

Persamaan Diferensial Pertemuan VI

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

March 13, 2019

1 Trayektori Orthogonal

2 Trayektori Oblique

Menggambar keluarga kurva menggunakan Geogebra

Misalkan akan digambar keluarga lingkaran $x^2 + y^2 = c^2$ dan keluarga garis $y = kx$.

- Nyatakan keluarga kurva dalam bentuk $F(x, y, c) = 0$, keluarga lingkaran $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ dan keluarga garis $y - kx = 0$.
- Pilih menu create slide untuk membentuk parameter c dan k .

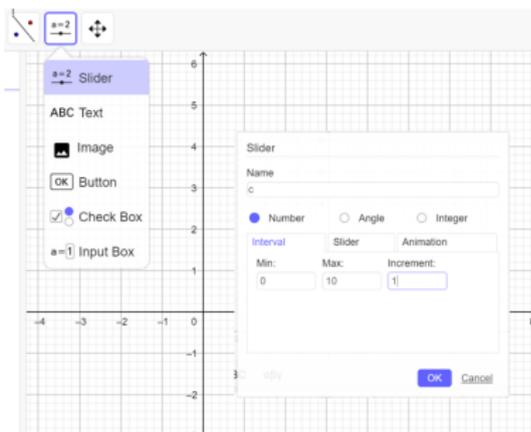
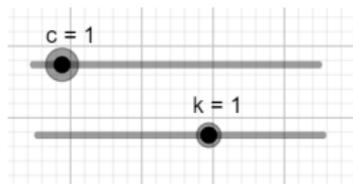


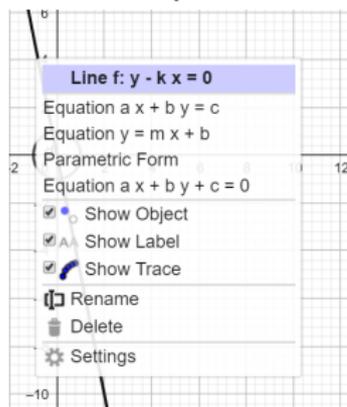
Figure: mendefinisikan parameter

lanjutan

Sebagai contoh, disini dipilih parameter c pada interval $[0,10]$ dengan kenaikan 1 sementara parameter k pada interval $[-5,5]$ dengan kenaikan 1.

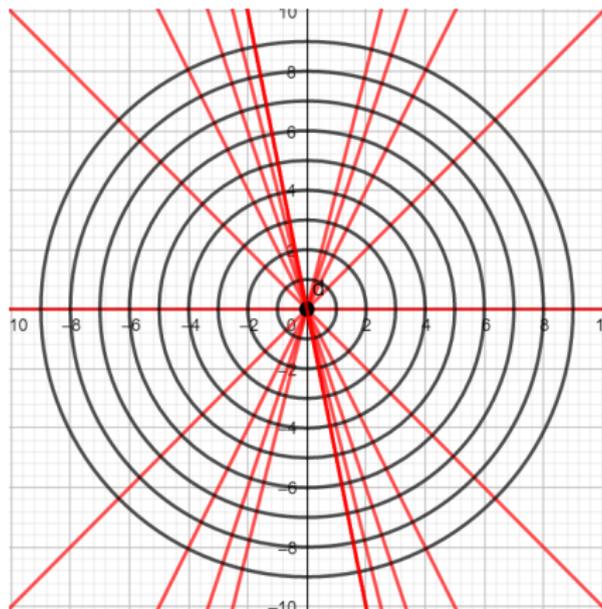


- Pada bagian input, masukkan $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ dan $y - kx = 0$. Selanjutnya, klik kanan kurva dan pilih 'show trace'.



Hasil

Hasil yang terbentuk setelah menggerakkan kedua slider dapat dilihat pada gambar berikut.



Definition

Diberikan suatu

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

keluarga kurva satu-parameteri pada bidang XY . Kurva yang memotong kurva 1 secara tegak lurus disebut dengan trayektori orthogonal dari keluarga kurva tersebut.

Sebagai contoh keluarga lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari c ,

$$x^2 + y^2 = c,$$

mempunyai trayektori orthogonal keluarga garis lurus $y = kx$.

Gambar Trayektori

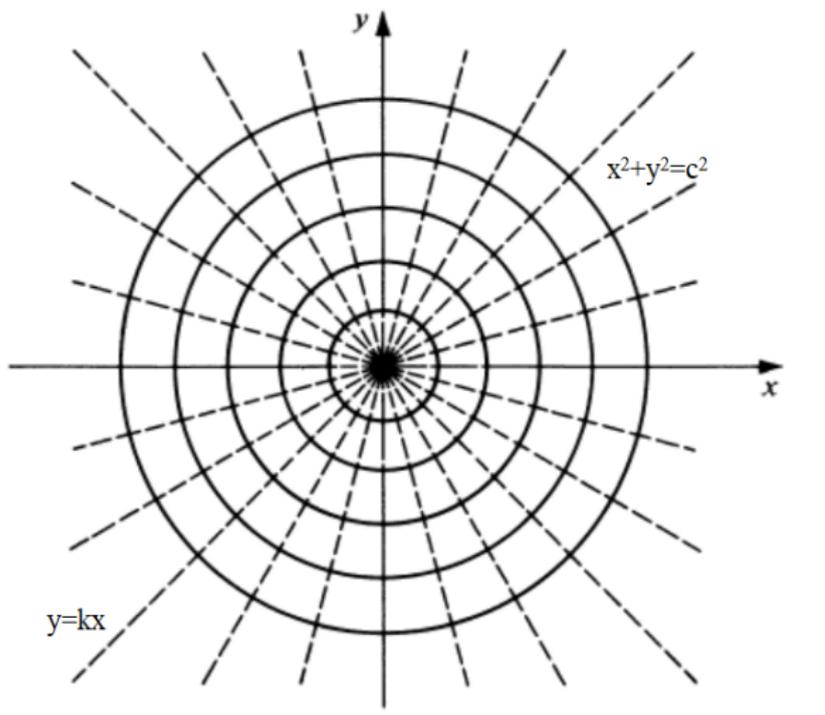


Figure: Keluarga Lingkaran dan Keluarga Garis Lurus saling tegak lurus

Teknik mencari orthogonal trayektori

Misalkan gradien dari keluarga 1 adalah

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Ingat bahwa perkalian gradien dua keluarga kurva yang saling tegak lurus harus bernilai -1. Akibatnya, keluarga kurva yang tegak lurus dengan keluarga kurva 1 mempunyai gradien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}. \quad (2)$$

Jadi, orthogonal trayektori yang dimaksud merupakan solusi dari PD 2

Langkah-langkah

Untuk mencari orthogonal trayektori dari suatu keluarga kurva, langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial dari persamaan gradien keluarga kurva yang diperoleh.

Contoh 1

Tentukan orthogonal trayektori dari keluarga lingkaran $x^2 + y^2 = c^2$

- 1 Tentukan gradien dari keluarga lingkaran. Turunkan kedua ruas terhadap x diperoleh

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

- 2 Definisikan gradien dari keluarga kurva yang orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- 3 Selesaikan PD gradien kurva orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \quad \rightarrow \quad y = kx.$$

Contoh 2

Tentukan orthogonal trayektori dari keluarga parabola $y = cx^2$.

- 1 Tentukan gradien dari keluarga parabola. Turunkan kedua ruas terhadap x diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = 2cx.$$

- 2 Definisikan gradien dari keluarga kurva yang orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2cx} = -\frac{x}{2y}$$

- 3 Selesaikan PD gradien kurva orthogonal.

$$2y \, dy = -x \, dx \quad \rightarrow \quad 2y^2 + x^2 = k^2.$$

Gambar keluarga Ellipse

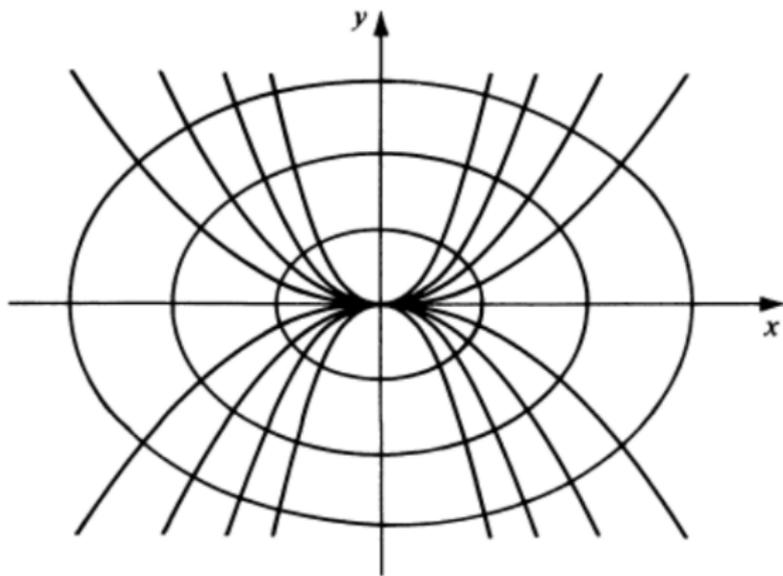


Figure: Keluarga Parabola dan Keluarga Ellipse Lurus saling tegak lurus

Latihan 1

Tentukan dan gambarlah keluarga kurva serta trayektori orthogonal untuk keluarga-keluarga kurva berikut.

① $y = cx^3$

② $y^2 = cx$

③ $cx^2 + y^2 = 1$

④ $y = e^{cx}$

⑤ $x - y = cx^2$

Definition

Diberikan keluarga kurva

$$F(x, y, c) = 0.$$

Kurva yang memotong keluarga kurva dengan sudut potong $\alpha \neq 90^0$ disebut trayektori oblique dari keluarga kurva tersebut.

Sebagai contoh, trayektori oblique yang memotong keluarga garis lurus $y = cx$ dengan sudut potong 45^0 adalah

$$\ln c^2(x^2 + y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

Gambar keluarga Ellipse

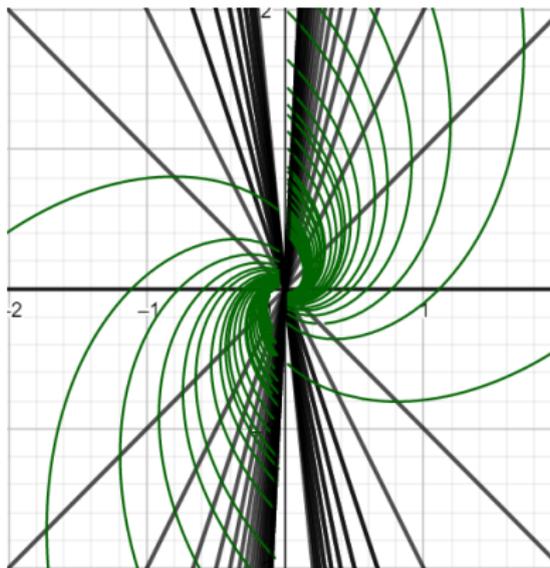


Figure: Trayektori Oblique keluarga garis dengan sudut 45°

Teknik mencari trayektori oblique

Misalkan gradien sudut yang dibentuk keluarga kurva 1 adalah β , maka

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\beta) = f(x, y)$$

Akibatnya, keluarga kurva yang memotong keluarga kurva 1 dengan sudut α mempunyai gradien sudut

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \tan(\beta + \alpha) &= \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\beta)\tan(\alpha)} \\ &= \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y)\tan(\alpha)}\end{aligned}\quad (3)$$

Jadi, trayektori oblique yang dimaksud merupakan solusi dari PD. 3

Langkah-langkah

Untuk mencari trayektori oblique dari suatu keluarga kurva dengan sudut potong α , langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y) \tan(\alpha)}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial dari persamaan gradien keluarga kurva yang diperoleh.

Contoh 3

Tentukan keluarga kurva yang memotong keluarga garis $y = cx$ dengan sudut potong 45° .

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = c = \frac{y}{x}.$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y) \tan(\alpha)} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{y + x}{x - y}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial homogen tersebut menggunakan transformasi $y = vx$. Diperoleh

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v}.$$

Persamaan ekuivalen dengan bentuk

$$\frac{v-1}{v^2+1} dv = -\frac{1}{x} dx$$

Integralkan kedua ruas maka diperoleh

$$\frac{1}{2} \ln(v^2+1) - \arctan v = -\ln|x| - \ln|c|$$

Jadi, solusinya adalah

$$\ln c^2(x^2+y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

Tentukan dan gambarlah keluarga kurva serta trayektori orthogonal untuk keluarga-keluarga kurva berikut.

- 1 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga lingkaran $x^2 + y^2 = c^2$ dengan sudut potong 45^0 .
- 2 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga parabola $y^2 = cx$ dengan sudut potong 60^0 .
- 3 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga kurva $x + y = cx^2$ dengan sudut potong α yang memenuhi $\tan \alpha = 2$.

- 1 Find the orthogonal trajectories of the family of ellipses having center at the origin, a focus at the point $(c, 0)$, and semimajor axis of length $2c$.
- 2 Find the orthogonal trajectories of the family of circles which are tangent to the y axis at the origin.
- 3 Find the value of K such that the parabolas $y = c_1x^2 + K$ are the orthogonal trajectories of the family of ellipses $x^2 + 2y^2 - y = c_2$.
- 4 A given family of curves is said to be self-orthogonal if its family of orthogonal trajectories is the same as the given family. Show that the family of parabolas $y^2 = 2cx + c^2$ is self-orthogonal.

The End