Bentuk Kanonik Persamaan Ruang Keadaan

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Pengantar

Materi

Contoh Soal

Ringkasan

Latihan

Asesmen

Bentuk Kanonik Observable

Bentuk Kanonik Jordan

- Pada bagian ini akan dibahas mengenai Persamaan Keadaan sebagai bentuk kanonik

- Bentuk persamaan Kanonik terdiri dari dua bentuk: yaitu persamaan Kanonik Observable dan Kanonik Jordan

- Bentuk kanonik ini merupakan suatu bentuk yang tidak unik dari sebuah persamaan dinamika sistem

Perancangan pengendalian:

1. Konvensional
2. Modern

Pengendalian secara Konvensional:
berdasarkan pada hubungan masukan dengan keluaran sistem atau fungsi transfer,

Pengendalian secara modern:

- berdasarkan diskripsi persamaan sistem dalam bentuk *n* persamaan diferensial orde pertama,
- dapat digunakan menjadi persamaan diferensial matrik-vektor orde pertama.
- Sifat system dapat dilihat dari koefisien bentuk kanonik persamaan ruang keadaan

Bentuk persamaan diferensial:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots.. + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + b_2 \overset{(n-2)}{u} + \ldots + b_n u$$

Pers. (1)

Persamaan fungsi transfer dari bentuk PD diatas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Pers. (2)

Bentuk persamaan ***Kanonik "Controllable"*** dari Pers. (1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Pers. (3)

1

Bentuk persamaan ***Kanonik "Controllable"*** dari Pers. (1)

2

$$y = \left[b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Pers. (4)

Bentuk kanonik Controllable sangat penting dalam penentuan letak pole - pole

Bentuk Persamaan *Kanonik Observable*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

Pers. (5)

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Y = **C X + D u**

Pers. (6)

Prosedur memperoleh Persamaan Kanonik

1. Menentukan Eigen Value matrik A

Eigenvalue Matrik A*nxn*

Eigenvalue dari matrik **A***nxn* adalah akar dari persamaan karakteristik yang dinyatakan sebagai diterminan berikut,

$$\left|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=\mathbf{0} \qquad \text{Pers. (7)}$$

eigenvalue sering disebut *akar - akar karakteristik*.

Prosedur memperoleh Persamaan Kanonik

2. Menjadikan matrik A dalam bentuk diagonalisasi matrik

Jika suatu matrik **A***nxn* dengan *eigenvalue-eigenvalue* yang berbeda dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ : & : & : & & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & .. & -a_1 \end{bmatrix}$$

Pers. (8)

Maka suatu transformasi variable state yang diperoleh dari

$$\mathbf{x=Pz}$$

Pers. (9)

dimana,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & .. & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & .. & \lambda_n^2 \\ : & : & : & & : \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & .. & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Pers. (10)

Prosedur memperoleh Persamaan Kanonik

λ_1, λ_2,….,λ_3 sama dengan eigenvalue dari **A** yang berbeda akan mentransformasi **P**$^{-1}$**AP** menjadi matrik diagonal, atau

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pers. (11)

Perhatikan matrik Pers. 10, merupakan matrik diagonal dengan koefisien matik adalah nilai eigen value. Maka akan diperoleh persamaan keluaran (Pers. 9) menjadi :

$$y = \boldsymbol{CP}^{-1}A\boldsymbol{Pz}$$

$= [1 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 1]\mathbf{z}$

Pers. (12)

Contoh Soal 1

Persamaan diferensial sebuah system dinyatakan dalam bentuk:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Teliti apakah persamaan diferensial tersebut “Controllable” dan Observable

Penyelesaian

Berdasarkan **Persamaan keadaan dan Persamaan keluaran:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [6u] \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Bentuk persamaan kanonik ini adalah: “Controllable”

Soal Latihan 1

Sebuah system dengan persamaan diferensial berikut ini:

$$2\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 10u$$

Uji Persamaan Differensial tersebut untuk sifat “Controllable” dan “Observable”

Soal Latihan 2

Sebuah system dengan persamaan diferensial berikut ini:

$$2\dddot{y} + 4\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 10u$$

Tentukan

(a) Diagonalisasi matrik dari bentuk PD di atas dan

(b). Persamaan keluaran

Ringkasan

1. Persamaan state space, dapat diidentifikasi sebagai persamaan kanonik “Controllable” dan “Observable”
2. Sifat “Controllable” dan “Observable”, dapat diidentifikasi dari operasi matematis matrik A, B, C dan D

Sekian dan terimakasih