METODE LAGRANGE MULTIPLIER

Lagrange Multiplier

Kasus optimasi yang memiliki syarat atau batasan yang merupakan masalah pemodelan matematika dalam optimasi fungsi yang mensyaratkan beberapa kondisi untuk diperoleh solusi optimal. Suatu kasus optimasi dikatakan nonlinier, jika fungsi tujuan dan kendalannya mempunyai bentuk nonlinier pada salah satu atau keduannya (Luknanto,2000). Di kemukakan oleh Joseph Louis Lagrange (1736 –1813) yakni Inti dari metode ini yaitu mengubah persoalan titik ekstrimter kendala menja dipersoalan titik ekstrim bebas. Fungsi yang terbentuk dari transformasi tersebut yaitu Fungsi Lagrangiang.

Definisi 1.

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \qquad (1)$$

dengan,

$L(x,\lambda)$: Fungsi Lagrangian

$f(x)$: Fungsi tujuan

$g_j(x)$: Fungsi kendala

λ_j : Pengali Lagrange

Fungsi Tujuan : merepresentasikan tujuan yang ingin dicapai dalam kasus optimasi.

Fungsi kendala : merepresentasikan kondisi / faktor-faktor yang membatasi agar tercapainya kondisi optimum.

Pengali Lagrange : ukuran sensitivitas dari L terhadap perubahan dari kendala

Multivariabel dengan Kendala Persamaan

Bentuk umum :

Maksimumkan/minimumkan $f = f(x)$ dengan $x_i = \{x_1, \dots, x_n\}^T; i = 1,2, \dots n$

Kendala $g_j(X) = 0$, dengan $j = 1,2, \dots m, X \geq 0$

Syarat perlu bagi sebuah fungsi $f(X)$ dengan kendala $g(X)$ = 0, dengan j = 1,2,..m agar mempunyai minimum relative pada titik X^* adalah turunan parsial pertama dari fungsi lagrange nya yang di definisikan sebagai L= $L_{(X1,X2,\dots,Xn,\lambda1,\lambda2)}$ terhadap setiap argumenya mempunyai nilai nol.

Syarat harus bagi sebuah fungsi $f(X)$ agar mempunyai minimum(atau maksismum) relatif pada titik X^* adalah jika fungsi kuadrat Q , yang didefinisikan sebagai :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i dx_j$$

Dievaluasi pada X = X^* harus definit positif atau negative untuk setiap nilai dX yang memenuhi semua kendala.

Syarat perlu agar persamaan 2.11 menjadi definit positif atau negatif untuk setiap variansi nilai dX adalah setiap akar dari polynomial z_i yang didapat dari determinan persamaan dibawah ini harus posotif atau negative (Rao,1984).

$$\begin{array}{ccccccccc}
(L_{11} - z) & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\
L_{11} & (L_{22} - z) & L_{23} & \dots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \cdots & . \\
L_{n-1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & (L_{nn} - z) & g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \\
g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \cdots & . \\
g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \dots & g_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}$$

Jika diberikan fungsi tujuan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan kendala $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ maka fungsi Lagrangiannya adalah (Sri Mulyono,2004).

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[b - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Syarat perlu untuk penyelesaian diatas yaitu $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \; dan \; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ untuk $i = 1,2, \dots, n$

Persamaan diatas menghasilkan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \; untuk \; i = 1,2, \dots, n \; dan \; b - g(X) = 0 \; atau \; b = g(X)$$

Maka :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0 \; untuk \; i = 1,2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}_{df} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i}_{db}$$

$$\Leftrightarrow df = \lambda \, db$$

Pada penyelesaian optimum, perubahan fungsi tujuan f berbanding lurus dengan perubahan kendala b dengan faktor sebesar pengali Lagrange

Langkah-Langkah Metode Lagrange Multiplier :

- Membuat fungsi tujuan f(X) dan fungsi-fungsi kendala g(X).

Maksimumkan/Minimumkan $f = f(X)$

Kendala $g_j(X)$, untuk $j = 1,2,3, \dots, m$

Dengan $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

- Membuat fungsi Lagrange,

$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(X)$, untuk $j = 1,2,3, \dots, m$.

- Menentukan <u>*syarat perlu*</u> untuk mencari titik ekstrim,

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, dan $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$, untuk $i = 1,2,3, \dots n$, dan $j = 1,2,3, \dots, m$.

Menentukan **<u>syarat cukup</u>** untuk ekstrim relatif**.** Dievaluasi pada titik $X = X^*$ harus definit positif (atau definit negatif) untuk setiap variansi nilai dx adalah setiap akar polynomial z_i yang didapat dari determinan persamaan :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

$$\begin{vmatrix} L_{11} - z & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{m1} \\ L_{21} & L_{22} - z & L_{23} & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{m2} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - z & \cdots & L_{3n} & g_{13} & g_{23} & g_{33} & \cdots & g_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn} & g_{1n} & g_{2n} & g_{3n} & \cdots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \vdots & g_{3n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & & g_{mn} & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

harus positif untuk meminimukan (atau negative untuk memaksimumkan), dimana $L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$ dan $g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

Menginterprestasi atau menarik kesimpulan

Contoh soal:

Kasus Minimasi

Suatu kawat yang panjangnya 12 meter dipotong menjadi 2 bagian. Bagian pertama dipakai untuk membentuk lingkaran dan bagian kedua dipakai untuk membentuk bujur sangkar.

Bagaimana kawat tersebut harus dipotong supaya jumlah luas kedua bangun minimum.

1. Membuat fungsi tujuan $f(X)$ dan fungsi-fungsi kendala $g(X)$.

   Fungsi tujuan: Minimumkan $f = \pi r^2 + s^2$

   Fungsi kendala: $2\pi r + 4s = 12$

2. Membuat fungsi Lagrange,

$$L(r, s; \lambda) = \pi r^2 + s^2 + \lambda(2\pi r + 4s - 12\ )$$

Syarat perlu

- $\frac{\partial L}{\partial r} = 0$

  $2\pi r + \lambda(2\pi) = 0$ ...(1)

- $\frac{\partial L}{\partial s} = 0$

  $2s + 4\lambda = 0$ ... (2)

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

  $2\pi r + 4s - 12 = 0$ ...(3)

  Dengan eliminasi dan subtitusi diperoleh

  $\lambda^* = \frac{6}{\pi+4}$, $r^* = \frac{6}{\pi+4}$, dan $s^* = \frac{12}{\pi+4}$.

  Sehingga diperoleh $f\left(r^*,\ s^*\right) \approx 5{,}04$.

Syarat cukup

Matriks Hesian yang terbentuk,

$$\begin{vmatrix} 2\pi - z & 0 & 2\pi \\ 0 & 2 - z & 4 \\ 2\pi & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Hesian diatas diperoleh nilai $z = \frac{2\pi^2+8\pi}{1\pi^2+4} > 0$.

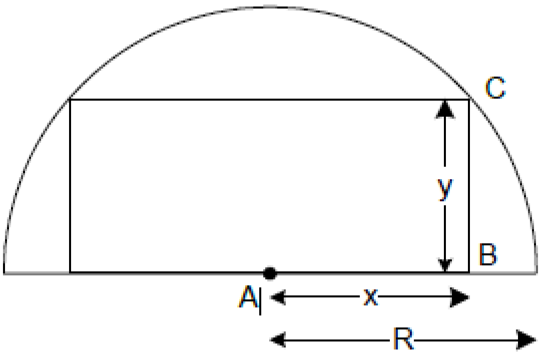
Karena nilai $z > 0$, maka penyelesaian$r^* = \frac{6}{\pi+4}$, dan $s^* = \frac{12}{\pi+4}$ merupakan titik minimum.

Kesimpulan

Agar luas yang terbentuk minimum maka jari-jari untuk lingkaran sebesar $\approx 0{,}84$, dan sisi untuk persegi sebesar ≈ 1.68, dengan luas yang terbentuk $\approx 5{,}04$.

Kasus Maksimasi

Carilah ukuran persegi panjang dengan luas terbesar yang dapat dimasukkan dalam setengah lingkaran berjari-jari R.



Dari gambar diatas, panjang persegi panjang adalah $2x$, dan lebarnya adalah y, selain itu panjang garis AC sama dengan panjang jari-jari lingkaran, dengan demikian terdapat segitiga siku-siku, dengan menggunakan teorema phytagoras diperoleh persamaan $x^2 + y^2 = AC^2 = R^2$.

1. Membuat fungsi tujuan $f(X)$ dan fungsi-fungsi kendala $g(X)$.

   Fungsi tujuan: Memaksimumkan $f(x, y) = 2xy$

   Fungsi kendala:$x^2 + y^2 = R^2$
2. Membuat fungsi Lagrange

$$L(x, y; \lambda) = 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$$

Syarat perlu

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

  $2y + 2\lambda x = 0 \ldots (1)$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$

  $2x + 2\lambda y = 0 \qquad \ldots (2)$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

  $x^2 + y^2 - R^2 = 0 \qquad \ldots (3)$

  Dari persaaan (1) dan (2) diperoleh,

  $\lambda = -\frac{y}{x} \qquad \ldots (4)$

$\lambda = -\frac{x}{y}$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \ldots (5)$

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

$x^2 = y^2$, kemudian subtitusikan ke persamaan (3), sehingga diperoleh hasil

$$x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Karena panjang maka nilai x dan y yang memenuhi $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$, dan $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ dengan luas maksimum yang terbentuk

$f\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = R^2$.

Syarat cukup

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda = -2}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda = -2}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 L}{\partial xy} = 2}$	$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial x} = 2x = R\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\partial g}{\partial y} = 2y = R\sqrt{2}}$

Matriks Hesian yang terbentuk,

$$\begin{vmatrix} -2 - z & 2 & R\sqrt{2} \\ 2 & -2 - z & R\sqrt{2} \\ R\sqrt{2} & R\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nilai z yang memenuhi $z = -4 < 0$. Karena nilai $z < 0$, maka penyelesaian $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$, dan $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ merupakan titik maksimum dengan luas yang dapat terbentuk adalah R^2.

Kesimpulan

Jadi panjang dan lebar berturut-turut dari persegi panjang pada setengah lingkaran tersebut agar maksimum adalah $\frac{R}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{R}{\sqrt{2}}$, dengan luas maksimumnya R^2

Multivariabel dengan Kendala Pertidaksamaan

Bentuk umum :

Maksimumkan/minimumkan

$f = f(x)$ dengan $x_i = \{x_1, \dots, x_n\}^T$

$; i = 1,2, \dots n$

Kendala $g_j(X) \leq atau \geq 0$, dengan $j = 1,2, \dots m$

$X \geq 0$

Multivariable dengan Kendala Pertidaksamaan

- Mengubah tanda pertidaksamaan menjadi persamaan atau =
- Menambahkan ruas kiri pertidaksamaan dengan *slack variable* (peubah penambahan)
- $\leq (KURANG\ DARI\ ATAU\ SAMA\ DENGAN)$

Misalnya, dalam batasan

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

Dengan menambahkan slack $s_1 \geq 0$ pada sisi kiri pertidaksamaan, diperoleh persamaan

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$, $s_1 \geq 0$

Mengurangkan ruas kiri pertidaksamaan dengan *surplus variable* (peubah penambah negative) $\geq (LEBIH\ DARI\ ATAU\ SAMA\ DENGAN)$

Misalnya, dalam batasan $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \geq 9$

Dengan menambahkan surplus $s_2 \geq 0$ pada sisi kiri pertidaksamaan, diperoleh persamaan $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - s_2 = 9$

Contoh Kasus Maksimasi

Fungsi tujuan merepresentasikan tujuan yang ingin dicapai oleh perusahaan yaitu mencari keuntungan maksimum dari penjualan sepatu.

Fungsi tujuan dari Shoes Shop ID Bali yaitu

Maks $f(x) = 80000x_1 + 75000x_2 + 65000x_3 + 50000x_4 + 55000x_5$

Dengan variabel keputusan

x_1= jumlah terjualnya sepatu Nike,

x_2= jumlah terjualnya sepatu Vans,

x_3= jumlah terjualnya sepatu Converse,

x_4= jumlah terjualnya sepatu Addidas, dan x_5= jumlah terjualnya sepatu Wakai.

Fungsi batasan dalam kasus ini, mewakili jumlah setiap jenis sepatu yang terjual, total stok tiap triwulan dan jumlah minimum terjualnya masing-masing sepatu pada setiap triwulan. Koefisien dari setiap variabel keputusan dalam fungsi batasan diperoleh dari peluang masing-masing produk terhadap total terjualnya produk tersebut.

Fungsi kendala

Triwulan I (Januari, Februari, Maret)

$$0{,}545x_1 + 0{,}291x_2 + 0{,}125x_3 + 0.012x_4 + 0.028x_5 \leq 446,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 500$$

$$x_1 \geq 182, x_2 \geq 107, x_3 \geq 40, x_4 \geq 5, x_5 \geq 5$$

Triwulan II (April, Mei, Juni)

$$0{,}596x_1 + 0{,}216x_2 + 0{,}139x_3 + 0.021x_4 + 0.028x_5 \leq 64,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 700$$

$$x_1 \geq 330, x_2 \geq 136, x_3 \geq 66, x_4 \geq 4, x_5 \geq 14$$

Triwulan III (Juli, Agustus, September)

$$0{,}558x_1 + 0{,}223x_2 + 0{,}147x_3 + 0.048x_4 + 0.024x_5 \leq 1075,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1100$$

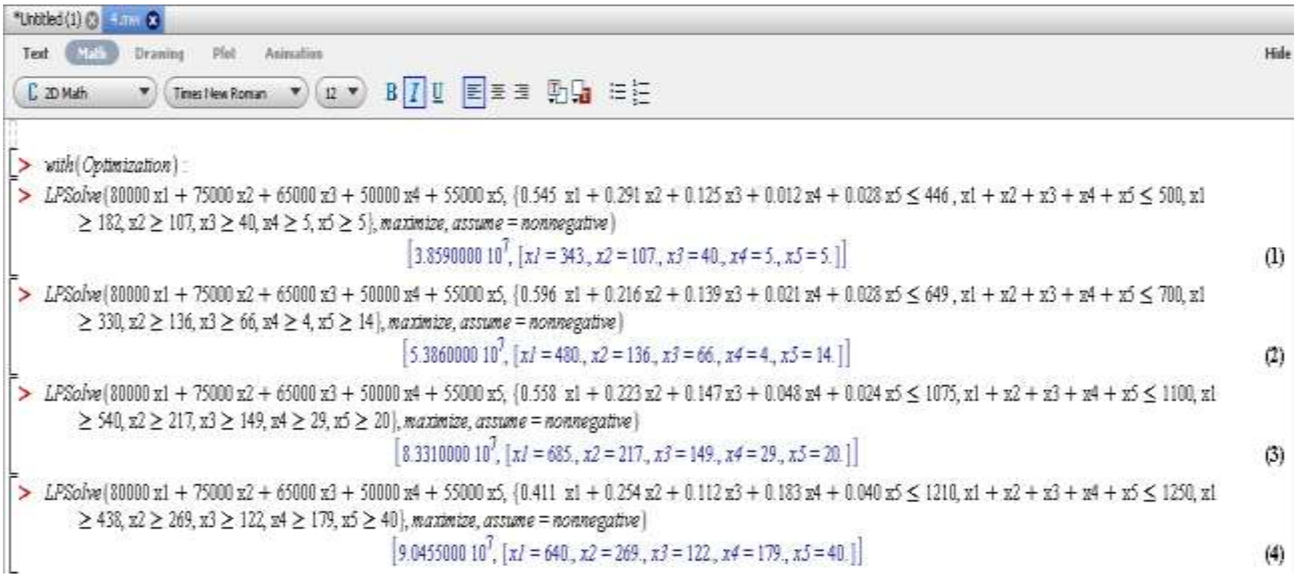
$$x_1 \geq 540, x_2 \geq 217, x_3 \geq 149, x_4 \geq 29, x_5 \geq 20$$

Triwulan IV (Oktober, November, Desember)

$$0{,}411x_1 + 0{,}254x_2 + 0{,}112x_3 + 0.183x_4 + 0.040x_5 \leq 1210,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1250$$

$$x_1 \geq 438, x_2 \geq 269, x_3 \geq 122, x_4 \geq 179, x_5 \geq 40$$

Dengan menggunakan Sofware Mapple 13



Keuntungan Maksimum Shoes Shop ID Bali

Triwulan	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Keuntungan (Rp)
I	343	107	40	5	5	38.590.000
II	480	136	66	4	14	53.860.000
III	685	217	149	29	20	83.310.000
IV	640	269	122	179	40	90.455.000