Beberapa Distribusi Peluang Diskrit

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Pengantar

- Pengamatan yang dihasilkan melalui percobaan yang berbeda seringkali mempunyai bentuk kelakuan umum yang sama.

- Oleh karena itu, peubah acak diskrit yang berkaitan dengan percobaan itu dapat dilukiskan dengan distribusi peluang yang sama atau dengan rumus yang sama.
- Beberapa distribusi peluang diskrit yang banyak ditemukan dalam praktek perlu diketahui.

Distribusi Seragam (*Uniform*) Diskrit

- Jika peubah acak *X* mempunyai nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ dengan peluang yang sama, maka distribusi seragam diskrit didefinisikan sebagai:

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$$

- Rataan dan variansi dari distribusi seragam diskrit adalah:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

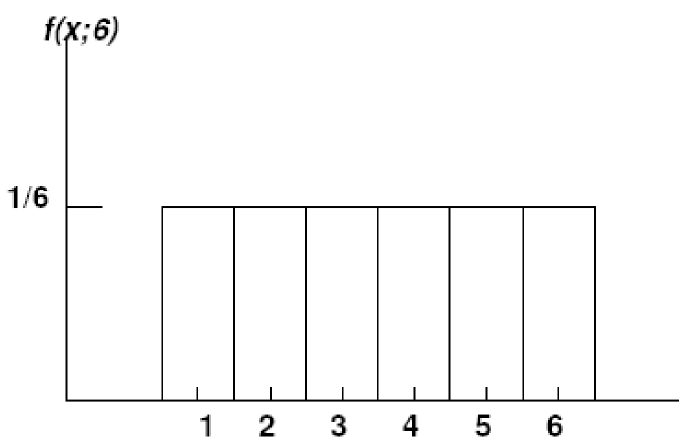
- **Contoh 1**. Jika sebuah dadu dilempar, maka setiap elemen dari ruang sampelnya *S* = {1,2,3,4,5,6} terjadi dengan peluang yang sama 1/6, sehingga kita mempunyai distribusi seragam:

$$f(x;6) = \frac{1}{6}, x = 1,2,3,4,5,6$$

- Rataan dan variansinya adalah:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12}$$



Gambar 1 Histogram dari Pelemparan Dadu

Distribusi Binomial

- Distribusi binomial didasarkan pada proses Bernoulli.
- Pada proses Bernoulli, suatu eksperimen sering terdiri dari beberapa usaha yang berulang-ulang, di mana tiap usaha mempunyai dua kemungkinan: sukses atau gagal.
- Contohnya pada pengujian suatu produk untuk menentukan berapa jumlah produk yang cacat dari *n* pengujian atau usaha.
- Pada tiap pengujian ditentukan bahwa suatu produk cacat atau tidak cacat.
- Setiap pengujian bersifat independen (tidak bergantung pada pengujian sebelumnya).

Sifat-Sifat Proses Bernoulli:

1. Eksperimen terdiri dari n usaha yang berulang
2. Setiap usaha memberikan hasil yang dapat diklasifikasikan menjadi sukses atau gagal
3. Peluang dari sukses adalah p, yang bersifat tetap dalam setiap kali usaha.
4. Tiap usaha tersebut bersifat independen satu sama lain.

- **Contoh 2. (Contoh proses Bernoulli).** Misalkan suatu kelompok usaha Bernoulli yang berupa pengambilan tiga barang secara acak dari suatu hasil proses manufaktur, diperiksa, dan kemudian diklasifikasikan ke dalam kategori baik (*N*) dan cacat (*D*). Misalkan *X* adalah peubah acak yang menyatakan jumlah barang yang cacat. Nilai yang mungkin dari *X* adalah 0, 1, 2, dan 3 seperti pada tabel berikut:

Hasil	x
NNN	0
NDN	1
NND	1
DNN	1
NDD	2
DND	2
DDN	2
DDD	3

- Karena barang dipilih secara independen dari proses yang dianggap mempunyai peluang 25% barang yang cacat, maka:

$$P(NDN) = P(N)P(D)P(N) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

- Distribusi peluang *X* secara lengkap adalah:

x	0	1	2	3
f(x)	27/64	27/64	9/64	1/64

- Jumlah *X* yang sukses dari *n* percobaan Bernoulli disebut dengan **peubah acak binomial.** Distribusi peluang dari peubah acak diskrit ini disebut dengan **distribusi binomial,** dan nilainya akan dinotasikan dengan *b(x*; *n, p),* misalkan:

  P(X=2) = f(2) = b(2; 3, 1/4) = 9/64

Definisi Distribusi Binomial

- Suatu usaha Bernoulli dapat menghasilkan sukses dengan peluang *p* dan gagal dengan peluang *q* = 1 – *p* . Maka distribusi peluang dari peubah acak binomial *X*, yaitu jumlah sukses dari n usaha yang independen adalah:

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

- Keterangan: $\binom{n}{x}$ adalah notasi lain untuk C(n, x). Notasi ini disebut juga notasi binomial.

Tabel Binomial

- Biasanya dalam soal kita diminta menghitung distribusi kumulatif P(X < r) atau P(a ≤ X ≤ b)

  P(X < r) = $\sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

  P(a ≤ X ≤ b) = $\sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

- Untuk menghitung sigma itu, untunglah sudah tersedia tabel binomial yang sudah berisi nilai-nilai b(x; n, p) untuk bermacam-macam nilai x, n dan p.

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=6$	$x=0$	0.9415	0.8858	0.8330	0.7828	0.7351	0.6899	0.6470	0.6064	0.5679	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9943	0.9875	0.9784	0.9672	0.9541	0.9392	0.9227	0.9048	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9978	0.9962	0.9942	0.9915	0.9882	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n= 7	x= 0	0.9321	0.8681	0.8080	0.7514	0.6983	0.6485	0.6017	0.5578	0.5168	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9921	0.9829	0.9706	0.9556	0.9382	0.9187	0.8974	0.8745	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9997	0.9991	0.9980	0.9962	0.9937	0.9903	0.9860	0.9807	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9982	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 8	x= 0	0.9227	0.8508	0.7837	0.7214	0.6634	0.6096	0.5596	0.5132	0.4703	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9897	0.9777	0.9619	0.9428	0.9208	0.8965	0.8702	0.8423	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9996	0.9987	0.9969	0.9942	0.9904	0.9853	0.9789	0.9711	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9978	0.9966	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 9	x= 0	0.9135	0.8337	0.7602	0.6925	0.6302	0.5730	0.5204	0.4722	0.4279	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9869	0.9718	0.9522	0.9288	0.9022	0.8729	0.8417	0.8088	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9994	0.9980	0.9955	0.9916	0.9862	0.9791	0.9702	0.9595	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9977	0.9963	0.9943	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 10	x= 0	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9838	0.9655	0.9418	0.9139	0.8824	0.8483	0.8121	0.7746	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9991	0.9972	0.9938	0.9885	0.9812	0.9717	0.9599	0.9460	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9964	0.9942	0.9912	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p=$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=11$ $x=0$	0.8953	0.8007	0.7153	0.6382	0.5688	0.5063	0.4501	0.3996	0.3544	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
1	0.9948	0.9805	0.9587	0.9308	0.8981	0.8618	0.8228	0.7819	0.7399	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
2	0.9998	0.9988	0.9963	0.9917	0.9848	0.9752	0.9630	0.9481	0.9305	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
3	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9984	0.9970	0.9947	0.9915	0.9871	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9990	0.9983	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=12$ $x=0$	0.8864	0.7847	0.6938	0.6127	0.5404	0.4759	0.4186	0.3677	0.3225	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
1	0.9938	0.9769	0.9514	0.9191	0.8816	0.8405	0.7967	0.7513	0.7052	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
2	0.9998	0.9985	0.9952	0.9893	0.9804	0.9684	0.9532	0.9348	0.9134	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9978	0.9957	0.9925	0.9880	0.9820	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9973	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=13$ $x=0$	0.8775	0.7690	0.6730	0.5882	0.5133	0.4474	0.3893	0.3383	0.2935	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
1	0.9928	0.9730	0.9436	0.9068	0.8646	0.8186	0.7702	0.7206	0.6707	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
2	0.9997	0.9980	0.9938	0.9865	0.9755	0.9608	0.9422	0.9201	0.8946	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9986	0.9969	0.9940	0.9897	0.9837	0.9758	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9959	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=14$	$x=0$	0.8687	0.7536	0.6528	0.5647	0.4877	0.4205	0.3620	0.3112	0.2670	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.9690	0.9355	0.8941	0.8470	0.7963	0.7436	0.6900	0.6368	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9975	0.9923	0.9833	0.9699	0.9522	0.9302	0.9042	0.8745	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9999	0.9994	0.9981	0.9958	0.9920	0.9864	0.9786	0.9685	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9965	0.9941	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=15$	$x=0$	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.9647	0.9270	0.8809	0.8290	0.7738	0.7168	0.6597	0.6035	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9970	0.9906	0.9797	0.9638	0.9429	0.9171	0.8870	0.8531	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9998	0.9992	0.9976	0.9945	0.9896	0.9825	0.9727	0.9601	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9972	0.9950	0.9918	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=20$	$x=0$	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358	0.6605	0.5869	0.5169	0.4516	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245	0.8850	0.8390	0.7879	0.7334	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841	0.9710	0.9529	0.9294	0.9007	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974	0.9944	0.9893	0.9817	0.9710	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9981	0.9962	0.9932	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=20$	$x=8$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=25$	$x=0$	0.7778	0.6035	0.4670	0.3604	0.2774	0.2129	0.1630	0.1244	0.0946	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.9114	0.8280	0.7358	0.6424	0.5527	0.4696	0.3947	0.3286	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.9868	0.9620	0.9235	0.8729	0.8129	0.7466	0.6768	0.6063	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9986	0.9938	0.9835	0.9659	0.9402	0.9064	0.8649	0.8169	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9999	0.9992	0.9972	0.9928	0.9850	0.9726	0.9549	0.9314	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9969	0.9935	0.9877	0.9790	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9987	0.9972	0.9946	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=30$	$x=0$	0.7397	0.5455	0.4010	0.2939	0.2146	0.1563	0.1134	0.0820	0.0591	0.0424	0.0076	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9639	0.8795	0.7731	0.6612	0.5535	0.4555	0.3694	0.2958	0.2343	0.1837	0.0480	0.0105	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9967	0.9783	0.9399	0.8831	0.8122	0.7324	0.6487	0.5654	0.4855	0.4114	0.1514	0.0442	0.0106	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9998	0.9971	0.9881	0.9694	0.9392	0.8974	0.8450	0.7842	0.7175	0.6474	0.3217	0.1227	0.0374	0.0093	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
	4	1.0000	0.9997	0.9982	0.9937	0.9844	0.9685	0.9447	0.9126	0.8723	0.8245	0.5245	0.2552	0.0979	0.0302	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000

- Sebagai contoh, untuk menghitung P(X < 10) untuk n = 15, p = 0,4, maka:

$$P(X < 10) = \sum_{x=0}^{9} \mathrm{b}(\mathrm{x}; 15, 0.4)$$

Cari pada baris tabel n = 15, x = 9, dan p = 0.4, maka diperoleh

$$\sum_{x=0}^{9} \mathrm{b}(x;15,0.4) = 0.9662$$

- Untuk menghitung P(X = 5), maka dapat digunakan manipulasi

$$\sum_{x=0}^{5} \mathrm{b}(x;15,0.4) - \sum_{x=0}^{4} \mathrm{b}(\mathrm{x};15.4) = 0.4032 - 0.2173 = 0.1859$$

- **Contoh 3.** Peluang seorang pasien sembuh dari suatu penyakit darah yang jarang terjadi adalah 0,4. Jika diketahui 15 orang yang telah mengidap penyakit ini, tentukan peluang:
    a) sekurang-kurangnya 10 orang bisa sembuh,
    b) dari 3 sampai 8 orang bisa sembuh, dan
    c) tepat 5 orang bisa sembuh.

- <u>Jawaban</u>:

  Misalkan *X* adalah jumlah orang yang sembuh,

  N = 15, p = 0.4

$$(a).\, P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x; 15, 0.4) = 1 - 0.9662 = 0.0338$$

$$(b).\, P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} b(x; 15, 0.4)$$

$$= \sum_{x=0}^{8} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 15, 0.4) = 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$$

$$(c).\, P(X = 5) = b(5; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^{5} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{4} b(x; 15, 0.4) = 0.4032 - 0.2173 = 0.1859$$

Eksperimen Multinomial

- Distribusi binomial dapat diperluas menjadi multinomial. Distribusi multinomial didasarkan pada eksperimen multinomial.
- Eksperimen dapat dikembangkan menjadi multinomial bila tiap usaha menghasilkan lebih dari dua hasil, jadi tidak hanya sukses atau gagal.
- Misalkan pengambilan kartu dengan pengembalian adalah percobaan multinomial bila yang menjadi perhatian keempat jenis kartu .
- Dari rumus binomial dapat dikembangkan menjadi:

$$\binom{n}{x_1, x_2, .., x_k} = \left(\frac{n!}{x_1!, x_2!, \ldots, x_k!}\right)$$

Distribusi Multinomial

- Jika suatu percobaan dapat menghasilkan *k macam hasil* $E_1, E_2, \dots, E_k$ dengan peluang $p_1, p_2, \dots, p_k$ maka distribusi peluang dari peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_k$ yang menyatakan banyak terjadinya $E_1, E_2, \dots, E_k$ dalam *n* usaha yang independen adalah:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

dengan

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

- **Contoh 4**. Sepasang dadu dilempar sebanyak 6 kali, tentukan peluang memperoleh jumlah 7 atau 11 sebanyak dua kali, angka yang sama sekali, dan kombinasi sisanya sebanyak 3 kali.

  Jawaban:

  E_1 : jumlah 7 atau 11 muncul

  E_2: pasangan bilangan yang sama muncul

  E_3 : bukan dari dua tersebut (kombinasi sisanya)

  Peluang dari *E1, E2, E3* masing–masing adalah

  p1 = 2/9, p2 = 1/6, *p3* = 11/18.

  Dengan distribusi multinomial dengan *x1* = 2*, x2 = 1, x3 = 3,* diperoleh:

$$f\left(2,1,3;\frac{2}{9},\frac{1}{6},\frac{11}{18},6\right)=\binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{11}{18}\right)^3=\frac{6!}{2!\,1!\,3!}\cdot\frac{2^2}{9^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{11^3}{18^3}=0.1127$$

Distribusi Hipergeometrik

- Distribusi hipergeometrik mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:
  1. Secara acak diambil sebanyak n tanpa dikembalikan dari N benda.
  2. k dari N benda diklasifikasikan sukses dan N-k diklasifikasikan gagal
- Jumlah sukses X dari eksperimen hipergeometrik disebut **peubah acak hipergeometrik**.
- Distribusi peluang dari peubah acak hipergeometrik disebut dengan distribusi hipergeometrik, dan nilainya dinotasikan dengan $h(x; N, n, k)$

- **Definisi**. Distribusi peluang dari peubah acak hipergeometrik *X*, yaitu jumlah sukses dari sampel acak berukuran *n* yang diambil dari *N* benda, di mana terdapat *k* jumlah sukses dan *N*-*k* jumlah gagal adalah:

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0,1,2,\dots,n$$

- **Contoh 5**. Dari suatu kotak yang berisi 40 suku cadang, 3 di antaranya rusak. Jika diambil secara acak 5 buah suku cadang, tentukan peluang sampel tersebut berisi 1 komponen rusak.

  <u>Jawaban</u> :

  Dengan distribusi hipergeometrik dengan

  n = 5, N = 40, k = 3, dan x = 1, diperoleh

$$h(1; 40,5,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.3011$$

- **Contoh 6**. Sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang dipilih secara acak dari 3 orang mahasiswa STI dan 5 orang mahasiswa IF. Tentukan rumus distribusi peluang banyaknya mahasiswa STI yang terpilih dalam panitia tersebut, lalu hitung peluang terpilihnya 2 orang mahasiswa STI.

  Jawaban:

  Misalkan X menyatakan peubah acak yang menyatakan banyaknya mahasiswa STI yang terpilih dalam panitia tsb.

  N = 5 + 3 = 8; n = 5; k = 3

  Distribusi peluang: h(x; 8, 5, 3) = $\dfrac{\binom{3}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{8}{5}}$

  Untuk x = 2, maka h(2; 8, 5, 3) = $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \dfrac{30}{56}$

- Rataan dan variansi dari distribusi hipergeometrik $h(x; N, n, k)$ adalah

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} . n. \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Perampatan Distribusi Hipergeometrik

- Bila N benda dapat dikelompokkan dalam k-sel A_1, A_2, …, A_k yang masing-masing berisi a_1, a_2, …, a_k benda, maka distribusi peluang acak X_1, X_2, …, X_k yang menyatakan banyaknya benda (anggota) yang terambil dari A_1, A_2, …, A_k dalam suatu sampel acak berukuran n adalah:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k; a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

dengan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} a_i = N$

- **Contoh 7**. Sepuluh orang dipakai dalam suatu penelitian biologi. Tiga orang diantara mereka bergolongan darah O, 4 orang bergolongan darah A, dan 3 orang bergolongan darah B. Diambil 5 orang diantara mereka secara acak, berapa peluang 1 orang diantaranya bergolongan darah O, 2 bergolongan darah A, dan 2 bergolongan darah B?

  Jawaban: N = 10, n = 5

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_3 = 3$$

$$f(1, 2, 2; 3, 4, 3, 10, 5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

Distribusi Poisson

- Eksperimen Poisson adalah eksperimen yang menghasilkan nilai numerik dari peubah acak *X* pada selang waktu yang tertentu atau daerah tertentu.

  Contoh:

  1) jumlah panggilan telepon dalam waktu 1 jam yang diterima oleh resepsionis.

  2) banyaknya pertandingan tenis yang terpaksa diundurkan karena terjadinya hujan selama musim hujan

  3) banyaknya tikus dalams atu hektar sawah

  4) banyaknya salah ketik dalam satu halaman

- Eksperimen Poisson diturunkan dari proses Poisson.

- Sifat-sifat proses Poisson:
    1. Jumlah hasil yang terjadi dalam satu selang waktu atau daerah tertentu adalah independen terhadap hasil yang terjadi pada selang atau daerah lain. Proses Poisson dikatakan tidak mempunyai ingatan.
    2. Peluang terjadinya suatu hasil (tunggal) dalam selang waktu yang sangat pendek atau daerah yang sangat kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak bergantung pada banyaknya hasil yang terjadi di luar selang atau daerah tersebut
    3. Peluang terjadinya lebih dari satu hasil yang terjadi dalam selang waktu yang pendek dapat diabaikan

- Definisi Distribusi Poisson:

  Distribusi peluang peubah acak Poisson *X*, yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu --dinotasikan dengan *t* -- adalah:

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

  di mana λt adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi per satuan waktu atau daerah, dan $e = 2.71828\ldots$

- Rataan dan variansi dari distribusi Poisson $p(x;\lambda t)$ adalah sama, yaitu λt.
- Tabel distribusi Poisson membantu untuk menghitung jumlah peluang Poisson P(r; λt) =

Contoh 8: Dalam sebuah eksperimen di laboratorium nuklir , rata-rata jumlah partikel radioaktif yang melewati sebuah pencacah (*counter*) adalah 4 tiap milidetik. Tentukan peluang 6 partikel akan lewat dalam selang waktu 1 milidetik.

<u>Jawaban</u>:

Dengan distribusi Poisson dengan x = 6 dan λt = 4, dan menggunakan tabel distribusi Poisson:

$$p(6;4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = \sum_{x=0}^{6} p(x;4) - \sum_{x=0}^{5} p(x;4)$$

$$= 0.8893 - 0.7851 = 0.1042$$

- **Contoh 9**. Rata-rata pasien yang datang ke klinik dokter gigi pada waktu malam hari adalah 10 orang. Dokter gigi hanya mampu menerima paling banyak 15 orang setiap hari. Berapa peluang pada hari tertentu pasien terpaksa ditolak karena dokter tidak sanggup melayaninya?

  Jawaban:

$$P(X > 15) = 1 - P(X \le 15)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x;10)$$

$$= 1 - 0.9513$$

$$= 0.0487$$

- Distribusi Poisson dapat diturunkan sebagai limit distribusi binomial bila n $\to \infty$, p $\to$ 0, dan np tidak berubah. Maksudnya, bila n besar dan p dekat dengan nol, distribusi Poisson dapat digunakan, dengan μ = np , untuk menghampiri distribusi binomial.
- Misalkan *X* adalah peubah acak binomial dengan distribusi peluang *b*(*x*;*n*;*p*). Bila n $\to \infty$, p $\to$ 0, dan μ = np tetap sama , maka:

$$b(x;n;p) \to p(x;\mu)$$

- **Contoh 10**. dalam sebuah proses produksi, cacat pada produk menyebabkan produk tersebut sulit dipasarkan. Diketahui bahwa rata-rata 1 dari 1000 barang yang dihasilkan cacat, berapa peluang bahwa dalam sampel acak sebanyak 8000 barang berisi kurang dari 7 yang cacat?

  Jawaban: n = 8000 dan p = 0.001. Karena p dekat dengan 0 dan n cukup besar, maka distribusi binomial dihampiri dengan distribusi Poisson dengan μ = np = (8000)(0.001) = 8.

  Misalkan X menyatakan banyaknay barang yang cacat, maka

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^{6} b(x; 8000, 0.001) = \sum_{x=0}^{6} p(x;8) = 0.3134$$

- **Contoh 11:** Di sebuah industri diketahui jarang terjadi kecelakaan. Misalkan diketahui bahwa peluang terjadi kecelakaan untuk suatu hari adalah 0.005 dan tiap kecelakaan tidak bergantung satu sama lain.
  a) Berapa kemungkinan dalam periode 400 hari terdapat kecelakaan dalam satu hari?
  b) Berapa kemungkinan bahwa ada paling banyak tiga hari dengan satu kecelakaan?

Jawaban: n = 400, p = 0.005, μ = np = 2. Dengan hampiran Poisson, maka

(a) $$P(X=1)=\frac{(e^{-2})(2)^1}{1!}=\sum_{x=0}^{1}\mathrm{p}(x;2)-\sum_{x=0}^{0}\mathrm{p}(\mathrm{x};2)=0.271$$

(b) $$P(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3}\frac{e^{-2}2^1}{x!}=\sum_{x=0}^{3}\mathrm{p}(\mathrm{x};2)=0.8571$$

Distribusi Binomial Negatif

- Pada percobaan binomial, misalkan usaha diulang sampai tercapai sejumlah sukses tertentu.
- Misalkan kita ingin mengetahui bahwa sukses ke-k terjadi pada usaha ke-x.
- Percobaan semacam ini dinamakan **percobaan binomial negatif**.
- Banyaknya usaha X untuk menghasilkan k sukses dalam suatu percobaan binomial negatif **disebut peubah acak binomial negatif** dan distribusi peluangnya disebut **distribusi binomial negatif**.

- **Contoh 12**. Suatu obat diketahui manjur 60% untuk mengobati suatu penyakit tertentu. Penggunaan obat tersebut dikatakan sukses bila menyembuhkan si penderita sampai pada taraf tertentu. Kita ingin mengetahui peluang penderita kelima yang sembuh merupakan orang yang ketujuh yang menerima obat-obatan tersebut selama minggu tertentu.

  Jawaban:

  Nyatakan sukses dangan S dan gagal dengan G.

  SGSSSGS merupakan salah satu kemungkinan urutan untuk mencapai hasil tersebut, dengan peluang:

  $$(0.6)(0.4)(0.6)(0.6)(0.6)(0.4)(0.6) = (0.6)^4 (0.4)^2$$

  Semua urutan yang mungkin dapat ditulis dari G dan S asalkan yang terakhir haruslah merupakan sukses kelima.

Jumlah semua urutan mengandung 2 gagal dan 4 sukses adalah $\binom{6}{4}$ cara.

Peluang X menyatakan hasil yang membuahkan sukses kelima adalah

P(X = 7) = $\binom{6}{4}(0.6)^4(0.4)^2 = 0.1866$

- **Definisi Distribusi Binomial Negatif**. Bila usaha yang saling bebas dilakukan berulangkali menghasilkan sukses dengan peluang p sedangkan gagal dengan peluang p – 1, maka distribusi peluang acak X, yaitu banyaknya usaha yang berakhir tepat pada sukses ke-k diberikan oleh

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

- **Contoh 13**. Tiga uang logam dilantunkan sekaligus. Berapa peluang semuanya menghasilkan sisi gambar (G) atau sisi angka (A) untuk kedua kalinya pada pelantunan kelima?

Jawaban: x = 5, k = 2, dan p = ¼

$$b^*(5; 2, ¼) = \binom{5-1}{2-1}(1/4)^2(3/4)^3 = \frac{27}{257}$$

Distribusi Geometrik

- Distribusi geometrik adalah kasus khusus dari distribusi binomial negatif untuk $k = 1$, yaitu distribusi peluang banyaknya usaha yang diperlukan untuk mendapatkan sukses pertama.

- Jika $k = 1$ disulihkan ke dalam persamaan distribusi binomial negatif, maka persamaannya menyusut menjadi $b^*(x; 1, p) = pq^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, ...$ Karena urutan semua suku membentuk deret geometri, maka distribusinya dinamakan distribusi geometrik.

- **Definisi distribusi geometrik**. Bila usaha yang saling bebas dan dilakukan berulangkali menghasilkan sukses dengan peluang p, gagal dengan peluang q = p – 1, maka distribusi peluang peubah acak X, yaitu banyaknya usaha sampai terjadi sukses yang pertama diberikan oleh

$$g(x; p) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Contoh 14**. Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi adalah cacat. Misalkan diperiksa 5 butir, berapa peluang ditemukan satu buah cacat setelah butir kelima?

  Jawaban: Diketahui $p = 1/100$ dan $x = 5$, maka

$$g(5; 0.01) = (0.01)(0.99)^4 = 0.0096$$

- **Contoh 15**. Pada jam-jam sibuk, sangat sulit mendapat sambungan telepon hanya dengan satu kali usaha men-*dial*. Misalkan untuk mendapat sambungan pada jam sibuk peluangnya adalah 5%. Berapa peluang diperlukan 5 usaha agar sambungan berhasil?

Jawaban: $x = 5$ dan $p = 0.05$, diperoleh

$$P(X = 5) = g(5; 0.05) = (0.05)(0.95)^4$$
$$= 0.041$$

- **Latihan**. Seorang pemabuk pulang ke rumah. Dia memiliki 5 buah kunci pada gelang kunci yang selalu dibawanya. Dia memilih secara acak satu kunci dan mencoba membuka pintu dengan kunci itu sampai ditemukan kunci yang tepat. Misalkan dia terlalu mabuk sehingga sehingga mungkin saja memilih kunci yang berulang untuk dicoba. Berapa peluang dia sukses menemukan kunci yang tepat pada usaha ke-7?

  (jawaban setelah slide ini)

- Jawaban: $x = 7$, $p = 1/5$ dan $q = 1 – 1/5 = 4/5$

$$P(X = 7) = g(7; 1/5) = (1/5)(4/5)^6$$

$$= 0.0524288$$

- Rataan dan variansi peubah acak distribusi geometrik adalah

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$