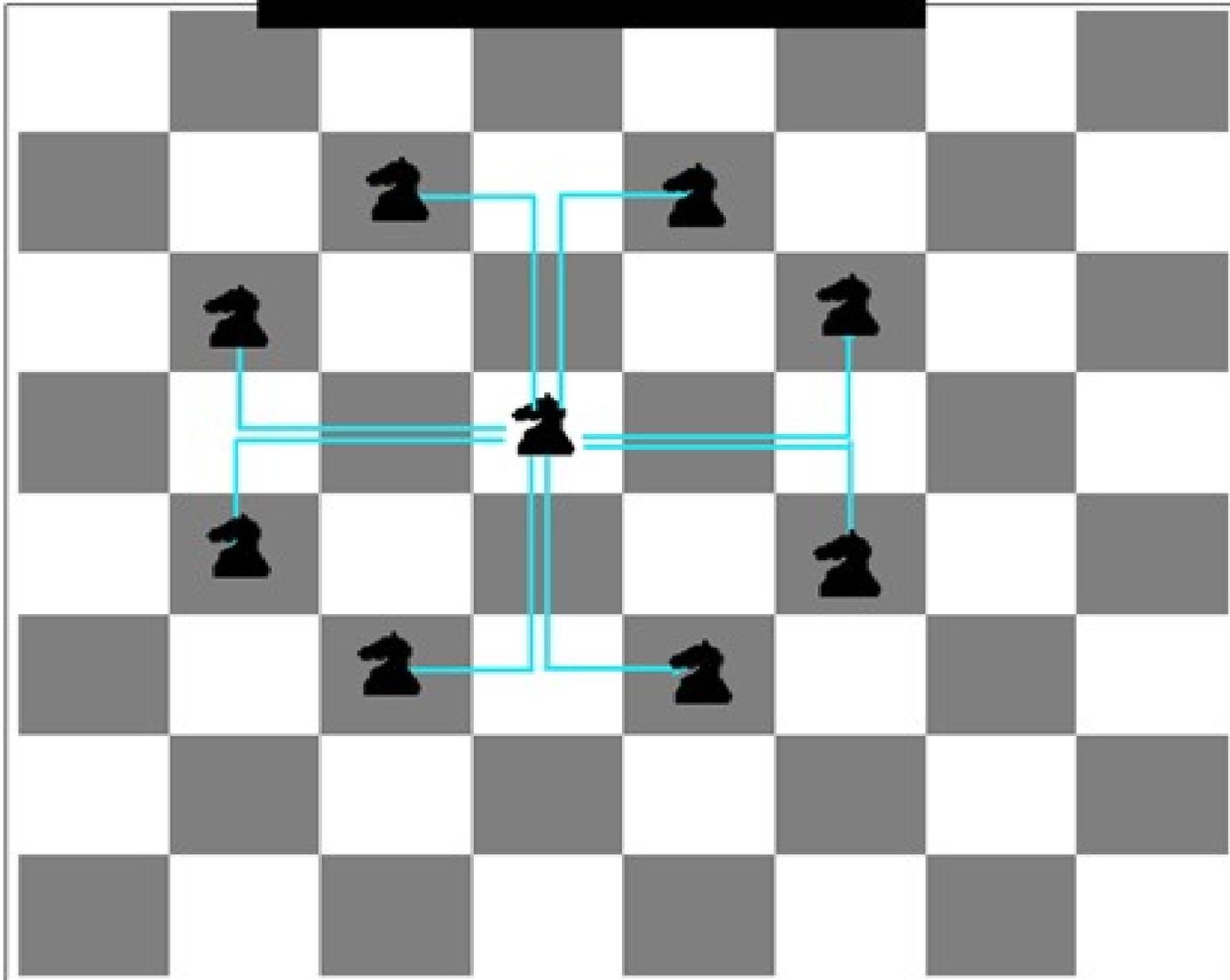
Knights Tour merupakan sebuah masalah matematika yang melibatkan kuda (knights) pada papan catur. Tujuan dari knight's tour ini adalah melewati setiap kotak pada papan catur.



Aturan langkah kuda pada permainan catur adalah sebagai berikut :

- Melangkah dua persegi ke arah horisontal kemudian satu persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah dua persegi ke arah vertikal kemudian satu persegi ke arah horisontal, atau
- Melangkah dua persegi ke arah vertikal kemudian satu persegi ke arah horisontal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah vertikal kemudian dua persegi ke arah horisontal

A Knight's Tour

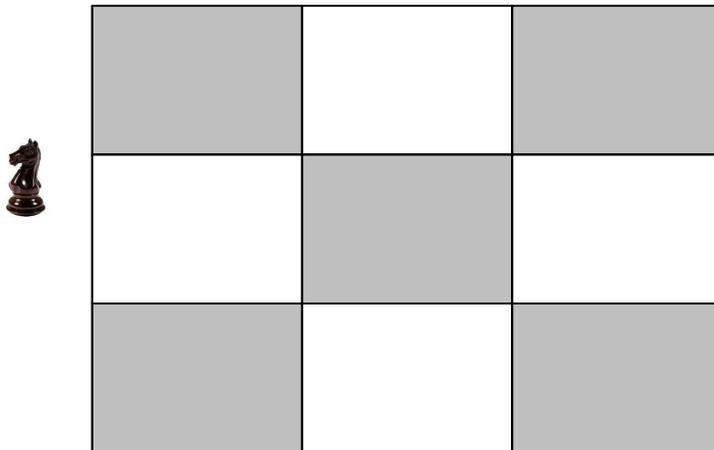


A knight's tour is a sequence of legal moves by a knight starting at some square and visiting each square exactly once. A knight's tour is called reentrant if there is a legal move that takes the knight from the last square of the tour back to where the tour began. We can model knight's tours using the graph that has a vertex for each square on the board, with an edge connecting two vertices if a knight can legally move between the squares represented by these vertices.

Jika dalam Knight's Tour setiap persegi dari papan catur dapat dilewati tepat satu kali dan kuda kembali pada persegi semula maka disebut langkah kuda tertutup (Closed Knight's Tour). Namun, jika semua persegi telah dilewati dan kuda tidak dapat kembali ke posisi semula maka disebut langkah kuda yang terbuka (Open Knight's Tour)

contoh

Draw the graph that represents the legal moves of a knight on a 3×3 chessboard.



Latihan

Draw the graph that represents the legal moves of a knight on a 3×4 chessboard and 4×4 chessboard.