Persamaan Diferensial Pertemuan IV

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

February 28, 2019

Overview

Ciri PD Linear

Definition

Suatu persamaan diferensial biasa order satu jika dapat dinyatakan dalam bentuk derivatif

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

atau dalam bentuk differensial

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0.$$

maka PD disebut persamaan diferensial linear.

Sebagai contoh,

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

merupakan PD linear karena dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = x^2.$$

lanjutan

Perhatikan bahwa untuk $P(x) \neq 0$, PD linear dalam bentuk diferensial **BUKAN** merupakan PD eksak. Akibatnya, untuk menyelesaikannya akan digunakan faktor integrasi, $\mu(x)$. Jadi,

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]\, dx + \mu(x)dy = 0$$

merupakan PD eksak jika

$$\begin{aligned} \frac{d[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]}{dy} &= \frac{d\mu(x)}{dx} \\ \mu(x)P(x) &= \frac{d\mu(x)}{dx} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

lanjutan

Perhatikan bahwa faktor integrasi tidak memuat y, jadi tidak ada kemungkinan solusi yang hilang pada proses transformasi.
Dengan cara yang telah dipelajari pada PD eksak maka diperoleh solusi PD linear sebagai berikut:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right].$$

atau kalikan faktor integrasi pada PD linear bentuk derivatif maka diperoleh

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \\ \frac{de^{\int P(x)dx}y}{dx} &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \end{aligned}$$

Contoh 1

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}.$$

Jawab :

PD tersebut merupakan PD linear. Didefnisikan faktor integrasi

$$\mu(x) = e^{\int 2+\frac{1}{x}\,dx} = xe^{2x}$$

Kalikan kedua ruas faktor integrasi diperoleh

$$\begin{aligned} xe^{2x}\frac{dy}{dx} + xe^{2x}\left(2+\frac{1}{x}\right) y &= x \\ \frac{dxe^{2x}y}{dx} &= x \quad \rightarrow y = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{c}{x}e^{-2x}. \end{aligned}$$

Contoh 2

Example

Tentukan solusi khusus dari persamaan diferensial

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x$$

dengan nilai awal

$$y(2)=1.$$

PD belum dinyatakan dalam bentuk standar PD Linear. Untuk itu, kalikan kedua ruas dengan x^2+1 sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1}.$$

Faktor integrasi yang bersesuaian adalah

$$\mu(x)=e^{\int \frac{4x}{x^2+1}dx}=e^{2\ln(x^2+1)}=(x^2+1)^2.$$

Lanjutan

kalikan kedua ruas PD dengan faktor integrasi

$$(x^2+1)^2\frac{dy}{dx}+(x^2+1)4xy=(x^2+1)x.$$

atau

$$\frac{d[(x^2+1)^2y]}{dx}=x^3+x.$$

Integralkan kedua ruas terhadap x diperoleh

$$(x^2+1)^2y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+c.$$

Substitusikan syarat $y(2)=1$ maka nilai c yang memenuhi adalah $c=19$. Jadi, solusi khusus PD adalah

$$(x^2+1)^2y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+19.$$

PD linear bentuk khusus

Perhatikan bentuk PD berikut

$$y^2\ dx + (3xy - 1)\ dy = 0.$$

Jika dibawa kedalam bentuk PD bentuk derivatif, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - 3xy}$$

yang mana PD tersebut bukan merupakan PD linear, eksak, separable maupun homogen. Akan tetapi perhatikan bahwa

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - 3xy}{y^2} = -\frac{3}{y}x + \frac{1}{y^2}$$

merupakan bentuk PD linear fungsi $x(y)$.

lanjutan

Jadi, PD tersebut dapat diselesaikan dengan faktor integrasi terhadap y yaitu

$$\mu(y) = e^{\int \frac{3}{y} dy} = y^3.$$

Kalikan kedua ruas PD dengan faktor integrasi diperoleh

$$y^3 \frac{dx}{dy} + 3y^2 x = y.$$

atau

$$\frac{d[y^3 x]}{dy} = y.$$

Integralkan kedua ruas terhadap y maka diperoleh

$$y^3 x = \frac{1}{2} y^2 + c \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}.$$

Ciri PD Bernoulli

Definition

Suatu persamaan diferensial dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

disebut dengan PD Bernoulli.

Jika $n = 0$ atau $n = 1$, maka PD Bernoulli disebut juga PD Linear. Oleh karena itu, pada bagian ini akan dibahas metode untuk mencari solusi PD Bernoulli dengan $n \neq 0$ atau $n \neq 1$.

Perhatikan bahwa jika kedua ruas dikalikan dengan y^{-n} maka akan diperoleh

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{1}$$

sementara $\frac{dy^{1-n}}{dy} = (1-n)y^{-n}$

Solusi

Akibatnya, jika dimisalkan $v = y^{1-n}$, maka PD 1 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

atau

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x),$$

yang merupakan PD Linear dalam $v(x)$.

Theorem

Misalkan $n \neq 0$ atau $n \neq 1$, transformasi $v = y^{1-n}$ akan mereduksi PD Bernoulli menjadi PD Linear dalam v.

Solusi PD Linear telah dipelajari pada bahasan sebelumnya.

Contoh 3

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3.$$

Jawab:

- Kalikan kedua ruas dengan y^{-3}.

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x.$$

- Dimisalkan $v = y^{-2}$, maka diperoleh

$$\frac{dv}{dy} = -2y^{-3} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$

lanjutan

- Transformasi PD.

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - 2v = -2x.$$

- Faktor integrasi.

$$\mu(x) = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

- Kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi.

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x}.$$

atau

$$\frac{d[e^{-2x}v]}{dx} = -2xe^{-2x}.$$

lanjutan

- Integralkan kedua ruas terhadap x maka diperoleh

$$e^{-2x}v = \frac{1}{2}e^{-2x}(2x+1) + c.$$

atau

$$v = \frac{1}{2}(2x+1) + ce^{2x}.$$

- Solusi umumnya adalah

$$y^{-2} = \frac{1}{2}(2x+1) + ce^{2x}.$$

Latihan Soal

1. Tentukan solusi umum PD Linear berikut:
   a. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x}y = 6x^2.$
   b. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}.$
   c. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos\theta$
2. Tentukan solusi umum PD Bernoulli berikut:
   a. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}.$
   b. $dy + (4y - 8y^{-3})x\,dx = 0.$
   c. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{xt}.$

Latihan Pengayaan

3. Persamaan

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

disebut dengan **Persamaan Ricatti**.

a. Tunjukkan bahwa jika $A(x) = 0$ untuk semua nilai x, maka Persamaan Ricatti merupakan persamaan linear sementara jika $C(x) = 0$ untuk semua nilai x, maka Persamaan Ricatti merupakan persamaan Bernoulli.

b. Tunjukkan bahwa jika f adalah solusi Persamaan Ricatti, maka transformasi

$$y = f + \frac{1}{v}$$

mereduksi Persamaan Ricatti menjadi PD Linear.

The End