Persamaan Diferensial Parsial - Pertemuan XI

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

April 28, 2019

Overview

PDP Orde Dua

Sesuai namanya, PDP Orde Dua paling tinggi memuat turunan tingkat dua dalam persamaan. Pada materi ini, hanya akan dikaji mengenai PDP Orde Dua Linear untuk dua variabel.

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

Persamaan diferensial karakteristik untuk Persamaan Diferensial 1 adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Transformasi

Perhatikan kembali transformasi koordinat $(x, y) \to (\xi, \eta)$ dimana ξ dan η keduanya nilainya bergantung atas x dan y. Jika didefinisikan

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

sebagai matriks Jacobian, maka agar transformasi mempunyai bersifat satu-satu dan mempunyai invers, $\det J \neq 0$.
Pada turunan pertama didapatkan

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \; u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \tag{4}$$

Selanjutnya untuk turunan kedua didapatkan

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} \left(\xi_x\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \left(\eta_x\right)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \left(\xi_y\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \left(\eta_y\right)^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta} \left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \end{aligned} \tag{5}$$

PD Baru

Substitusikan Persamaan-persamaan 4 dan 5 kedalam Persamaan 1, maka diperoleh PD dalam koordinat baru sebagai berikut :

$$\bar{A}(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + \bar{B}(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \bar{C}(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \bar{E}(\xi,\eta,u,u_\eta,u_\xi) \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi,\eta) &= A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 \\ \bar{B}(\xi,\eta) &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ \bar{C}(\xi,\eta) &= A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Lebih lanjut lagi, perhatikan bahwa determinan dari PD dalam koordinat yang baru adalah

$$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = (B^2 - 4AC)(\eta_x\xi_y - \eta_y\xi_x)^2. \tag{8}$$

Untuk PD hiperbolik, nilai diskriminan bernilai positif. Misalkan persamaan karakteristik dari PD hiperbolik adalah $y_x = -\lambda_1$ dan $y_x = -\lambda_2$, dengan solusinya adalah

$$f_1(x, y) = c_1 \text{ dan } f_2(x, y) = c_2,$$

Dari solusi tersebut, jika dipilih koordinat yang baru $\xi = f_1(x, y)$ dan $\eta = f_2(x, y)$ maka diperoleh bahwa

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \xi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\xi_x = \lambda_1 \xi_y \tag{9}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\eta_x = \lambda_2 \eta_y \tag{10}$$

Lanjutan

Substitusikan 9 pada 7 maka diperoleh

$$\bar{A}(\xi,\eta) = (A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C)\xi_y^2$$

sementara substitusi 10 pada 7 diperoleh

$$\bar{C}(\xi,\eta) = (A\lambda_2^2 + B\lambda_2 + C)\eta_y^2.$$

Akibatnya jika dipilih λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

maka diperoleh $\bar{A} = 0$ dan $\bar{C} = 0$. Darisini diperoleh bahwa bentuk kanonik untuk PD hiperbolik dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u_{\xi,\eta} = \hat{E}(\eta,\xi,u,u_\eta,u_\xi)$$

Ringkasan

Langkah-langkah mencari solusi PDP Linear Orde 2 Hiperbolik adalah

1. Tentukan persamaan kuadrat yang bersesuaian
$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$
Misalkan solusinya adalah λ_1 dan λ_2.
2. Tentukan solusi dari Persamaan Karakteristik
$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_1 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda_2.$$
Misalkan solusinya adalah $f(x,y) = c_1$ dan $g(x,y) = c_2$.
3. Pilih koordinat baru $\xi = f(x,y)$ dan $\eta = g(x,y)$.
4. Transformasi PDP dalam koordinat (x,y) menjadi koordinat (ξ,η). Bentuk PDP baru adalah
$$u_{\xi,\eta} = \hat{E}(\eta, \xi, u, u_\eta, u_\xi)$$
Selesaikan.

Example

Tentukan solusi dari PD berikut

$$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

Penyelesaian :

1. Persamaan kuadrat yang bersesuaian

$$\begin{aligned} 3\lambda^2 + 10\lambda + 3 &= 0, \\ (3\lambda + 1)(\lambda + 3) &= 0, \\ 3\lambda + 1 = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda + 3 &= 0, \end{aligned}$$

jadi, solusinya adalah $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ dan $\lambda_2 = -3$.

Contoh 1 II

2. Persamaan Karakteristik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dx} = 3.$$

   Solusinya adalah $y - \frac{1}{3}x = c_1$ dan $y - 3x = c_2$.

3. Pilih koordinat baru $\xi = y - \frac{1}{3}x$ dan $\eta = y - 3x$. Darisini diperoleh

$$\xi_x = -\frac{1}{3}, \quad \eta_x = -3$$
$$\xi_y = 1, \quad \eta_y = 1.$$

Contoh 1 III

4. Transformasi PDP dalam koordinat (x, y) menjadi koordinat (ξ, η).

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{3}u_\xi - 3u_\eta. \\ u_{xx} &= \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -\frac{1}{3}u_{\xi\xi} - \frac{10}{3}u_{xy} - 3u_{yy} \\ u_y &= u_\xi + u_\eta \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

5. Substitusi pada PDP diperoleh solusi umum

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad u(\xi, \eta) &= F(\xi) + G(\eta) \\ u(x, y) &= F(y - \frac{1}{3}x) + G(y - 3x). \end{aligned}$$

Latihan

Tentukan solusi umum dari PDP berikut

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y).$$

Tugas Rumah

Tentukan solusi umum dari PDP berikut

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, u = u(x, t).$$

The End