MATEMATIKA DISKRIT

WHAT IS?

- **Matematika Diskrit**
    - **Ada juga yang menggunakan istilah**
    -
- **Struktur Diskrit**

Logika Matematika

\# Aturan/Hukum2 dalam Logika

a) komutatif

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

b) Asosiatif

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

c) Distributif

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

d) Absorbsi

$p \vee (q \wedge p) \equiv p$

$p \wedge (q \vee p) \equiv p$

$A \vee (B \wedge A) \equiv A$

e) Demorgan

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

f) Ekuivalen

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (kontraposisi)

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim p \Rightarrow q \equiv p \vee q$

$\sim p \Rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv p \wedge \sim q$

#pernyataan : Kalimat yang bisa ditentukan nilai benar atau salahnya. <kalimat tertutup>

#bukan pernyataan: Kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai benar atau salahnya (mengandung pengertian relatif)

kalimat terbuka : Kalimat yang belum bisa ditentukan nilai benar atau salanya (masih mengandung variabel)

#CONTOH

1. Bandung terletak di Jawa Barat → pernyataan <Benar>
2. Apakah kamu sudah makan ? → bukan pernyataan
3. $5 + x = 7$ → kalimat terbuka!

APAKAH MATEMATIKA DISKRIT ITU?

- Matematika Diskrit: cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit.

- Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)?

  Benda disebut diskrit jika:

  – terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda, atau

  – elemen-elemennya tidak bersambungan (*unconnected*).

- Contoh: himpunan bilangan bulat (*integer*)

- Lawan kata diskrit: **kontinyu** atau **menerus** (*continuous*).

  Contoh: himpunan bilangan riil (*real*)

- Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.

- Matematika diskrit merupakan ilmu dasar dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer.

- Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika.

  → algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb.

- Matematika diskrit adalah matematika yang khas di bidang informatika

  → **Matematika-nya orang Informatika.**

Materi-materi dalam Matematika Diskrit:

- Logika (*logic*) √
- Teori Himpunan (*set*) √
- Matriks (*matrice*) √
- Relasi dan Fungsi (*relation and function*) √
- Induksi Matematik (*mathematical induction*) √
- Algoritma (*algorithms*)
- Teori Bilangan Bulat (*integers*) √
- Barisan dan Deret (*sequences and series*)
- Teori Grup dan *Ring* (*group and ring*)
- Aljabar Boolean (*Boolean algebra*)
- Kombinatorial (*combinatorics*) √
- Teori Peluang Diskrit (*discrete probability*)
- Fungsi Pembangkit dan Analisis Rekurens
- Teori Graf (*graph – included tree*) √
- Kompleksitas Algoritma (*algorithm complexity*) √
- Otomata & Teori Bahasa Formal (*automata and formal language theory*)

Contoh-contoh persoalan di dalam Matematika Diskrit:

- Berapa banyak kemungkinan jumlah *password* yang dapat dibuat dari 8 karakter?
- Bagaimana nomor ISBN sebuah buku divalidasi?
- Berapa banyak *string* biner yang panjangnya 8 bit yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil?
- Bagaimana menentukan lintasan terpendek dari satu kota *a* ke kota *b*?
- Buktikan bahwa perangko senilai n ($n \geq 8$) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja
- Diberikan dua buah algoritma untuk menyelesaian sebuah persoalan, algoritma mana yang terbaik?

- Bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital yang disusun oleh 7 buah batang (*bar*)?

- Dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perubahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

- "Makanan murah tidak enak", "makanan enak tidak murah". Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?

MORAL OF THIS STORY…

- Mahasiswa informatika harus memiliki pemahaman yang kuat dalam Matematika Diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

BUKU PEGANGAN

- 1. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Application to Computer Science 5th Edition*, Mc Graw-Hill, 2003.
- 2. Rinaldi Munir, *Diktat kuliah IF2153 Matematika Diskrit (Edisi Keempat*), Teknik Informatika ITB, 2003. (juga diterbitkan dalam bentuk buku oleh Penerbit Informatika.
- 3. Richard Johsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, 1997.

HIMPUNAN

SECTION I

HIMPUNAN (*SET*)

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

CARA PENYAJIAN HIMPUNAN

- Enumerasi
- Simbol-simbol Baku
- Notasi Pembentuk Himpunan
- Diagram Venn

ENUMERASI

Contoh

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

ENUMERASI

- Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

ENUMERASI

Contoh Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin B$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

ENUMERASI

Contoh

Bila $P1 = \{a, b\}$, $P2 = \{ \{a, b\} \}$, $P3 = \{\{\{a, b\}\}\}$

maka

$a \in P1$

$a \notin P2$

$P1 \in P2$

$P1 \notin P3$

$P2 \in P3$

SIMBOL-SIMBOL BAKU

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ...}

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ...}

Z = himpunan bilangan bulat ={...,-2, -1, 0, 1, 2,...}

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

SIMBOL-SIMBOL BAKU

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

- Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

NOTASI PEMBENTUK HIMPUNAN

Notasi: { *x* $\propto$ syarat yang harus dipenuhi oleh *x* }

Contoh

(i) *A* adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5
$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$
atau
$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$
yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

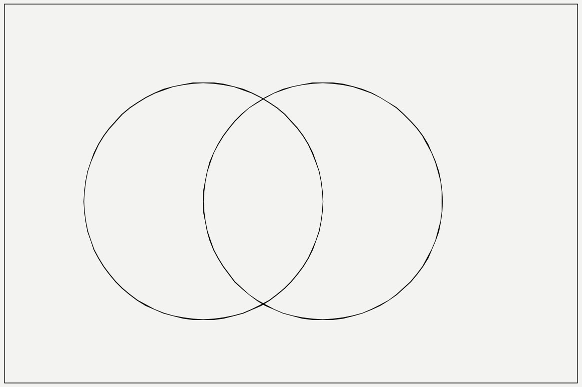
(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah MA 2333$\}$

DIAGRAM VENN

Contoh

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



KARDINALITAS

Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.
Notasi: $n(A)$ atau $' A'$

Contoh

(i) B = { x | x merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },
atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka $\angle B \angle = 8$

(ii) T = {kucing, *a*, Amir, 10, paku}, maka $\angle T \angle = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $\angle A \angle = 3$

HIMPUNAN KOSONG

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).

Notasi : $\varnothing$ atau {}

Contoh

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) A ={x | x adalah akar persamaan kuadrat $x2 + 1 = 0$ }, $n(A)=0$

HIMPUNAN KOSONG

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

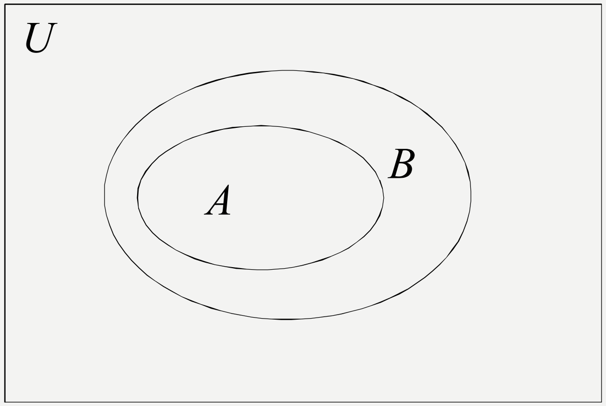
HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.

Notasi: $A \subseteq B$

Diagram Venn:



Operasi-operasi pada Proposisi

Banyak pernyataan matematis dikonstruksi oleh kombinasi satu atau lebih proposisi. Kombinasi dari beberapa proposisi tersebut dilakukan dengan menggunakan operator logika. Beberapa jenis operator logika adalah *ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi* dan sebagainya. Pernyataan baru yang diperoleh dari operasi-operasi yang dilakukan terhadap beberapa proposisi/pernyataan dinamakan **proposisi majemuk** (**pernyataan majemuk**). Hasilnya juga merupakan proposisi, artinya ia memiliki nilai kebenaran.

1. Ingkaran (negasi)

Untuk suatu pernyataan *p*, maka ingkaran dari pernyataan *p* dapat dinotasikan dengan menggunakan $\sim p$

Dengan demikian, tabel kebenaran operasi ingkaran dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.1 Tabel Kebenaran Negasi

p	$\sim P$
T	F
F	T

2. Konjungsi (*and*)

Dua pernyataan p, q dapat membentuk suatu pernyataan majemuk dengan operasi "***and* / dan**", ditulis dalam bentuk "p **dan** q" yang disebut dengan *konjungsi*. Representasi dari pernyataan ini ditulis dengan notasi $p \wedge q$.

Tabel kebenaran operasi konjungsi dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.2 Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. Disjungsi (*or*)

Dua pernyataan p, q dapat membentuk suatu pernyataan majemuk dengan operasi "***or* / atau**", dapat dituliskan dalam bentuk " p **atau** q" yang disebut dengan disjungsi. Representasi dari pernyataan ini ditulis dengan notasi $p \vee q$.

Tabel kebenaran operasi disjungsi dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.3 Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. Ekslusive Or (XoR)

Dari dua pernyataan p, q dapat membentuk suatu pernyataan majemuk dengan operasi **XoR**, yang ditulis dalam bentuk "p exlusive or q". Notasi dari pernyataan ini adalah $p \oplus q$. Tabel kebenaran operasi *exclusive or* dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.4 Tabel Kebenaran XoR

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

5. Implikasi

Dua pernyataan p, q dapat membentuk suatu pernyataan majemuk dalam bentuk "jika p maka q" yang disebut dengan implikasi. Pernyataan ini dinotasikan $p \rightarrow q$.

Tabel kebenaran untuk operasi implikasi dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.5 Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh 1.2:

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah.
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi.

Dalam implikasi, kita mengenal beberapa istilah:

- Konvers (kebalikan): $q \rightarrow p$
- Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
- Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

6. **Biimplikasi**

Dari dua pernyataan p, q dapat dibentuk suatu pernyataan majemuk dalam bentuk "p jika dan hanya jika q" yang disebut dengan biimplikasi. Pernyataan ini dinotasikan $p \Leftrightarrow q$.

Dengan demikian, tabel kebenaran operasi biimplikasi dapat disajikan sebagai berikut:

Tabel 1.6 Tabel Kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Contoh 1.3:

Diketahui pernyataan-pernyataan berikut:

p : Gadis itu tinggi $\qquad$ q : Gadis itu cantik

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

a. Gadis itu tinggi dan cantik.
b. Gadis itu tinggi tapi tidak cantik.
c. Gadis itu tidak tinggi maupun cantik.
d. Tidak benar bahwa gadis itu pendek atau tidak cantik.
e. Gadis itu tinggi, atau pendek dan cantik.
f. Tidak benar bahwa gadis itu pendek maupun cantik.

Jawab:

a. $p \wedge q$
b. $p \wedge \sim q$
c. $\sim p \wedge \sim q$
d. $\sim(\sim p \vee \sim q)$
e. $p \vee (\sim p \wedge q)$
f. $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Contoh 1.4:

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya."

Jawab:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil.
Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya.
Kontraposisi : Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil .

Pernyataan Berkuantor

Pernyataan berkuantor adalah suatu pernyataan yang memuat kata *semua* (*untuk setiap*), *beberapa* (*ada*). Jika pada kalimat terbuka dibubuhkan kuantor, maka *kalimat terbuka* tersebut berubah menjadi *kalimat tertutup* (pernyataan).

Misal:

- ada bilangan genap yang merupakan bilangan prima
- ada beberapa x, sehingga tan $x = 1$
- semua bilangan riil kuadratnya tidak negatif.

Kuantor ada dua macam, yaitu:

1. Kuantor universal

   $\forall x \in A$ dibaca untuk setiap/semua x anggota A.
2. Kuantor Eksistensial

   $\exists x \in A$ dibaca untuk beberapa x anggota A.

Ingkaran dari $\forall x \in A$ adalah $\exists x \notin A$

Ingkaran dari $\exists x \in A$ adalah $\forall x \notin A$

Contoh 1.5:

Kuantor universal: kuadrat setiap bilangan ganjil, adalah bilangan ganjil.

Kuantor eksistensial: ada beberapa x dan y sehingga $x + y = x.y$

Suatu pernyataan majemuk dapat berbentuk tautologi atau kontradiksi.

- Pernyataan majemuk disebut tautologi jika ia benar untuk semua kasus

Contoh 1.6:

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

- Pernyataan majemuk disebut kontradiksi jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 1.7:

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Dua buah pernyataan majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$

Contoh 1.8:

Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Contoh 1.9:

Tunjukkan bahwa $p \to q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Jawab:

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Hal ini berarti bahwa, pernyataan majemuk "Jika p maka q" $\equiv$ "Tidak p atau q".

Contoh 1.10:

Tentukan ingkaran dari $p \to q$.

Jawab:

$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ (sudah dibuktikan sebelumnya)

$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$ (hukum De Morgan)

$\equiv p \wedge \sim q$

Hal ini menunjukkan bahwa ingkaran dari implikasi $p \to q$ adalah $p \wedge \sim q$

Jadi, misal ada suatu pernyataan:

Jika hari hujan, maka tanaman tumbuh subur.

Maka ingkaran dari pernyataan tersebut adalah

Hari hujan dan tanaman tidak tumbuh subur.

atau bisa juga

Hari hujan tetapi tanaman tidak tumbuh subur.

kontraposisi, serta pembuktian dengan kontradiksi. Sebagai tambahan dalam subbab ini juga dibahas mengenai pembuktian dengan induksi matematik.

1. Pembuktian Langsung

Contoh 1.11:

Buktikan bahwa jika terdapat dua pernyataan:

$p \wedge q$ bernilai salah

$p \rightarrow r$ bernilai salah

maka $\sim p \vee q \vee r$ bernilai salah

Jawab:

(i) $p \rightarrow r$ bernilai salah, berarti $p \equiv \mathbf{B}$ dan $r \equiv \mathbf{S}$

$p \wedge q$ bernilai salah, berarti $q \equiv \mathbf{S}$

(ii) Dari (i), kita dapatkan

$$\begin{aligned} \sim p \vee q \vee r &\equiv \mathbf{S} \vee \mathbf{S} \vee \mathbf{S} \\ &\equiv \mathbf{S} \end{aligned}$$

Jadi terbukti.

2. Pembuktian dengan Kontraposisi

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah tahu bahwa implikasi $p \rightarrow q$ ekivalen dengan kontraposisinya, yaitu $\sim q \rightarrow \sim p$. Untuk itu, metode kontraposisi ini bisa juga digunakan untuk membuktikan sebuah pernyataan yang berbentuk implikasi.

Contoh 1.12:

Buktikan bahwa jika terdapat dua pernyataan:

$p \wedge q$ bernilai salah

$p \rightarrow r$ bernilai salah

maka $\sim p \vee q \vee r$ bernilai salah

Jawab:

Dalam hal ini akan kita buktikan dengan melalui kontraposisi dari pernyataan implikasi tersebut. Kontraposisi dari pernyataan tersebut adalah:

Jika $p \wedge \sim q \wedge \sim r$ bernilai benar

maka

$\sim p \vee \sim q$ bernilai benar

$p \wedge \sim q$ bernilai benar ....(*)

Pernyataan (*) inilah yang akan kita buktikan

Dari $p \wedge \sim q \wedge \sim r$ kita dapatkan

$p \equiv \mathbf{B}, q \equiv \mathbf{S}, r \equiv \mathbf{S}$

maka

$\sim p \vee \sim q$ bernilai benar

$p \wedge \sim q$ bernilai benar

Jadi terbukti.

HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

Contoh

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$,

maka $B \subseteq A$.

HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

$\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

HIMPUNAN BAGIAN (*SUBSET*)

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari *B*.

Contoh:

(i){1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa *A* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *B* yang memungkinkan $A = B$.

HIMPUNAN YANG SAMA

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

$A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A.
Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

HIMPUNAN YANG SAMA

Contoh

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x(x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

HIMPUNAN YANG EKIVALEN

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

Notasi : $A \sim B \leftrightarrow \angle A \angle = \angle B \angle$

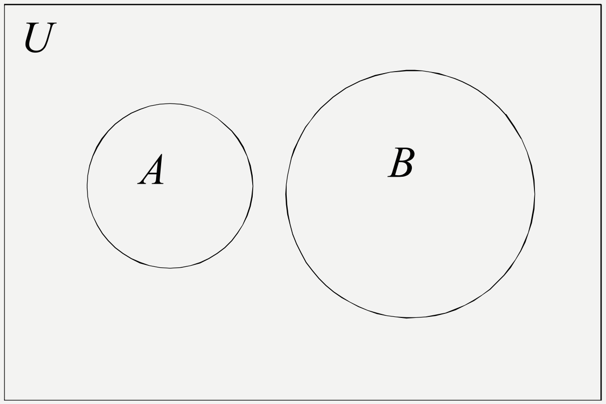
Contoh

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$,

maka $A \sim B$ sebab $\angle A \angle = \angle B \angle = 4$

HIMPUNAN SALING LEPAS

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A \,//\, B$
- Diagram Venn:



- **Contoh 11.**
- Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

HIMPUNAN KUASA

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi : $P(A)$ atau 2^A

Jika $\angle A\angle = m$, maka $\angle P(A)\angle = 2^m$.

HIMPUNAN KUASA

Contoh

Jika A = { 1, 2 }, maka $P(A)$ = {∅ , { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}

Contoh

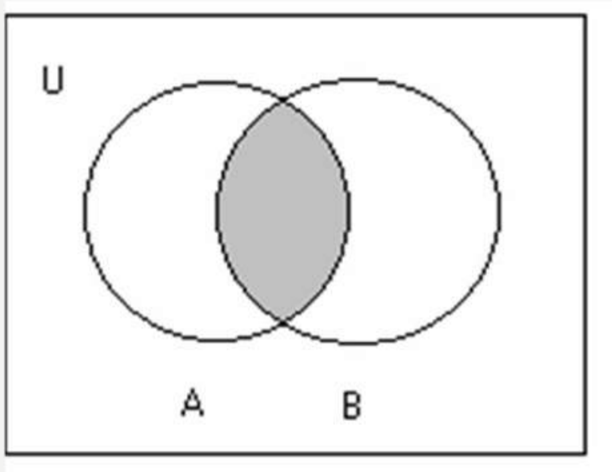
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

OPERASI TERHADAP HIMPUNAN

a. Irisan (*intersection*)
b. Gabungan (*union*)
c. Komplemen (*complement*)
d. Selisih (*difference*)
e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)
f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Irisan (*intersection*)

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



IRISAN (*INTERSECTION*)

Contoh

(i)Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,

maka $A \cap B = \{4, 10\}$

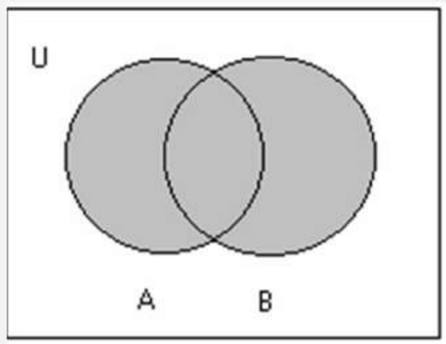
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka

$A \cap B = \emptyset$.

Artinya: A // B

GABUNGAN (*UNION*)

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



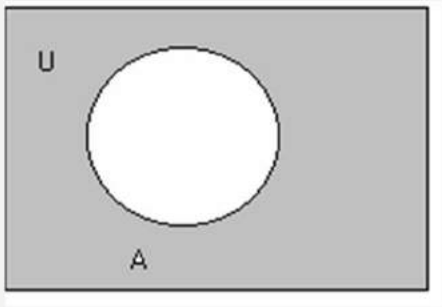
Contoh

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

KOMPLEMEN (*COMPLEMENT*)

Notasi : $\bar{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\bar{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka

$\bar{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9\}$

KOMPLEMEN (*COMPLEMENT*)

Contoh

Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

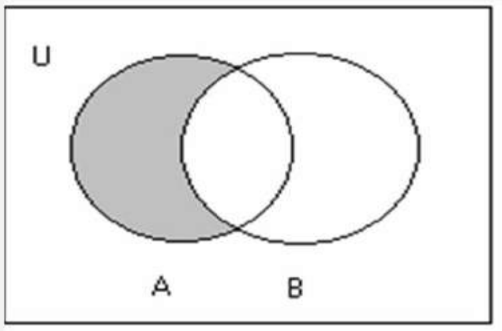
"mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" ⓪ $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

"semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" ⓪ $A \cap C \cap D$

"semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" ⓪ $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

SELISIH (*DIFFERENCE*)

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



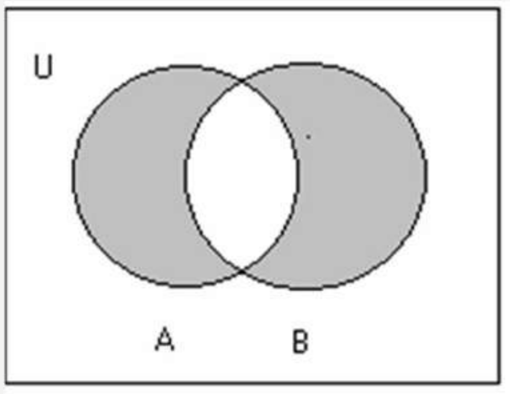
Contoh

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

BEDA SETANGKUP (*SYMMETRIC DIFFERENCE*)

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

BEDA SETANGKUP (*SYMMETRIC DIFFERENCE*)

Contoh

Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

BEDA SETANGKUP (*SYMMETRIC DIFFERENCE*)

TEOREMA: Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \angle a \in A \text{ dan } b \in B\ \}$

- **Contoh**

  (i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
  $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

  (ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka
  $A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

- Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $\angle A \times B \angle = \angle A \angle \,.\, \angle B \angle$.
- Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
- Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
- Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

Contoh : Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab: 4 x 3 = 12

yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

Contoh : Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\emptyset)$ (b) $\emptyset \times P(\emptyset)$ (c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset)$ (d) $P(P(\{3\}))$

- <u>Penyelesaian</u>:

(a) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(b) $\emptyset \times P(\emptyset) = \emptyset$

(ket: jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = \emptyset$)

(c) $\{\emptyset\} \times P(\emptyset) = \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{\emptyset, \{3\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}\}$

PERAMPATAN OPERASI HIMPUNAN

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

PERAMPATAN OPERASI HIMPUNAN

- **Contoh**

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- Hukum identitas:
  - $A \cup \varnothing = A$
  - $A \cap U = A$
- Hukum *null*/dominasi:
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$
  - $A \cup U = \mathrm{U}$
- Hukum komplemen:
  - $A \cup \bar{A} = U$
  - $A \cap \bar{A} = \varnothing$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- *Hukum idempoten:*
  - $A \cap A = A$
  - $A \cup A = A$
- *Hukum involusi:*
  - $\overline{(\overline{A})} = A$
- *Hukum penyerapan (absorpsi):*
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- Hukum komutatif:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- *Hukum asosiatif:*
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- Hukum distributif:
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Hukum De Morgan:
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

HUKUM-HUKUM HIMPUNAN

- Hukum 0/1
  - $\overline{\varnothing} = U$
  - $\overline{U} = \varnothing$

Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

PRINSIP DUALITAS

Contoh: AS = kemudi mobil di kiri depan
Indonesia= kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,
mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,
mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

- **Prinsip dualitas**:
  Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Indonesia.

PRINSIP DUALITAS PADA HIMPUNAN

Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to U$, $U \to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S** juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

- Untuk dua himpunan A dan *B*:
  - $\angle A \cup B\angle = \angle A\angle + \angle B\angle - \angle A \cap B\angle$
  - $\angle A \oplus B\angle = \angle A\angle + \angle B\angle - 2\angle A \cap B\angle$

- Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku
  - $\angle A \cup B \cup C\angle = \angle A\angle + \angle B\angle + \angle C\angle - \angle A \cap B\angle - A \cap C\angle - \angle B \cap C\angle + \angle A \cap B \cap C\angle$

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

- **Contoh:** Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

  Penyelesaian: $\angle A \angle = \leq 100/3 f = 33$,

  $\angle B \angle = \leq 100/5 f = 20$,

  $\angle A \cap B \angle = \leq 100/15 f = 6$

  $\angle A \cup B \angle = \angle A \angle + \angle B \angle - \angle A \cap B \angle = 33 + 20 - 6 = 47$

  Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

PARTISI

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A1$, $A2$, … dari A sedemikian sehingga:

- $A1 \cup A2 \cup \ldots = A$, dan
- $Ai \cap Aj = \varnothing$ untuk $i \neq j$

- **Contoh :** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

HIMPUNAN GANDA

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

  misal : {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.
- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: *M* = { 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 }, multiplisitas 0 adalah 4.

HIMPUNAN GANDA

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

OPERASI ANTARA DUA BUAH *MULTISET*

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

- $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

  Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,

  $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

- $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

  Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

  $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

OPERASI ANTARA DUA BUAH *MULTISET*

- P – *Q* adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan
  - multiplisitas elemen tersebut pada *P* dikurangi multiplisitasnya pada *Q*, jika selisihnya positif
  - 0 jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P – Q = \{ a, e \}$

OPERASI ANTARA DUA BUAH *MULTISET*

- $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,

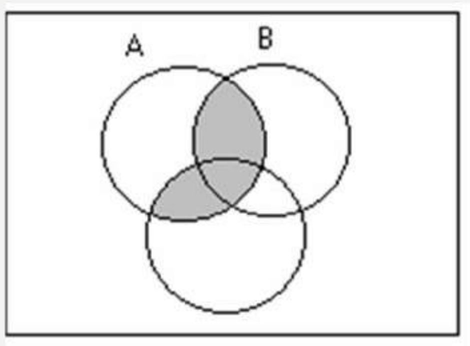
$$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$$

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

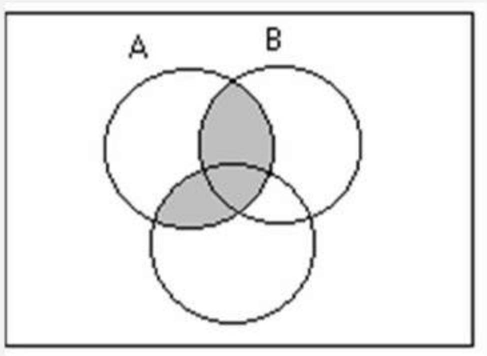
- **Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn**

  Contoh Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

  Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

- **Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan**

- **Contoh:** Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

- **Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.**

  Misalkan A dan B himpunan.

  Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

- *Bukti*:

  $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B})$ (Hukum distributif)

  $= A \cap U$ (Hukum komplemen)

  $= A$ (Hukum identitas)

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

PEMBUKTIAN PERNYATAAN PERIHAL HIMPUNAN

Contoh : Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.

Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

HIMPUNAN FUZZY

HIMPUNAN FUZZY

- Dalam teori himpunan klasik, sebuah himpunan harus didefinisikan dengan jelas (well-defined).
- Dalam teori himpunan fuzzy, batasan-batasan yang ada dalam suatu himpunan fuzzy lebih bersifat samar.

Himpunan Fuzzy

$A = \{ X \in \mathrm{Z} \mid X \text{ KURANG DARI } 10 \}$

A ={ 1, 2, 3, ….,9}

$B = \{ x \in \mathrm{Z} \mid x \text{ bilangan yang cukup besar} \}$

HIMPUNAN FUZZY

- Jika property bersifat samar (fuzzy), maka setiap anggota U mempunyai bobot keanggotaan.
- Bobot keanggotaan menyatakan seberapa benar anggota U tersebut memenuhi properti. Dalam penyajian enumerasi, setiap anggota U diberi bobot keanggotaan himpunan tersebut. Biasanya yang bobotnya 0 tidak didaftar, kecuali untuk keperluan tertentu.
- Bobot biasanya merupakan bilangan dalam interval [0, 1].

HIMPUNAN FUZZY

- Misal didefinisikan sebuah himpunan :

$$A = \{x \in \mathrm{Z} \mid x \text{ bilangan yang cukup besar}\}$$

- Pengertian bilangan cukup besar di sini sangat relatif. Misal bilangan 10.000, sejauh mana orang secara umum bisa mengatakan bahwa bilangan 1000 ini termasuk bilangan yang cukup besar? Untuk itu diperlukan bobot yang merepresentasikan sejauh mana bilangan 10.000 ini bisa dikatakan cukup besar. Jika kita mendefinisikan bobot keanggotaan bilangan 10.000 sebesar 0,3, maka kita juga bisa mendefinisikan bobot bilangan-bilangan asli yang lain.

HIMPUNAN FUZZY

- Misal kita berikan bobot untuk beberapa bilangan asli sebagai berikut :

$x = 10^2 \longrightarrow$ bobot 0

$x = 10^4 \longrightarrow$ bobot 0,3

$x = 10^5 \longrightarrow$ bobot 0,35

$x = 10^{50} \longrightarrow$ bobot 1

HIMPUNAN FUZZY

Biasanya himpunan fuzzy dinyatakan dengan fungsi keanggotaan

Contoh :

Himpunan merek-merek mobil yang mahal didefinisikan sebagai berikut :

U = merek-merek mobil

M = himpunan mobil mahal

$\mu_M(u)$ = {(1/mercedes),(1/BMW),(0,8/Audi),(0,6/Toyota),(0,3/daihatsu)}

HIMPUNAN FUZZY

Contoh

Misal kita ingin mendefinisikan himpunan bilangan asli yang mendekati bilangan 6. Maka kita dapat mendefinisikan himpunan tersebut sebagai berikut :

U = himpunan bilangan asli

F = himpunan bilangan asli yang mendekati 6

$\mu_F(u)$ = {(0,1/3), (0,3/4), (0,6/5), (1,0/ 6), (0,6/7), (0,3/8), (0,1/9)}

HIMPUNAN FUZZY

Contoh

Misal U adalah bilangan-bilangan integer antara 1 sampai dengan 10, yaitu U= {1,2,…10}, maka himpunan fuzzy “beberapa” dapat didefinisikan sebagai

U= {1,2,…10}

B = beberapa

$\mu_B(u)$ = {(0,5/3) ,(0,8/4),(1/5),(1/6), (0,8/7), (0,5/8)}

Hal ini berarti 5 dan 6 mempunyai derajat 1, sedangkan 4 dan 7 dengan derajat 0,8 dan 3, 8 dengan derajat 0,5. Sedangkan yang mempunyai derajat 0 adalah 1,2,9.

HIMPUNAN FUZZY

Contoh

Kita juga dapat mendefinisikan himpunan untuk beberapa kategori usia manusia, seperti tua dan remaja dengan fungsi keanggotaan :

X = usia

HIMPUNAN FUZZY

- Tua

$$\mu_{Tua}(x)=\begin{cases}1, & x>80\\ \dfrac{x-20}{60}, & 20\le x\le 80\\ 0, & x<20\end{cases}$$

- Remaja

$$\mu_{\text{Remaja}}(x)=\begin{cases}1, & 10\le x\le 16\\ 0, & x\le 6 \quad \text{atau} \quad x\ge 30\\ \dfrac{x-6}{3}, & 7<x<10\\ \dfrac{30-x}{14}, & 16<x<30\end{cases}$$

MATRIKS & RELASI

MATRIKS

- Matriks adalah adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks *A* yang berukuran dari *m* baris dan *n* kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRIKS

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.
- Dalam praktek, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas $A = [a_{ij}]$.
- Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

MATRIKS

- Contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks *zero-one* (0/1) adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- Contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RELASI

- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

  Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

- $a \; R \; b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubunganKan dengan b oleh R
- $a \; \underline{R} \; b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R.
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

RELASI

Misalkan

- A = {Amir, Budi, Cecep}, B = {MA2333, DU1203, MA2113, MA2513}

- $A \times B$ = {(Amir, MA2333), (Amir, DU1203), (Amir, MA2113), (Amir, T MA2513), (Budi, MA2333), (Budi, DU1203), (Budi, MA2113), (Budi, MA2513), (Cecep, MA2333), (Cecep, DU1203), (Cecep, MA2113), (Amir, MA2513)}

- Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu
  R = {(Amir, MA2333), (Amir, MA2113), (Budi, MA2113),
  (Budi, MA2513), (Cecep, MA2513) }
  - \- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
  - \- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
  - \- (Amir, MA2333) $\in R$ atau Amir R MA2333
  - \- (Amir, MA2513) $\notin R$ atau Amir $\underline{R}$ MA2513

RELASI

- **Contoh** Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

  maka kita peroleh

  $R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

RELASI

- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

RELASI

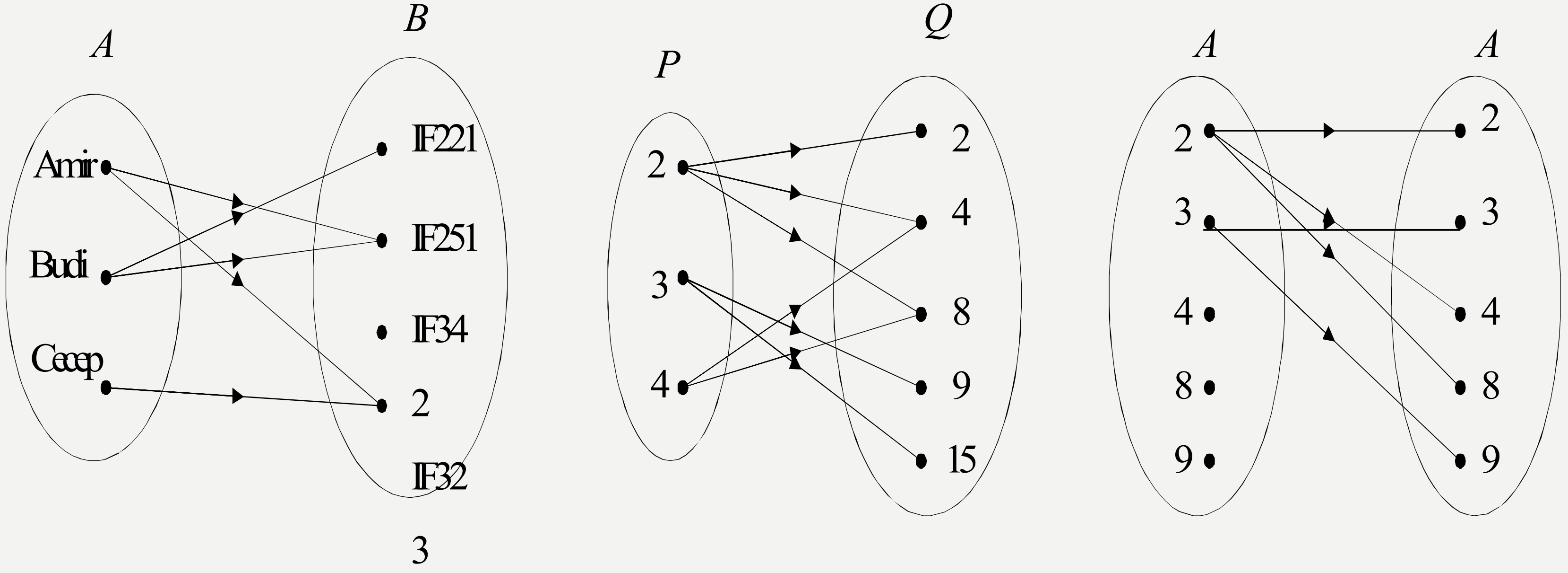
- **Contoh** . Misalkan R adalah relasi pada A = {2, 3, 4, 8, 9} yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y.

  Maka

  R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)}

REPRESENTASI RELASI

- *1. Diagram Panah*



REPRESENTASI RELASI

- ***2. Tabel***

  Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

P	Q
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

REPRESENTASI RELASI

- ***3. Matriks***

Misalkan *R* adalah relasi dari *A* = {*a*1, *a*2, …, *am*} dan *B* = {*b*1, *b*2, …, *bn*}.

Relasi *R* dapat disajikan dengan matriks *M* = [*mij*],

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{dimana} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

REPRESENTASI RELASI

- ***4. Graf Berarah***
- Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.
- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*)

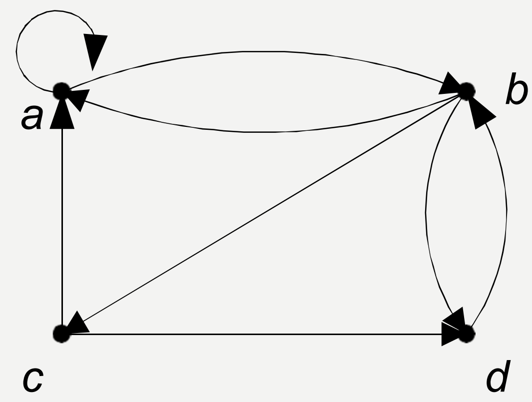
REPRESENTASI RELASI

- Jika (a, b) $\in$ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).
- Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

REPRESENTASI RELASI

- **Contoh.** Misalkan R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}.

  R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Refleksif** (*reflexive*)
  Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh .** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

  Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).

  Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

- **Contoh .** Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh .** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

  R : x lebih besar dari y, S : $x + y = 5$,

  T : $3x + y = 10$

  Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2) bukan anggota R, S, maupun T.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,
- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & O & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Menghantar** (*transitive*)

  Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

  Contoh . Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka
  a. $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Lihat tabel berikut:

$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2),$

$(4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

Pasangan berbentuk

(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak manghantar karena (2, 4) dan (4, 2) $\in R$, tetapi (2, 2) $\notin R$, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in R$, tetapi (4, 3) $\notin R$.

- Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) } jelas menghantar

- Relasi R = {(1, 2), (3, 4)} menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.

- Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4, 5)} selalu menghantar.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Contoh 12. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c. Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga b = ma dan c = nb. Di sini c = nma, sehingga a habis membagi c. Jadi, relasi “habis membagi” bersifat menghantar.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh.** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

  R : x lebih besar dari y, S : $x + y = 6$,

  T : $3x + y = 10$
- \- R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- \- S tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S tetapi $(4, 4) \notin S$.
- \- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ tidak menghantar.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari *a* ke *b* dan dari *b* ke *c*, maka juga terdapat busur berarah dari *a* ke *c*.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Setangkup** (*symmetric*) dan **tolak-setangkup** (*antisymmetric*)

  Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.

  Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Relasi R pada himpunan A disebut **tolak-setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$.
- Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, \alpha) \in R$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh .** Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka
  - Relasi R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) } bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini (1, 2) dan (2, 1) $\in R$, begitu juga (2, 4) dan (4, 2) $\in R$. Perhatikan bahwa R juga tidak tolak setangkup.
  - Relasi R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak setangkup karena (2, 3) $\in R$, tetapi (3, 2) $\notin R$. Perhatikan bahwa R juga tidak tolak setangkup.
  - Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) } tolak-setangkup karena 1 = 1 dan (1, 1) $\in R$, 2 = 2 dan (2, 2) $\in R$, dan 3 = 3 dan (3, 3) $\in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.
  - Relasi R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3) } tolak-setangkup karena (1, 1) $\in R$ dan 1 = 1 dan, (2, 2) $\in R$ dan 2 = 2 dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Relasi R = {(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2) } tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi (2, 4) dan (4, 2) anggota R. Perhatikan bahwa R setangkup
- Relasi R = {(1, 2), (2, 3), (1, 3) } tidak setangkup tetapi tolak-setangkup, dan R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)} tidak setangkup tetapi tolak-setangkup.
- Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)} tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup. R tidak setangkup karena $(4, 2) \in R$ tetapi $(2, 4) \notin R$. R tidak tolak-setangkup karena $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \in R$ tetap $2 \neq 3$.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh.** Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika *a* habis membagi *b*, *b* tidak habis membagi *a*, kecuali jika *a* = *b*. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in R$ tetapi $(4, 2) \notin R$. Relasi "habis membagi" tolak-setangkup karena jika *a* habis membagi *b* dan *b* habis membagi *a* maka *a* = *b*. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in R$ dan 4 = 4.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- **Contoh.** Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

  R : x lebih besar dari y, S : $x + y = 6$, T : $3x + y = 10$

R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.

S relasi setangkup karena (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S.

T tidak setangkup karena, misalkan (3, 1) adalah anggota T tetapi (1,3) bukan anggota T.

S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(4, 2) \in S$ tetapi $4 \neq 2$.

Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!).

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau *mij* = *mji* = 1, untuk *i* = 1, 2, …, *n* :

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & 0 & & & \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari *a* ke *b*, maka juga ada busur dari *b* ke *a*.

SIFAT-SIFAT RELASI BINER

- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika *mij* = 1 dengan $i \neq j$, maka *mji* = 0. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari *mij* = 0 atau *mji* = 0 bila $i \neq j$:

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$$

- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

LATIHAN

- R ADALAH RELASI PADA HIMPUNAN X=(0,1,2,3,…) YANG DIDEFINISIKAN OLEH $X^2+Y^2=25$.TULISKAN R SEBAGAI SEBUAH HIMPUNAN PASANGAN TERURUT

LATIHAN

- Periksa apakah relasi di bawah ini refleksif, transitif, setangkup, tolak setangkup
  - Sejajar dengan
  - Berada di atas
  - Tegak lurus terhadap

RELASI INVERSI

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

RELASI INVERSI

- **Contoh 17.** Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p,$
- $q) \in R$ jika p habis membagi q
- maka kita peroleh
- $R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$
- R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P
- dengan $(q, p) \in R{-}1$ jika q adalah kelipatan dari p
- maka kita peroleh

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$

RELASI INVERSI

- Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MENGKOMBINASIKAN RELASI

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

MENGKOMBINASIKAN RELASI

- **Contoh 18.** Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$
$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$
$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

LATIHAN

- Jika R dan S adalah relasi-relasi refleksif pada himpunan A, tunjukkan bahwa $R \cap S$ refleksif
- Jika R dan S adalah relasi-relasi simetris pada himpunan A, tunjukkan bahwa $R \cap S$ simetris
- Jika R dan S adalah relasi-relasi transitif pada himpunan A, tunjukkan bahwa $R \cap S$ transitif

MENGKOMBINASIKAN RELASI

- Jika relasi $R1$ dan $R2$ masing-masing dinyatakan dengan matriks $MR1$ dan $MR2$, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

MENGKOMBINASIKAN RELASI

- **Contoh.** Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

KOMPOSISI RELASI

- Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$S \circ R = \{(a, c) \angle a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \}$$

KOMPOSISI RELASI

- **Contoh 20**. Misalkan

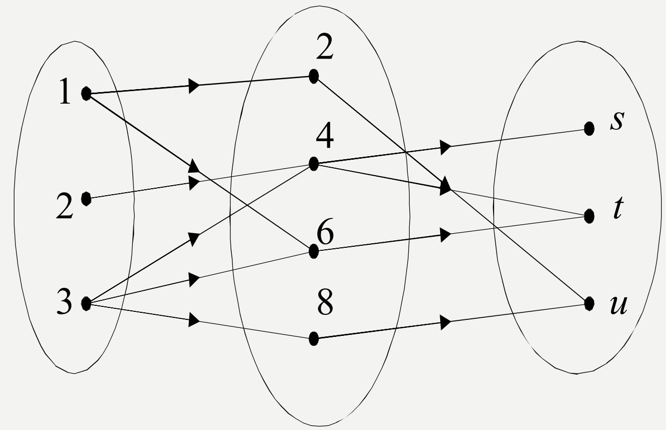
R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)}
adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan

S = {(2, *u*), (4, *s*), (4, *t*), (6, *t*), (8, *u*)}
adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {*s*, *t*, *u*}.

Maka komposisi relasi *R* dan *S* adalah

$S \circ R$ = {(1, *u*), (1, *t*), (2, *s*), (2, *t*), (3, *s*), (3, *t*), (3, *u*) }

Komposisi relasi *R* dan *S* lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



KOMPOSISI RELASI

- Jika relasi $R1$ dan $R2$ masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah
- $$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$
- yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

KOMPOSISI RELASI

- **Contoh 21.** Misalkan bahwa relasi *R*1 dan *R*2 pada himpunan *A* dinyatakan oleh matriks

$$R1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan *R*2 o *R*1 adalah

- $M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$

$$= \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relasi Ekivalen,

Kelas Ekivalen, Poset,

Hasse Diagram

RELASI EKIVALEN

Relasi ekivalen digunakan untuk merelasikan obyek-obyek yang memiliki kemiripan dalam suatu hal tertentu.

Definisi.

Suatu relasi pada himpunan A dikatakan sebagai ***relasi ekivalen*** jika relasi tersebut bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

Dua anggota A yang berelasi oleh suatu relasi ekivalen dikatakan ***ekivalen***.

SIFAT RELASI EKIVALEN

Karena R refleksif,

setiap elemen ekivalen terhadap dirinya sendiri.

Karena R simetris,

a ekivalen dengan b setiap kali b ekivalen dengan a.

Karena R transitif,

jika a dan b ekivalen serta b dan c ekivalen,

maka a dan c juga ekivalen.

CONTOH

Misalkan A himpunan string yang memuat alfabet dan $l(x)$ panjang dari string x.

Jika R relasi pada A dengan aRb jika dan hanya jika $l(a) = l(b)$, apakah R suatu relasi ekivalen ?

Solusi:

- R refleksif, karena $l(a) = l(a)$ dan karenanya aRa untuk setiap string a.
- R simetris, karena jika $l(a) = l(b)$ maka $l(b) = l(a)$, sehingga jika aRb maka bRa.
- R transitif, karena jika $l(a) = l(b)$ dan $l(b) = l(c)$, maka $l(a) = l(c)$, sehingga aRb dan bRc mengakibatkan aRc.

Jadi, R adalah suatu relasi ekivalen.

CONTOH

- Periksa apakah relasi di bawah ini merupakan relasi ekivalen
  - “sejajar dengan”
  - “mempunyai sebuah titik yang sama dengan”
  - R={(a,b);a+b genap} untuk semua a,b bil bulat positif

KELAS EKIVALEN

Definisi.

Misalkan R relasi ekivalen pada himpunan A.

Himpunan semua anggota yang berelasi oleh R dengan suatu anggota a di A disebut ***kelas ekivalen*** dari a.

Kelas ekivalen dari a dengan memandang relasi R dinotasikan oleh $[a]_R$,

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

Jika hanya ada satu relasi yang dipertimbangkan, penulisan R biasanya dihapus sehingga hanya ditulis **[a].**

Jika $b \in [a]_R$, b dikatakan sebagai ***representasi*** dari kelas ekivalen tersebut.

CONTOH

A adalah himpunan semua mahasiswa yang merupakan lulusan dari berbagai SMU. Misal relasi R pada A adalah semua pasangan(x,y) dimana x dan y adalah lulusan dari SMU yg sama. Untuk seorang mhs x, dapat dibentuk himpunan semua mhs yg ekivalen dgn x. Himpunan tsb terdiri dari semua mhs yg lulus dari SMU yg sama dgn x. Himpunan ini disebut **kelas ekivalen** dari relasi R

KELAS EKIVALEN DAN PARTISI

Teorema

Misalkan R relasi ekivalen pada himpunan S. Maka kelas ekivalen dari R membentuk suatu partisi dari S.

CONTOH

Misalkan Asep, Euis dan Cucu tinggal di Garut, Stephanie dan Max di Bremen, serta Akiko di Yokohama.

Misalkan R relasi ekivalen

{(a, b) | a dan b tinggal di kota yang sama}

pada himpunan P = {Asep, Euis, Cucu, Stephanie, Max, Akiko}.

Maka

R = {(Asep,Asep), (Asep,Euis),(Asep,Cucu), (Euis,Asep), (Euis,Euis), (Euis,Cucu), (Cucu,Asep), (Cucu,Euis), (Cucu,Cucu), (Stephanie,Stephanie), (Stephanie,Max), (Max,Stephanie), (Max, Max), (Akiko, Akiko)}.

CONTOH …

Kelas ekivalen dari R adalah:

{{Asep, Euis, Cucu }, {Stephanie, Max}, {Akiko}}.

Yang juga merupakan partisi dari P.

Kelas ekivalen dari setiap relasi ekivalen R pada himpunan S membentuk suatu partisi pada S, karena setiap anggota S dihubungkan dengan tepat satu kelas ekivalen.

PENGURUTAN PARSIAL

Misalkan R relasi pada himpunan S.

R disebut pengurutan parsial jika R refleksif, antisimetris, dan transitif.

Himpunan S beserta dengan pengurutan parsial R disebut himpunan terurut parsial (partially ordered set, poset) dan dinotasikan oleh (S,R).

CONTOH

Relasi-relasi berikut adalah pengurutan parsial:

1. "lebih besar sama dengan" pada himpunan bilangan bulat

   $(\mathbf{Z}, \leq)$ poset

2. "habis dibagi" pada himpunan bilangan bulat positif

   $(\mathbf{Z}^+, |)$ poset

3. "subhimpunan" pada himpunan kuasa dari suatu himpunan S.

   $(P(S), \subseteq)$ poset

ANGGOTA YANG DAPAT DIBANDINGKAN

- Dalam suatu poset, (a,b)∈R dinotasikan oleh $a \preceq b$
- Notasi $a \prec b$ menyatakan $a \preceq b$, tetapi $a \neq b$
- Anggota a dan b dalam poset $(S, \preceq)$ dikatakan dapat dibandingkan (comparable) jika $a \preceq b$ atau $b \preceq a$
- Jika a dan b adalah anggota S sehingga tidak berlaku $a \preceq b$ atau $b \preceq a$, a dan b dikatakan tidak dapat dibandingkan (incomparable)

PENGURUTAN TOTAL(TOTALLY ORDER)

Jika $(S, \preceq)$ poset dan setiap dua anggota dalam S dapat dibandingkan, maka S disebut himpunan terurut total atau himpunan terurut linier atau rantai, dan disebut urutan total atau urutan linier.$\preceq$

Contoh 3.

1. (P(**Z**),$\subseteq$) tidak terurut total
2. (**Z**$^+$, |) tidak terurut total
3. (**Z**,$\leq$) terurut total

DIAGRAM HASSE

Diagram yang memuat informasi yang diperlukan untuk menemukan suatu pengurutan parsial R.

Digram Hasse dikonstruksi dengan prosedur berikut:

1. Gambarkan digraf untuk relasi R.
2. Hapus semua loop.
3. Hapus semua sisi yang terjadi karena sifat transitif.
4. Atur setiap sisi sehingga verteks awal berada di bawah verteks akhir.
5. Hapus semua panah pada sisi.

SOAL

Gambarkan diagram Hasse yang merepresentasikan pengurutan parsial

1. $\{(a,b) \mid a \text{ membagi } b\}$ pada $\{1,2,3,4,6,8,12\}$
2. $\{(A,B) \mid A \subseteq B\}$ pada himpunan kuasa $P(S)$ dengan $S=\{a,b,c\}$.

FUNGSI

FUNGSI

Misalkan *A* dan *B* himpunan.

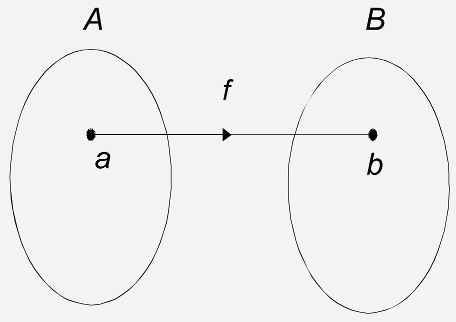
- Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.
- Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

- yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.
- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

FUNGSI

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.
- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



FUNGS

- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  - Tiap elemen di dalam himpunan *A* harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan *f*.
  - Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

REPRESENTASI FUNGSI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

- Himpunan pasangan terurut. Seperti pada relasi.
- Formula pengisian nilai (*assignment*).

  Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = 1/x$.
- Kata-kata

  Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

REPRESENTASI FUNGSI

- Kode program (*source code*)

Contoh: Fungsi menghitung |*x*|

```
function abs(x:integer):integer;
    begin
      if x < 0 then
        abs:=-x
      else
        abs:=x;
    end;
```

CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

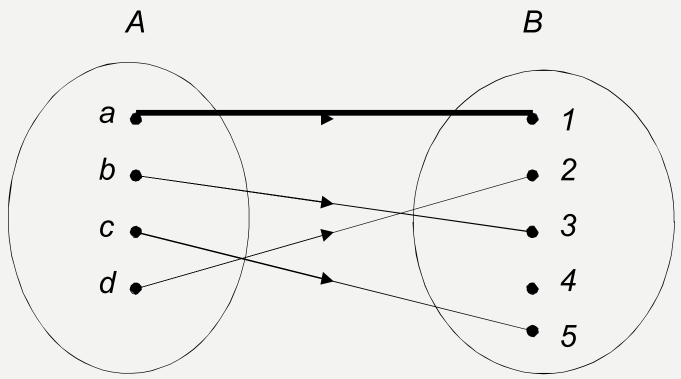
- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

CONTOH

- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

FUNGSI SATU KE SATU (ONE TO ONE)

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,
  Tetapi relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

CONTOH

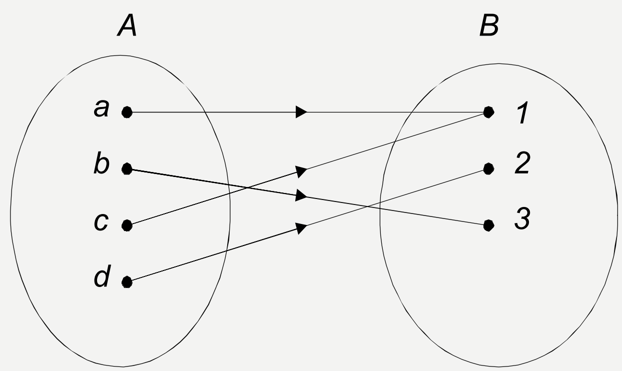
- **Contoh .** Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2+1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.
- (ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$. Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

FUNGSI PADA (ONTO)

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

  Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

CONTOH

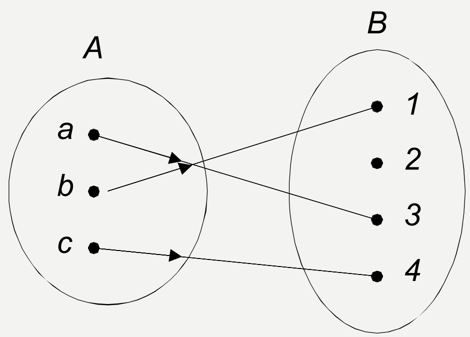
- **Contoh .** Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z**. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x – 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

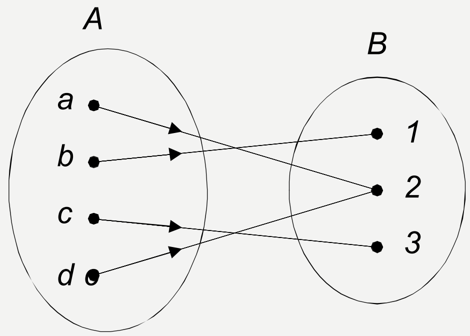
- (i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.
- (ii) $f(x) = x – 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x – 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

CONTOH

- Fungsi satu ke satu bukan pada

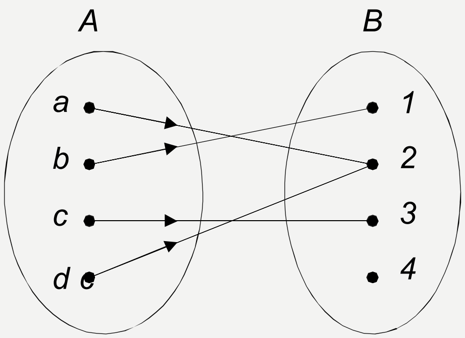


- Fungsi pada bukan satu ke satu

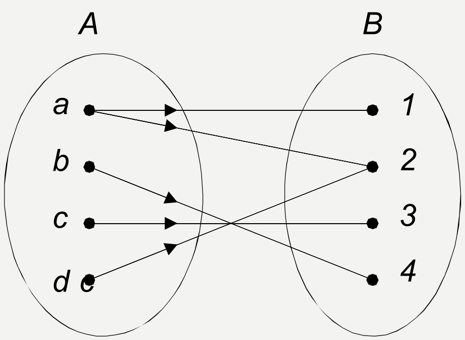


CONTOH

- Bukan fungsi satu ke satu maupun pada



- Bukan fungsi



FUNGSI BERKORESPONDEN SATU KE SATU

- Fungsi *f* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu (one to one) dan juga fungsi pada (onto).

CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

- **Contoh .** Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

INVERS DARI FUNGSI

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

INVERS DARI FUNGSI

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

CONTOH

- **Contoh .** Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah

  $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$

- Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

CONTOH

- **Contoh .** Tentukan balikan fungsi $f(x) = x – 1$.

<u>Penyelesaian</u>:

- Fungsi $f(x) = x – 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

- Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x – 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(x) = y + 1$.

CONTOH

- **Contoh.** Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.
- Penyelesaian:
- Dari Contoh sebelumnya kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible*.

KOMPOSISI DARI DUA BUAH FUNGSI.

- Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

CONTOH

- **Contoh .** Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$

ke $C = \{x, y, z\}$.

Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$

CONTOH

- **Contoh .** Diberikan fungsi $f(x) = x – 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.
- <u>Penyelesaian</u>:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 – 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x – 1) = (x –1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan *x* adalah bilangan riil, berarti *x* berada di antara dua bilangan bulat.

- Fungsi *floor* dari x:

  ≤*x*ƒ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*

- Fungsi *ceiling* dari *x*:

  ϒ*x*⁄ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*

CONTOH

Beberapa contoh fungsi floor dan ceiling

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$	$\lceil 3.5 \rceil = 4$
$\lfloor 0.5 \rfloor = 0$	$\lceil 0.5 \rceil = 1$
$\lfloor 4.8 \rfloor = 4$	$\lceil 4.8 \rceil = 5$
$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$	$\lceil -0.5 \rceil = 0$
$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$	$\lceil -3.5 \rceil = -3$

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

- **2. Fungsi modulo**

  Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.
- a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m
- a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

CONTOH

- **Contoh .** Beberapa contoh fungsi modulo

  25 mod 7 = 4

  16 mod 4 = 0

  3612 mod 45 = 12

  0 mod 5 = 5

  –25 mod 7 = 3 (sebab –25 = 7 · (–4) + 3)

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

- 3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial $a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$y = {}^a\log x$

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

- **5. Fungsi Logaritmik**
- Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

BEBERAPA FUNGSI KHUSUS

- **Fungsi Rekursif**

Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh:

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n - 1) \times n = (n - 1)! \times n.$$

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n - 1)! & , n > 0 \end{cases}$$

KOMBINATORIAL

DEFINISI

- Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

ENUMERASI

Sebuah sandi-lewat (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan sandi-lewat yang dapat dibuat?

- abcdef
- aaaade
- a123fr
- …
- erhtgahn
- yutresik
- …
-
- ????

KAIDAH DASAR MENGHITUNG

1. Kaidah perkalian

   (*rule of product*)

2. Kaidah penjumlahan

   (*rule of sum*)

KAIDAH PERKALIAN (*RULE OF PRODUCT*)

Misalkan,

Percobaan 1: p hasil

Percobaan 2: q hasil

maka,

Percobaan 1 dan percobaan 2:

$$p \times q \text{ hasil}$$

KAIDAH PENJUMLAHAN (*RULE OF SUM*)

Misalkan,

Percobaan 1: *p* hasil

Percobaan 2: *q* hasil

maka,

Percobaan 1 atau percobaan 2:

$$\boldsymbol{p + q} \textbf{ hasil}$$

CONTOH

- Ketua kelas TE-04 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria TE-04 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua kelas?
- Penyelesaian:

  65 + 15 = 80 cara.

CONTOH

- Dua orang perwakilan TE-04 mendatangai RTA untuk protes nilai kuis. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?
- Penyelesaian:

$65 \times 15 = 975$ cara.

PERLUASAN KAIDAH DASAR MENGHITUNG

Misalkan ada *n* percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

   $$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

   $$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \text{ hasil}$$

CONTOH

Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

- panjang *string* 5 bit
- panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah
- $2^8 = 256$ buah

CONTOH

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang semua angkanya berbeda

- Penyelesaian:
  - posisi satuan : 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9)
  - posisi ribuan : 8 kemungkinan angka
  - posisi ratusan : 8 kemungkinan angka
  - posisi puluhan : 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya

= (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

CONTOH

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

- posisi satuan : 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
- posisi ribuan : 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
- posisi ratusan : 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
- posisi puluhan : 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya =

$$(5)(9)(10)(10) = 4500$$

CONTOH

Lihat kembali contoh ilustrasi pada awal bab ini. Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

- <u>Penyelesaian</u>:

  Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A-Z) dan banyak angka desimal adalah 10 (0-9), jadi seluruhnya 36 karakter.

  - Untuk sandi-lewat dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah (36)(36)(36)(36)(36)(36) = 366 = 2.176.782.336
  - Untuk sandi-lewat dengan panjang 7 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 367 = 78.364.164.096

CONTOH (LANJUTAN)

- Untuk sandi-lewat dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 368 = 2.821.109.907.456

Jadi jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456=

2.901.650.833.888 buah.

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’?

- Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan ‘11’,

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan ‘11’

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan ‘11’

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’

$\angle A \angle = 2^6 = 64$,

$\angle B \angle = 2^6 = 64$,

$\angle A \cap B \angle = 2^4 = 16$.

maka

$$\angle A \cup B \angle = \angle A \angle + \angle B \angle - \angle A \cap B \angle$$

$$= 2^6 + 2^6 - 16 \quad = 64 + 64 - 16 = 112.$$

LATIHAN

- Pelat nomor memuat 2 huruf (boleh sama)diikuti 3 angka dengan digit pertama tidak sama dengan 0(boleh ada angka yang sama). Ada berapa pelat nomor berbeda

- 26x26x9x10x10=608400

LATIH
AN

- Pelat nomor memuat 2 huruf berbeda diikuti 3 angka berbeda. Ada berapa pelat nomor berbeda?

- 26x25x10x9x8=468000

LATIHAN

- Pelat nomor memuat 2 huruf berbeda diikuti 3 angka berbeda dengan digit pertama tidak sama dengan 0. Ada berapa pelat nomor berbeda

- 26x25x9x9x8=421200

LATIH AN

- Tentukan n cara agar sebuah organisasi yang terdiri dari 26 anggota dapat memilih ketua,sekretaris dan bendahara dgn catatan tidak ada jabatan rangkap)
- 26x25x24=15600

LATIHAN

- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat bepergian dengan bus dari A ke C melewati B

- 4x3=12

LATIHAN

- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat pulang pergi dengan bus dari A ke C melewati B

- 12x12=144

LATIHAN

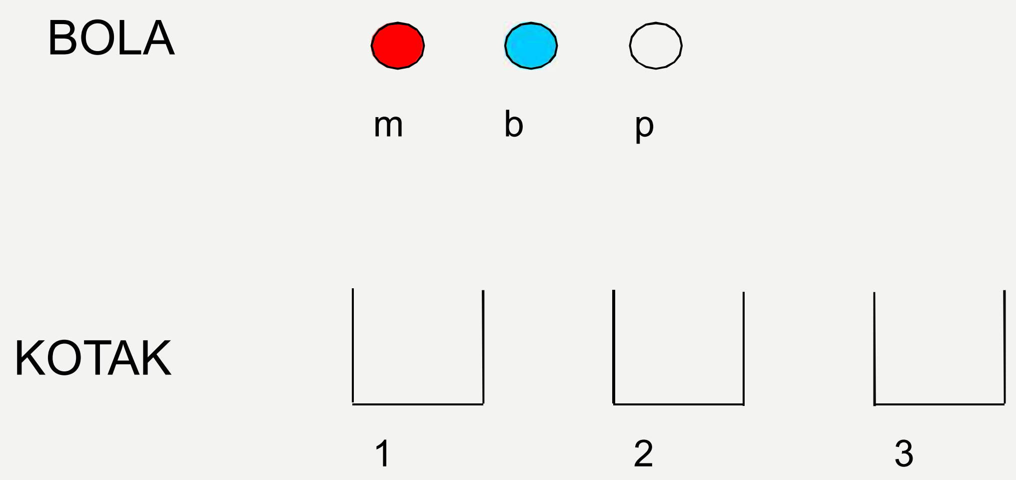
- Terdapat 4 jalur bus antara A dan B dan 3 jalur bus dari B ke C. Tentukan banyaknya cara agar seseorang dapat pulang pergi dengan bus dari A ke C melewati B dan tidak ingin melewati satu jalur lebih dari sekali?
- 4x3x2x3=72

DEFINISI

- Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

PERMUTASI

- Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola merah, biru, putih ke dalam kotak 1,2,3 ?



KOTAK 1	KOTAK 2	KOTAK 3	URUTAN
m	b	p	mbp
	p	b	mpb
b	m	p	bmp
	p	m	bpm
p	m	b	pmb
	b	m	pbm

Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

PERMUTASI

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.

Misalkan jumlah objek adalah *n*, maka
urutan pertama dipilih dari *n* objek,
urutan kedua dipilih dari n – 1 objek,
urutan ketiga dipilih dari n – 2 objek,
…
urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.
Menurut kaidah perkalian, permutasi dari *n* objek adalah

$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$$

CONTOH

- Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “HAPUS”?
- Penyelesaian:

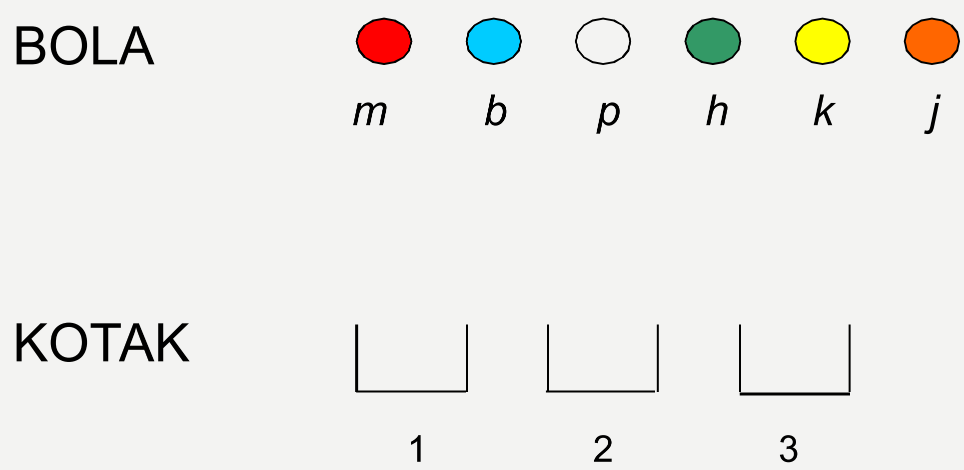
  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

- Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?
- Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

PERMUTASI *R* DARI *N* ELEMEN

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



PERMUTASI *R* DARI *N* ELEMEN

- Penyelesaian:
  - kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);
  - kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);
  - kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

PERMUTASI *R* DARI *N* ELEMEN

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

- kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola (ada n pilihan)
- kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n - 1) bola (ada n – 1 pilihan)
- kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n - 2) bola (ada n – 2) pilihan;
- ……….
- kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n - (r - 1)) bola (ada n – r + 1 pilihan);

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - (r - 1))$

PERMUTASI *R* DARI *N* ELEMEN

- RUMUS

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

CONTOH

Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:

(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan

(b) boleh ada pengulangan angka.

- <u>Penyelesaian</u>:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah

Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.

Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 53 = 125.

PERMUTASI *R* DARI *N* ELEMEN

- **Definisi**

  Permutasi *r* dari *n* elemen adalah jumlah kemungkinan urutan *r* buah elemen yang dipilih dari *n* buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

PERMUTASI DENGAN PENGULANGAN

- Banyaknya permutasi dari n objek dari n_1 yang sama, n_2 yang sama,……, n_r yang sama adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

CONTOH

- Tentukan banyaknya kata yang dapat dibentuk dari kata “DISKRIT”
- 7!/2!
- Tentukan banyaknya kata yang dapat dibentuk dari kata “MATEMATIKA”
- 10!/2!3!2!

CONTOH

Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

- Penyelesaian:

$P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- Permutasi

$$\frac{n!}{(n-r)!} = (6x5x4x3x2x1)/(3x2x1)=120$$

- Kaidah Perkalian

$$= 6x5x4 = 120$$

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- 2x5x4=40

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang genap dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- 5x4x2=40

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang ganjil dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- 5x4x4=80

LATIH AN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang dapat dibagi 5 dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?

- 5x4x1=20

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- Kaidah Perkalian

$$= 6 \times 6 \times 6 = 216$$

LATIH AN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- 2x6x6=72

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang genap dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- 6x6x2=72

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang ganjil dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- 6x6x4=144

LATIHAN

- Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang dapat dibagi 5 dan bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan diperbolehkan?

- 6x6x1=36

LATIHAN

- Tentukan banyaknya cara agar 7 orang dapat mengatur dirinya dalam 1 barisan yang terdiri dari 7 kursi

- $n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$

  $=7x6x5x4x3x2x1$

LATIHAN

- Tentukan banyaknya cara agar 7 orang dapat mengatur dirinya duduk mengelilingi meja bundar yang terdiri dari 7 kursi

- 1x6x5x4x3x2x1=6!

KOMBINASI

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

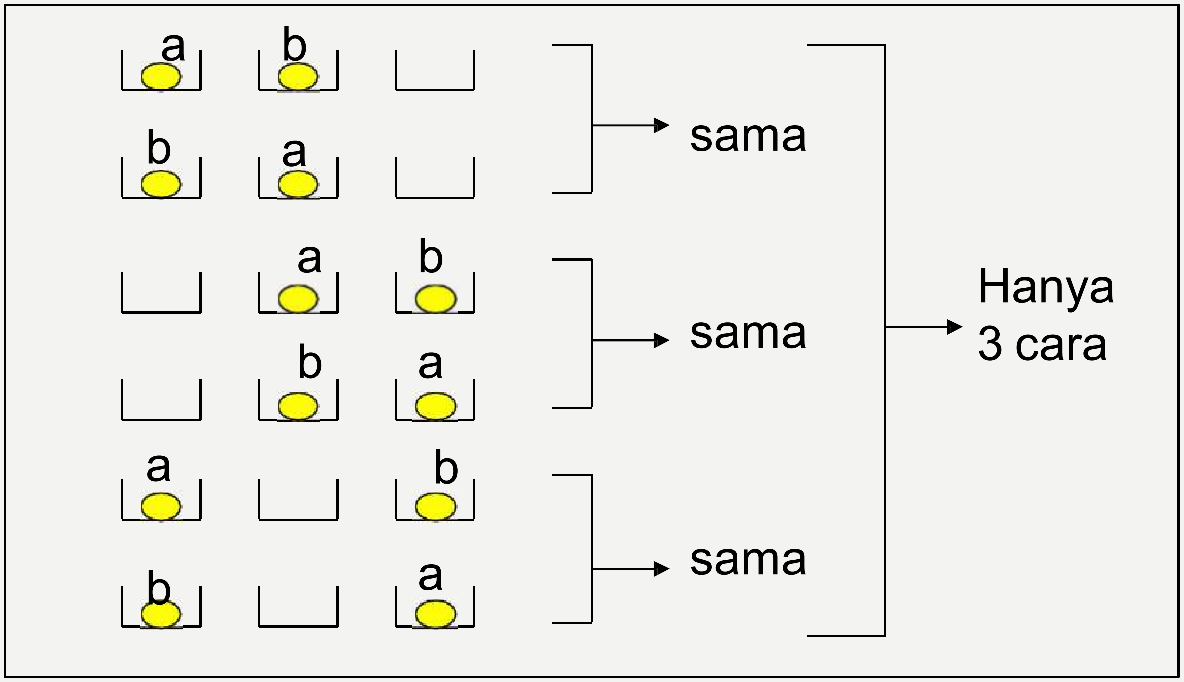
KOMBINASI

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama dan ada 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.
- Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak

$$= \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3$$

KOMBINASI

Ilustrasi



KOMBINASI

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

KOMBINASI

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r) = \binom{n}{r}$$

DEFINISI

- Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

INTERPRETASI KOMBINASI

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array}\right\rangle \text{ 3 buah atau } \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

INTERPRETASI KOMBINASI

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

INTERPRETASI KOMBINASI

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

CONTOH

Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Elektro Angkatan 2004, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

1. mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;
2. mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
3. mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
4. mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
5. mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
6. setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

CONTOH

<u>Penyelesaian</u>:

- $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.
- $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.
- $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.

CONTOH

- $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.
- $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.

CONTOH

- Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya

  = jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* termasuk di dalamnya, *B* tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *B* termasuk di dalamnya, *A* tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* dan *B* termasuk di dalamnya

  = 70 + 70 + 56 = 196

CONTOH

Prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B, maka

$\angle X \angle = C(9, 4) = 126$; $\angle Y \angle = C(9, 4) = 126$;

$\angle X \cap Y \angle = C(8, 3) = 56$;

$\angle X \cup Y \angle = \angle X \angle + \angle Y \angle - \angle X \cap Y \angle = 126 + 126 - 56 = 196$

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah

$P(n, n) = n!$.

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

- Permutasi *n* buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna *k* adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

Cara lain:

Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan n_1 buah bola yang berwarna 1.

Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan n_2 buah bola berwarna 2.

Ada $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ cara untuk menempatkan n3 buah bola berwarna 3.

.

Ada $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_k\text{-}1, n_k)$ cara untuk menempatkan n_k buah bola berwarna k.

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

- Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:
- $C(n; n1, n2, \ldots, nk) = C(n, n1)\, C(n - n1, n2)\, C(n - n1 - n2, n3)$
  $\ldots C(n - n1 - n2 - \ldots - nk\text{-}1, nk)$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_k}$$

KESIMPULAN

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

CONTOH

Berapa banyak “kata” yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf M = 1 buah ($n1$) huruf I = 4 buah ($n2$)

huruf S = 4 buah ($n3$) huruf P = 2 buah ($n4$)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah $= |S|$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2) = \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)} = 34650 \text{ buah}$$

CONTOH

Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga =

$$\frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$$ **cara**

CONTOH

12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

<u>Penyelesaian</u>:

n = 18; n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 5, dan n_4 = 6 (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu =

$$\frac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)} \text{ cara}$$

KOMBINASI DENGAN PENGULANGAN

Misalkan terdapat *r* buah bola yang semua warnanya sama dan *n* buah kotak.

Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

CONTOH

Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).

Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)
Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)
Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi

CONTOH

20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$= C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15)$

$= C(24, 20) \times C(19, 15)$

KOEFISIEN BINOMIAL

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = x + y$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y^1 + \dots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \dots + C(n, n)\, y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, x^{n-k} y^k$$

Koefisien Binomial

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

CONTOH

Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + \\ &\quad C(3, 3)\, b^3 \\ &= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3^x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3 \\ &= 27\,x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

CONTOH

Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)5$.

<u>Penyelesaian</u>:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\ x^{5-3}\ (-y)^3 =$

$-10x^2y^3$.

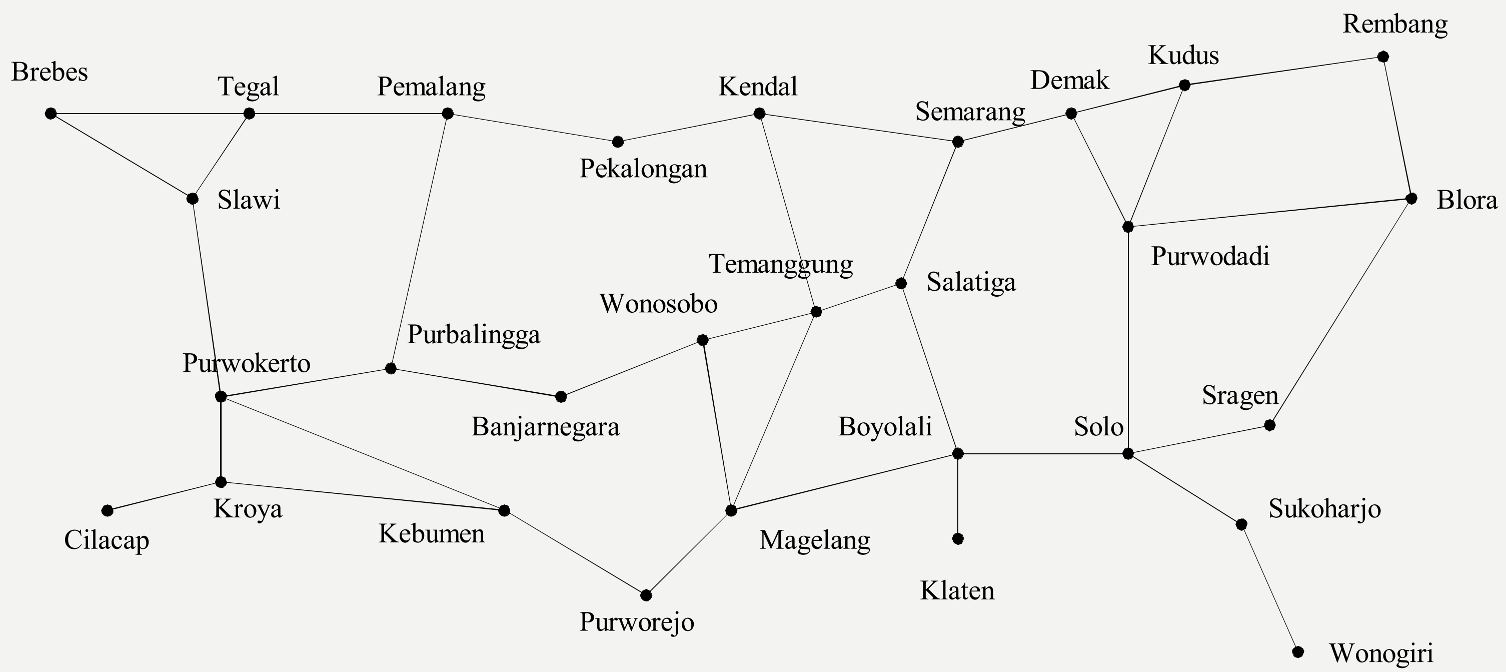
GRAPH

GRAPH

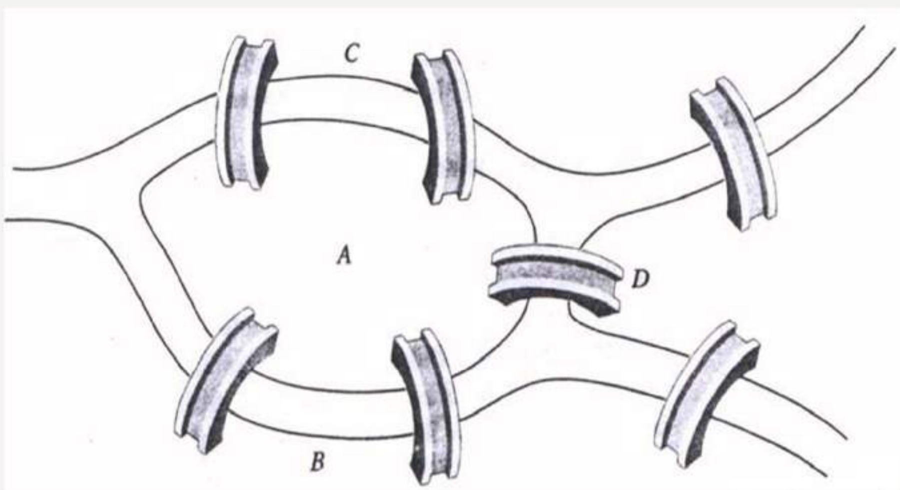
GRAPH

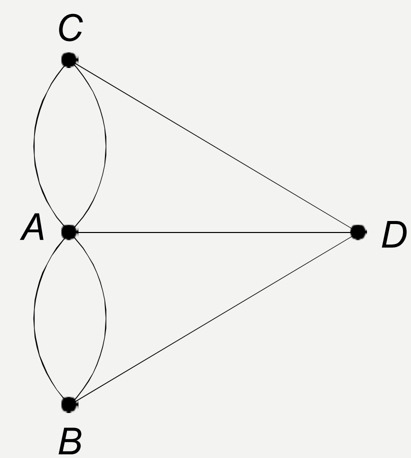
- Graph digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Gambar berikut ini sebuah graph yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

GRAPH


Rembang
Kudus
Demak
Brebes
Tegal
Pemalang
Kendal
Semarang
Pekalongan
Slawi
Blora
Purwodadi
Temanggung
Salatiga
Wonosobo
Purbalingga
Purwokerto
Sragen
Banjarnegara
Boyolali
Solo
Sukoharjo
Kroya
Cilacap
Kebumen
Magelang
Klaten
Purworejo
Wonogiri

GRAPH

- Sejarah Graph: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)
- 



Graph yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

Simpul (*vertex*) ⓪ menyatakan

Sisi (*edge*) ⓪

jembatan

Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

DEFINISI GRAPH

Graph $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

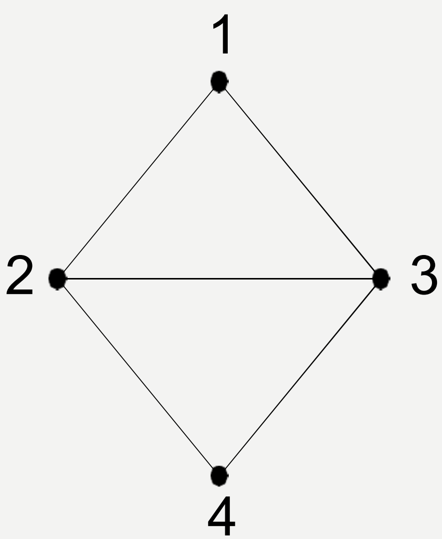
V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

= $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$

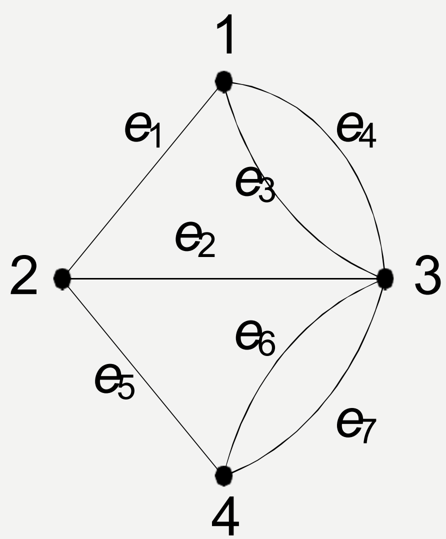
E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

= $\{e_1 , e_2 , \ldots , e_n \}$

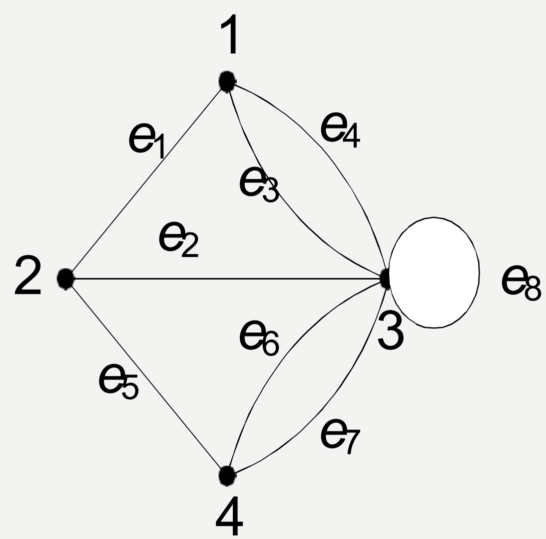
GRA
PH



$G1$



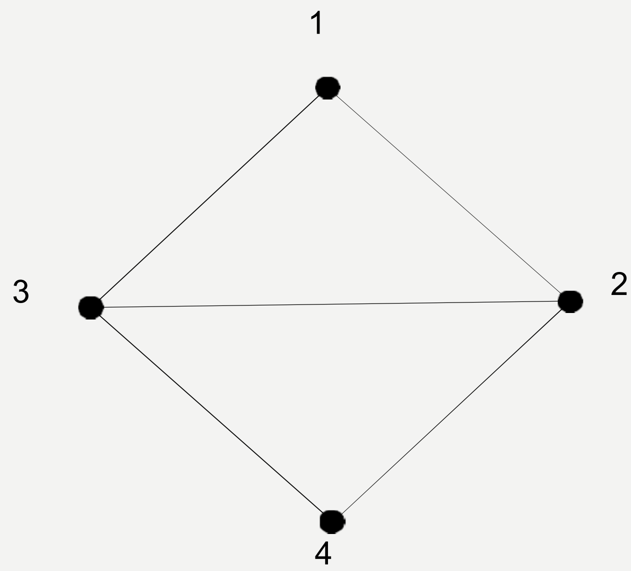
$G2$



$G3$

GRAPH

Graph G_1



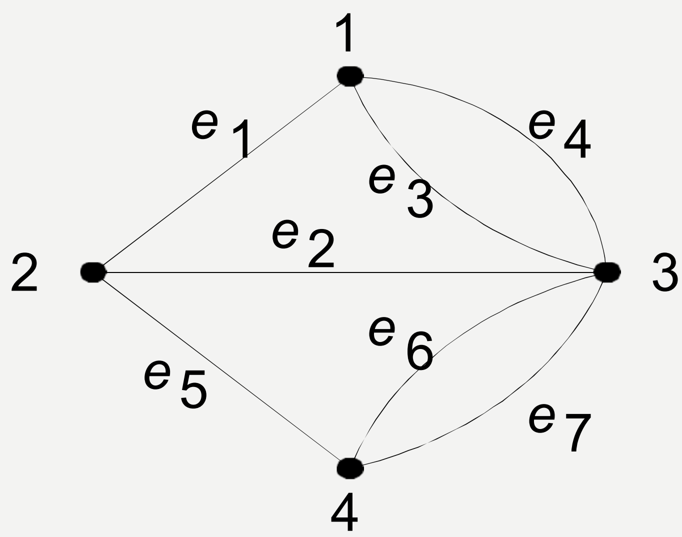
G_1 adalah graph dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3),$
$(2, 4), (3, 4) \}$

GRAPH

- Graph G_2



G_2 adalah graph dengan

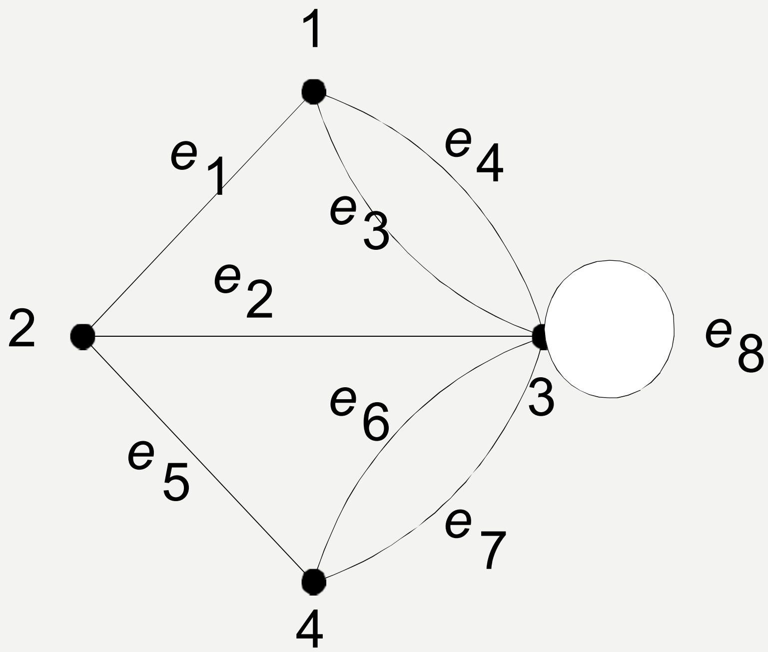
$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$

$= \{ e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7\}$

GRAPH

- Graph G_3



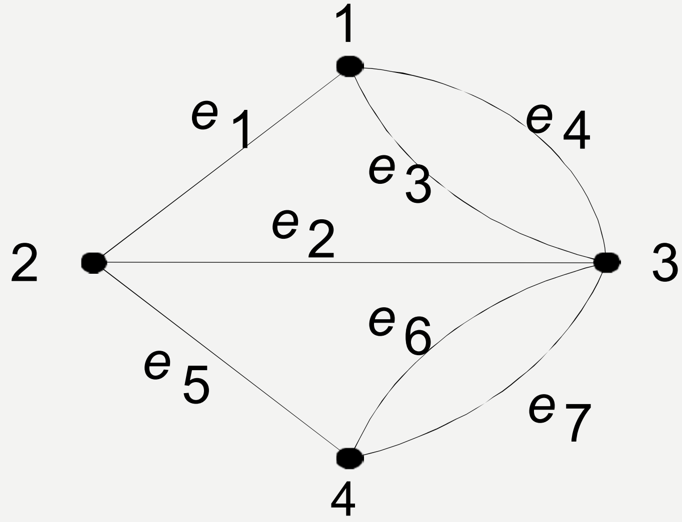
G_3 adalah graph dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3),$
$(1, 3), (2, 4), (3, 4),$
$(3, 4), (3, 3) \}$
$= \{ e1, e2, e3, e4, e5, e6,$
$e7, e8\}$

GRAPH

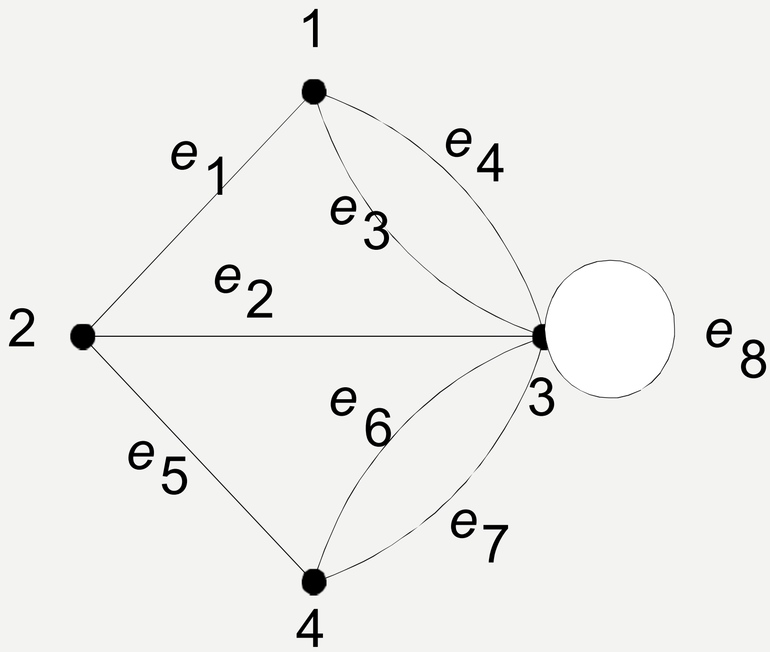
- Graph G_2



Pada G_2, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

GRA PH

- Graph G_3



Pada G_3, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

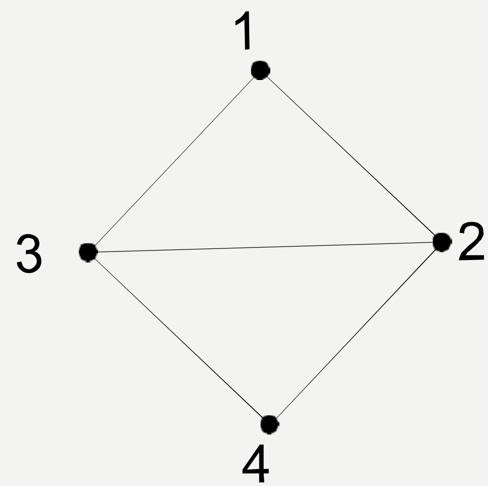
JENIS-JENIS GRAPH

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graph, maka graph digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graph sederhana** (*simple graph*).
2. **Graph tak-sederhana** (*unsimple-graph*).

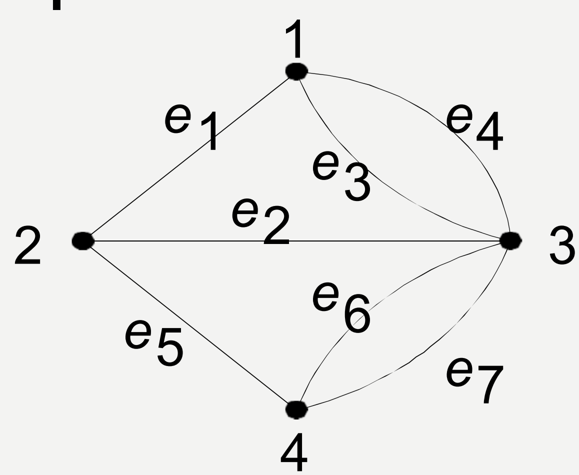
GRAPH SEDERHANA (*SIMPLE GRAPH*)

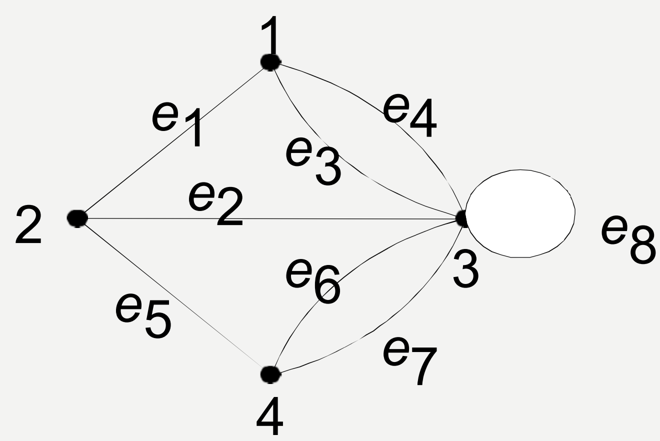
- Graph yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graph sederhana. *G*1 adalah contoh graph sederhana



GRAPH TAK-SEDERHANA (*UNSIMPLE- GRAPH)*

Graph yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graph tak-sederhana (*unsimple graph*). *G*2 dan *G*3 adalah contoh graph tak-sederhana





JENIS-JENIS GRAPH

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graph, maka secara umum graph dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graph berhingga** (*limited graph*)
2. **Graph tak-berhingga** (*unlimited graph*)

Graph berhingga (*limited graph*)

Graph berhingga adalah graph yang jumlah simpulnya, *n*, berhingga.

GRAPH TAK-BERHINGGA (*UNLIMITED GRAPH*)

Graph yang jumlah simpulnya, *n*, tidak berhingga banyaknya disebut **graph tak- berhingga**.

- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graph dibedakan atas 2 jenis:
- 1. **Graph tak-berarah** (*undirected graph*)
- Graph yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graph tak-berarah. Tiga buah graph pada Gambar 2 adalah graph tak-berarah.
- 2. **Graph berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
- Graph yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graph berarah. Dua buah graph pada Gambar 3 adalah graph berarah.

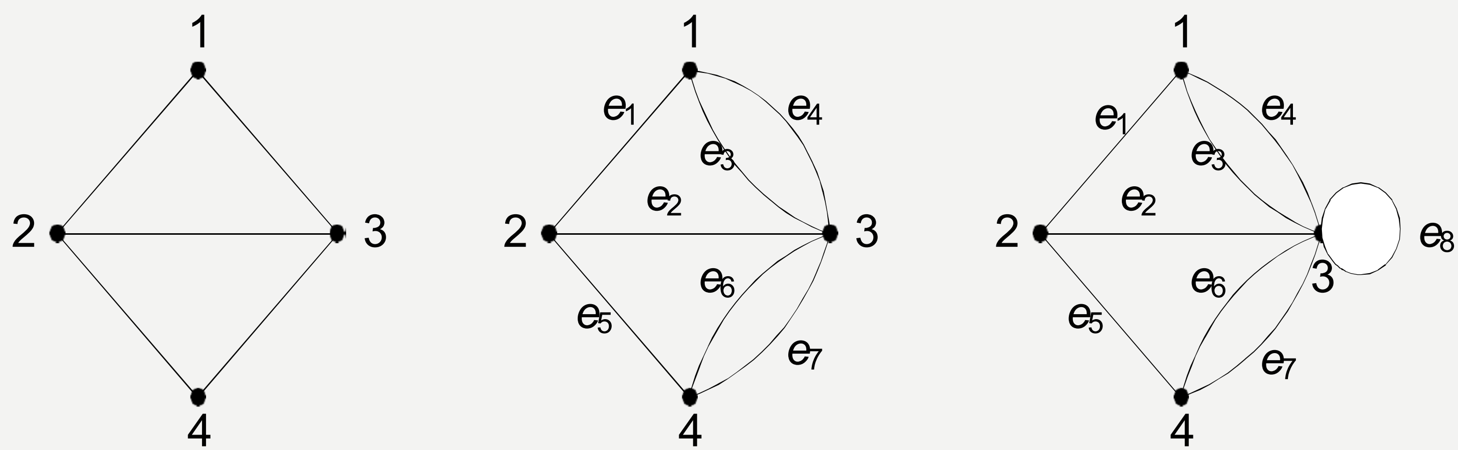
JENIS-JENIS GRAPH

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graph dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graph tak-berarah** (*undirected graph*)
2. **Graph berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

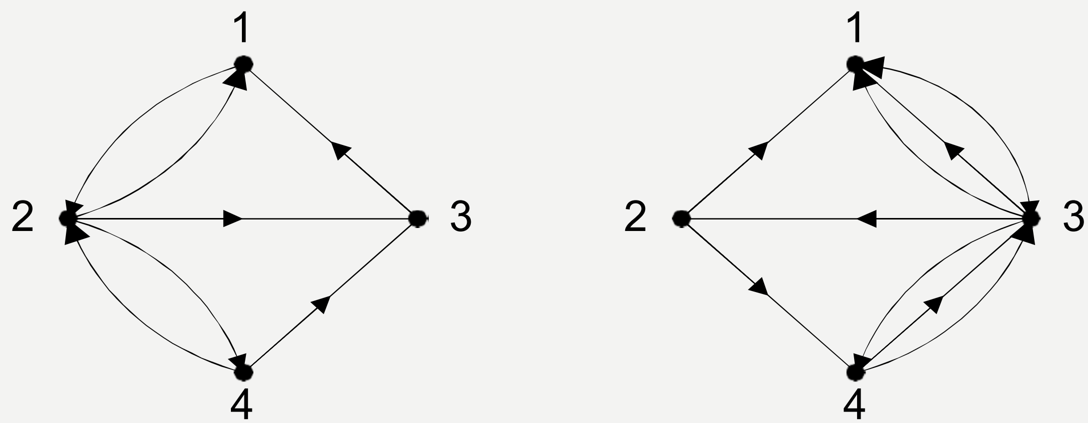
GRAPH TAK-BERARAH (*UNDIRECTED GRAPH*)

Graph yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graph tak-berarah. Graph G_1, G_2, dan G_3 adalah graph tak-berarah.



GRAPH BERARAH (*DIRECTED GRAPH* ATAU *DIGRAPH*)

Graph yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graph berarah.



(a) *G*4 (b) *G*5

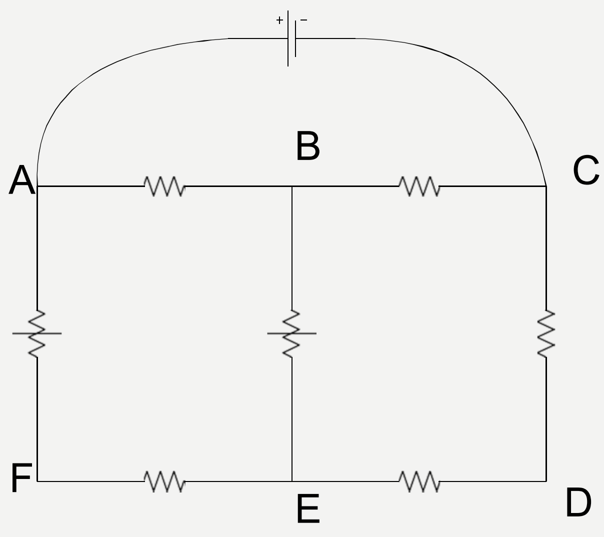
(a) graph berarah, (b) graph-ganda berarah

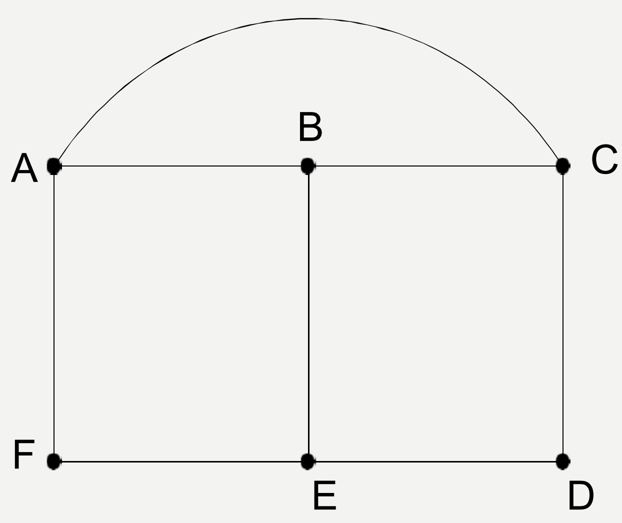
JENIS-JENIS GRAPH [ROS99]

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan ?	Sisi gelang dibol hkan ?
Graph sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graph ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graph semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graph berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graph-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

CONTOH TERAPAN GRAPH

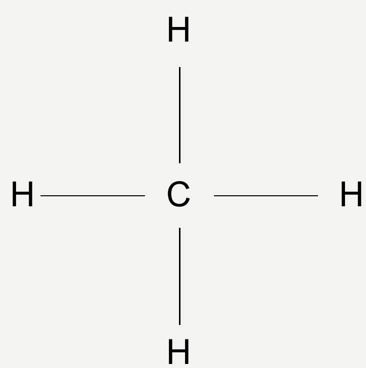
- *Rangkaian listrik*.



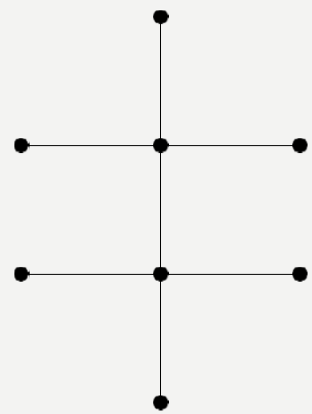


CONTOH TERAPAN GRAPH

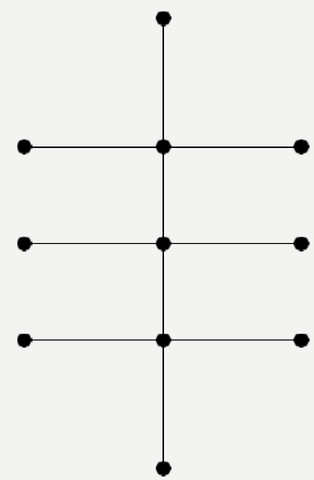
- *Isomer senyawa kimia karbon*



metana (CH_4)



etana (C_2H_6)



propana (C_3H_8)

CONTOH TERAPAN GRAPH

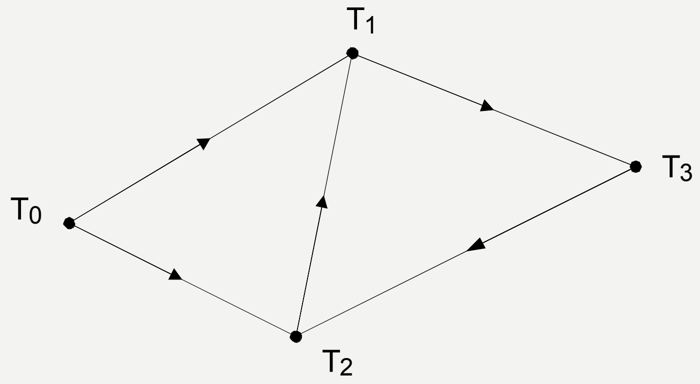
Transaksi konkuren pada basis data terpusat

Transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2

Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1

Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3

Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2

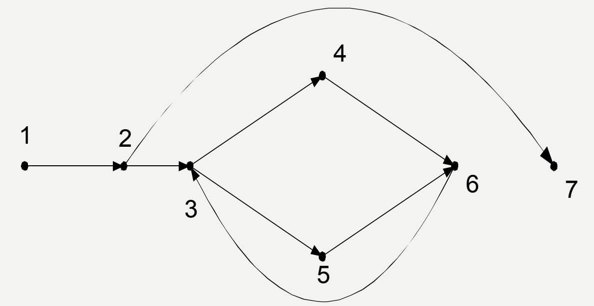


CONTOH TERAPAN GRAPH

. *Pengujian program*

```
read(x);
while x <> 9999 do
 begin
   if x < 0 then
       writeln('Masukan tidak boleh negatif')
   else
        x:=x+10;
   read(x);
end;
writeln(x);
```

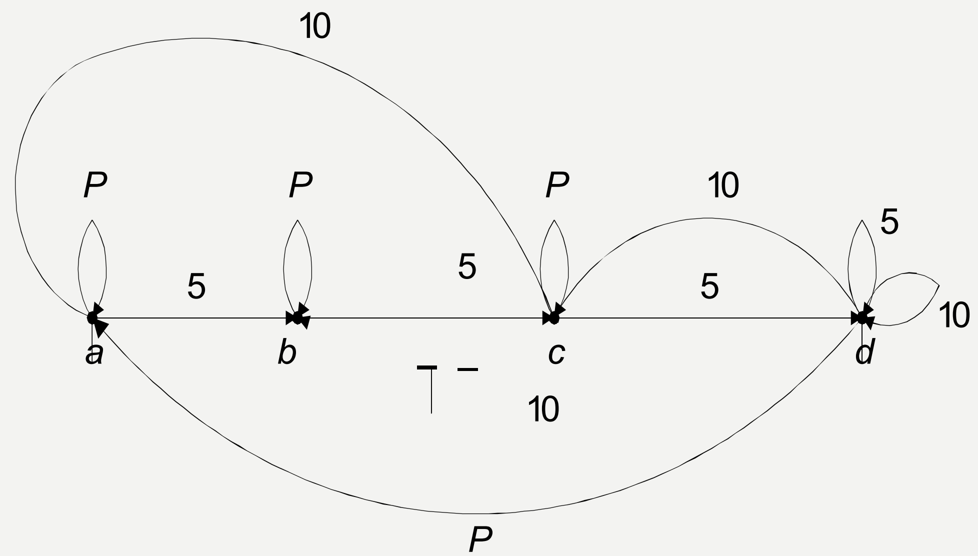
keterangan



Keterangan:
1 : read(x)
2 : x <> 9999
3 : x < 0
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');
5 : x := x + 10
6 : read(x)
7 : writeln(x)

CONTOH TERAPAN GRAPH

Terapan graph pada teori otomata [LIU85].



Mesin jaja (*vending machine*)

Keterangan:

a : 0 sen dimasukkan

b : 5 sen dimasukkan

c : 10 sen dimasukkan

d : 15 sen atau lebih dimasukkan

KETETANGGAAN (*ADJACENT*)

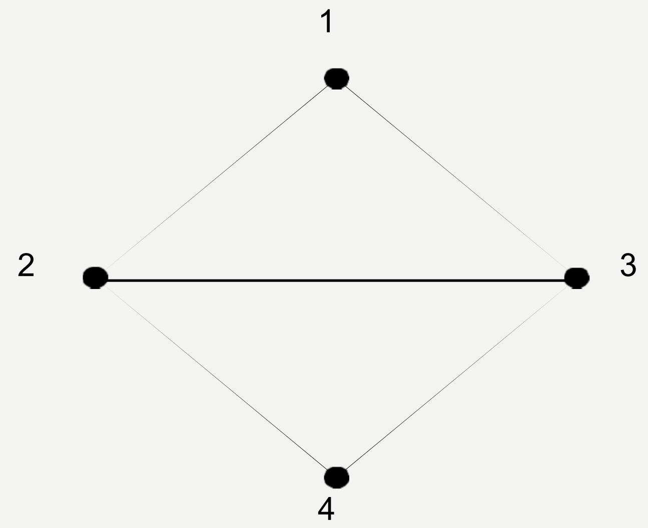
Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graph :

simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,

simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

- Graph



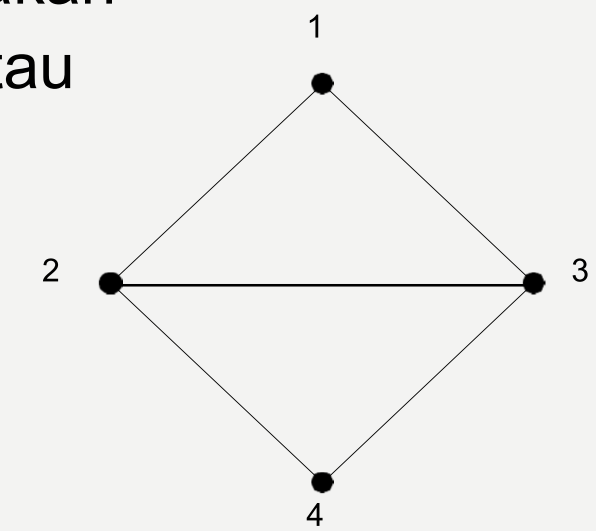
BERSISIAN (*INCIDENCY*)

Untuk sembarang sisi *e* = (*vj*, *vk*) dikatakan

e bersisian dengan simpul *vj* , atau

e bersisian dengan simpul *vk*

Tinjau graph :



sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,

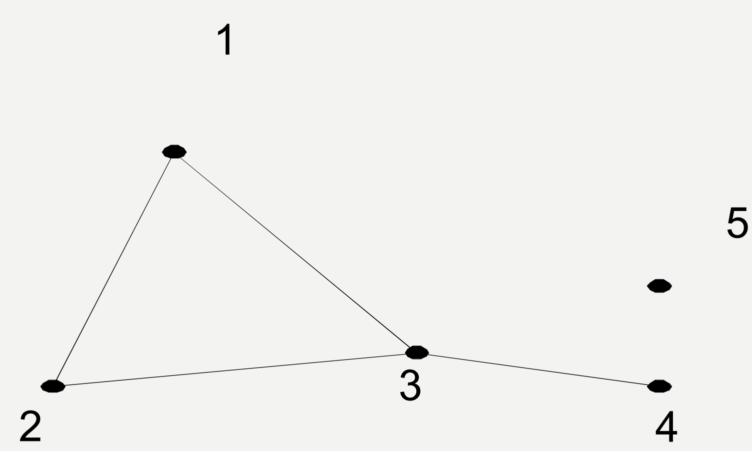
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,

tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

SIMPUL TERPENCIL (*ISOLATED VERTEX*)

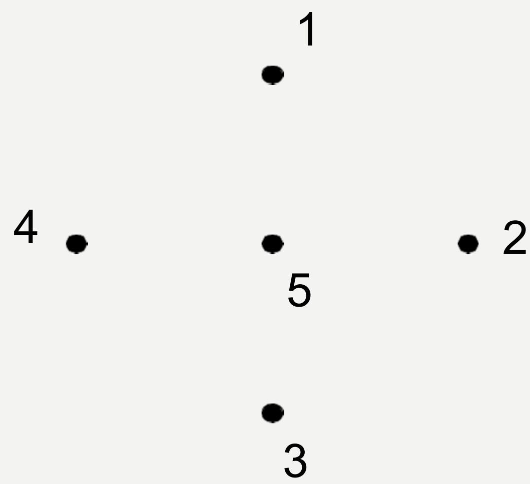
Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graph : simpul 5 adalah simpul terpencil



GRAPH KOSONG (*NULL GRAPH* ATAU *EMPTY GRAPH*)

Graph yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).



DERAJAT (*DEGREE*)

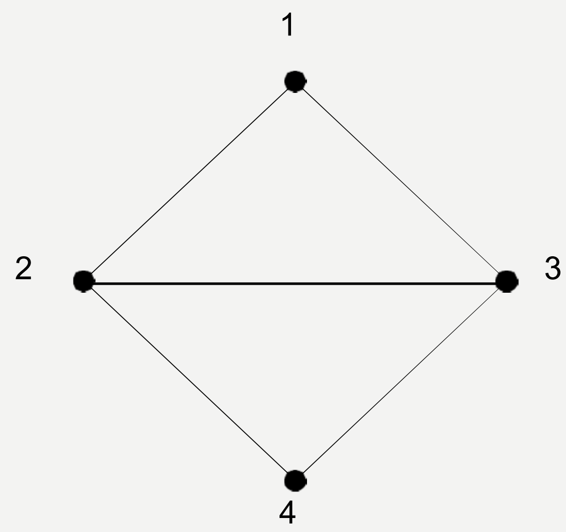
Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graph $G1$:

$d(1) = d(4) = 2$

$d(2) = d(3) = 3$



DERAJAT (*DEGREE*)

Tinjau graph *G*3:

d(5) = 0 ⓪ simpul terpencil

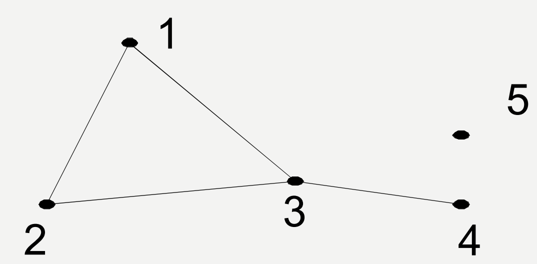
d(4) = 1 ⓪ simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graph *G*2:

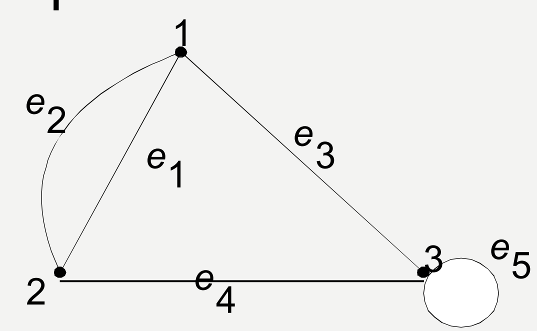
d(1) = 3 ⓪ bersisian dengan sisi ganda

d(2) = 4 ⓪ bersisian dengan sisi gelang (*loop*)

- Graph G3



- Graph G2



DERAJAT (*DEGREE*)

Pada graph berarah,

$d_{in}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)
= jumlah busur yang masuk ke simpul v

$d_{out}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)
= jumlah busur yang keluar dari simpul v

$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$$

DERAJAT (*DEGREE*)

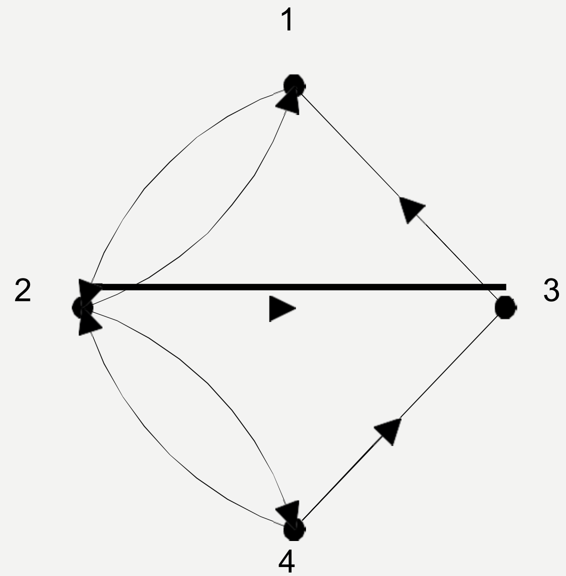
Tinjau graph :

$d_{in}(1) = 2; d_{out}(1) = 1$

$d_{in}(2) = 2; d_{out}(2) = 3$

$d_{in}(3) = 2; d_{out}(3) = 1$

$d_{in}(4) = 1; d_{out}(4) = 2$



LEMMA JABAT TANGAN

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graph adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graph tersebut.

Dengan kata lain, jika *G* = (*V*, *E*), maka

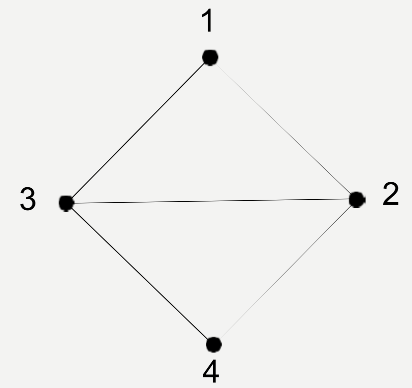
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

LEMMA JABAT TANGAN

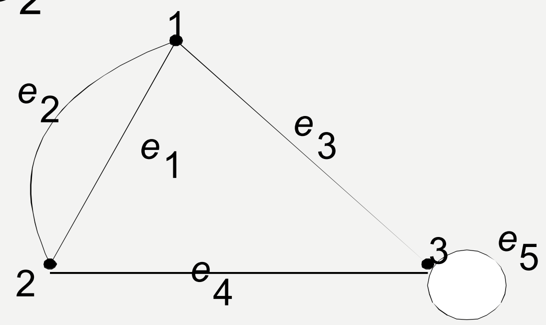
Tinjau graph $G1$:
$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) =$
$2 + 3 + 3 + 2 = 10 =$
$2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graph $G2$:
$d(1) + d(2) + d(3)$
$= 3 + 3 + 4 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

- Graph G_1



- Graph G_2



LEMMA JABAT TANGAN

Tinjau graph G_3:

$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

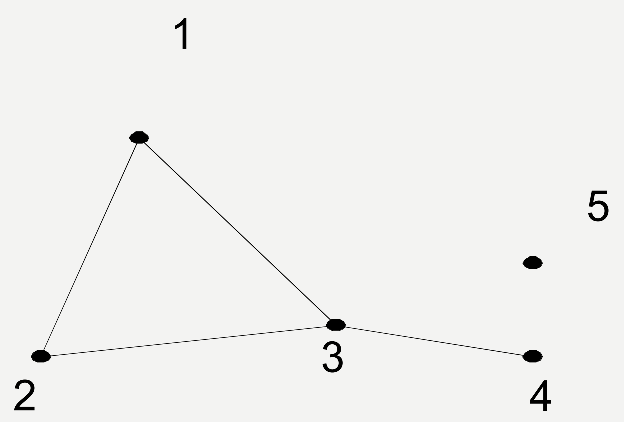
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0$

$= 8$

$= 2 \times$ jumlah sisi

$= 2 \times 4$

- Graph G_3



LEMMA JABAT TANGAN

Contoh.

Diketahui graph dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graph tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil
(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).

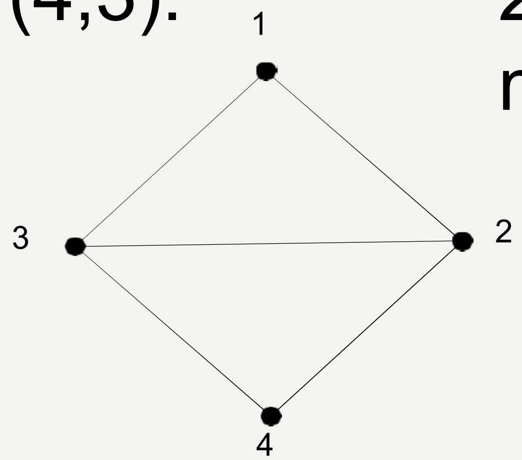
(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap
(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).

LINTASAN (*PATH*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graph G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graph G.

LINTASAN (*PATH*)

- Tinjau graph *G*1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).



- **Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada *G*1 memiliki panjang 3.

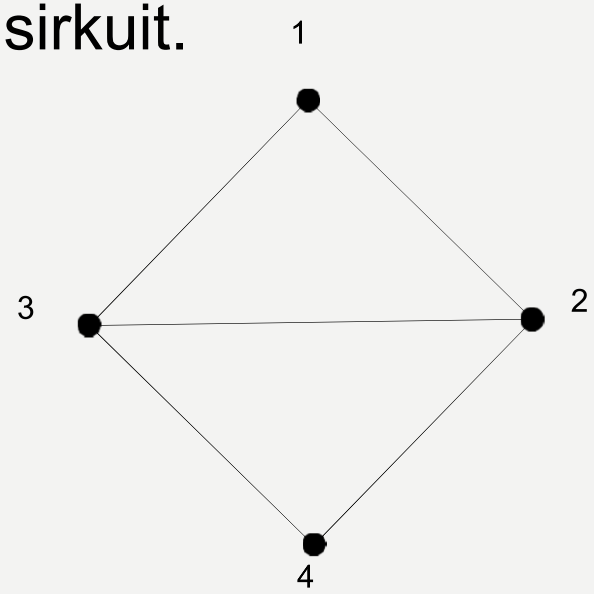
SIKLUS (*CYCLE*) ATAU SIRKUIT (*CIRCUIT*)

- Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

- **Panjang sirkuit** adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada *G*1 memiliki panjang 3.

- Tinjau graph *G*1:

  1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.



TERHUBUNG (*CONNECTED*)

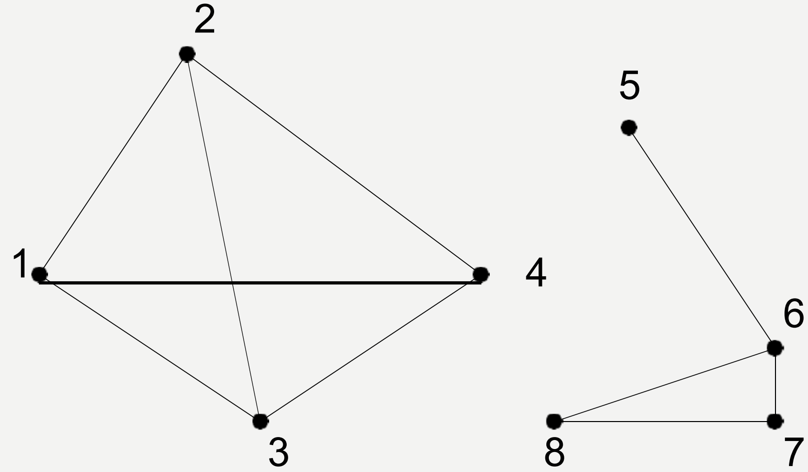
Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graph terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan *V* terdapat lintasan dari v_i ke v_j

Jika tidak, maka *G* disebut **graph tak-terhubung** (*disconnected graph*).

TERHUBUNG (*CONNECTED*)

- Contoh graph tak-terhubung:



TERHUBUNG (*CONNECTED*) GRAPH BERARAH

- Graph berarah *G* dikatakan terhubung jika graph tidak berarahnya terhubung (graph tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

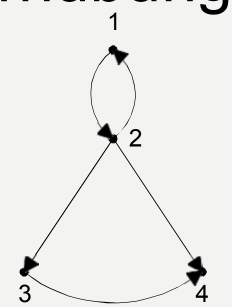
TERHUBUNG (*CONNECTED*) GRAPH BERARAH

- Dua simpul, *u* dan *v*, pada graph berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.
- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graph tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly connected*).

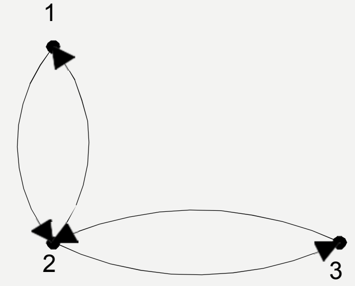
TERHUBUNG (*CONNECTED*) GRAPH BERARAH

Graph berarah *G* disebut **graph terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang *u* dan *v* di *G*, terhubung kuat. Kalau tidak, *G* disebut **graph terhubung lemah**.

- Graph berarah terhubung lemah



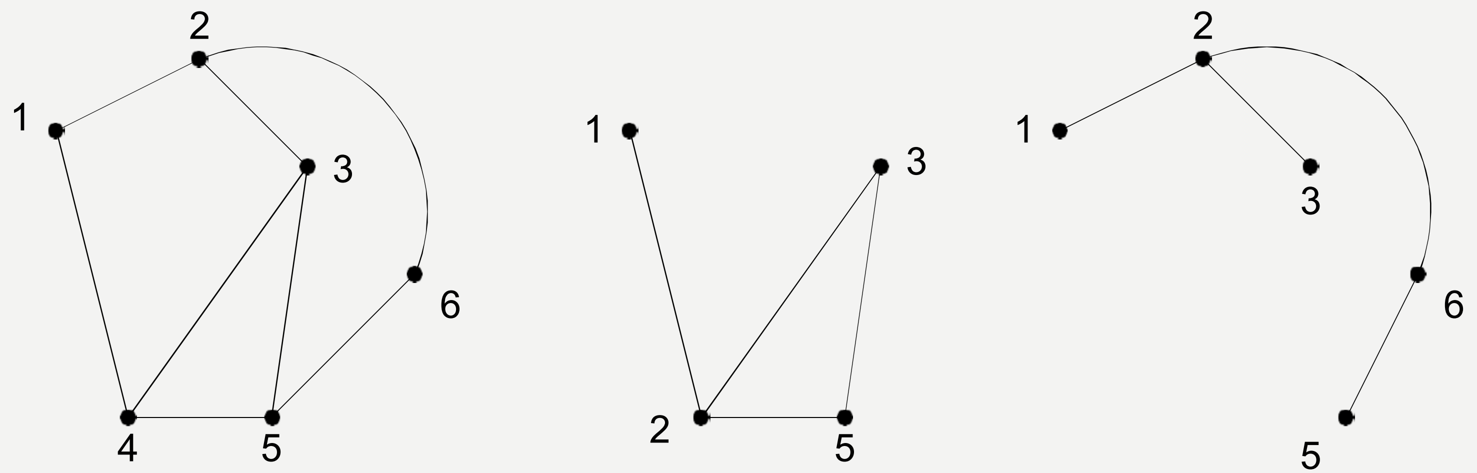
- Graph berarah terhubung kuat



UPAGRAPH (SUBGRAPH) DAN KOMPLEMEN UPAGRAPH

- Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graph. $G1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraph** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.
- **Komplemen** dari upagraph G_1 terhadap graph G adalah graph $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

UPAGRAPH (*SUBGRAPH*) DAN KOMPLEMEN UPAGRAPH



(a) Graph *G*1

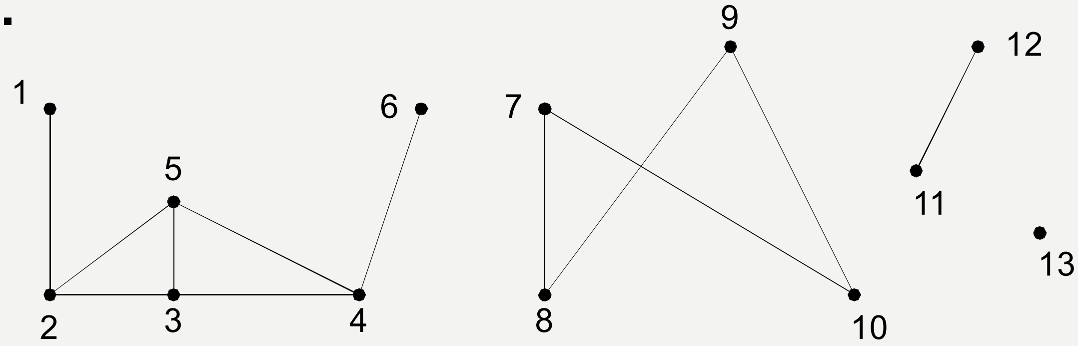
(b) Sebuah upagraph

(c) komplemen dari upagraph

KOMPONEN GRAPH (CONNECTED COMPONENT)

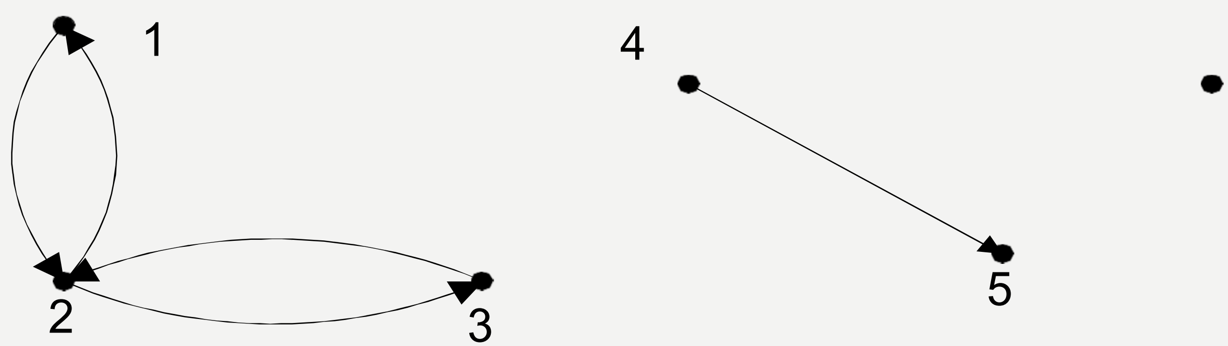
adalah jumlah maksimum upagraph terhubung dalam graph *G*.

Graph *G* di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



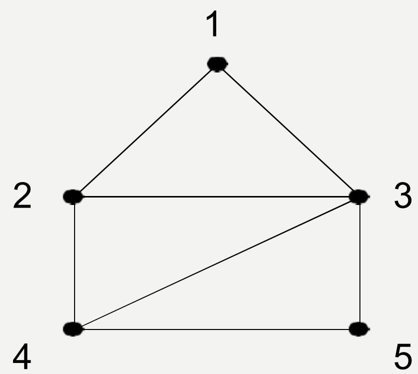
KOMPONEN GRAPH (CONNECTED COMPONENT)

- Pada graph berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraph yang terhubung kuat.
- Graph di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:

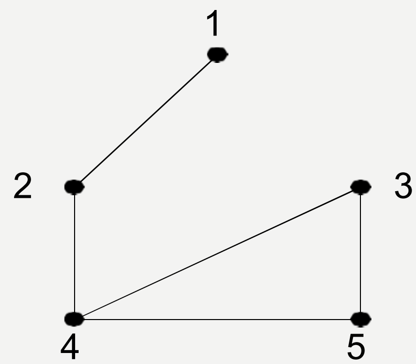


UPAGRAPH RENTANG (*SPANNING SUBGRAPH*)

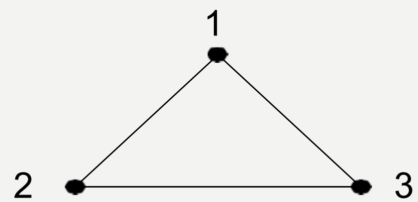
- Upagraph $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraph rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu $G1$ mengandung semua simpul dari G).



(a) graph G,



(b) upagraph rentang dari G



(c)bukan upagraph rentang dari G,

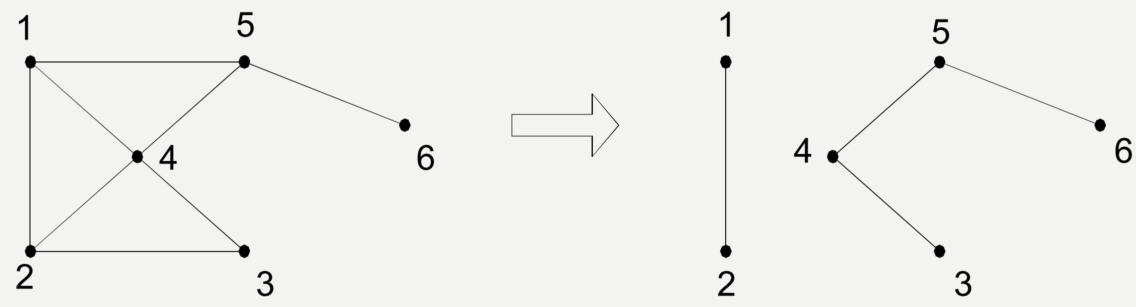
CUT-SET

Cut-set dari graph terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung.

Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

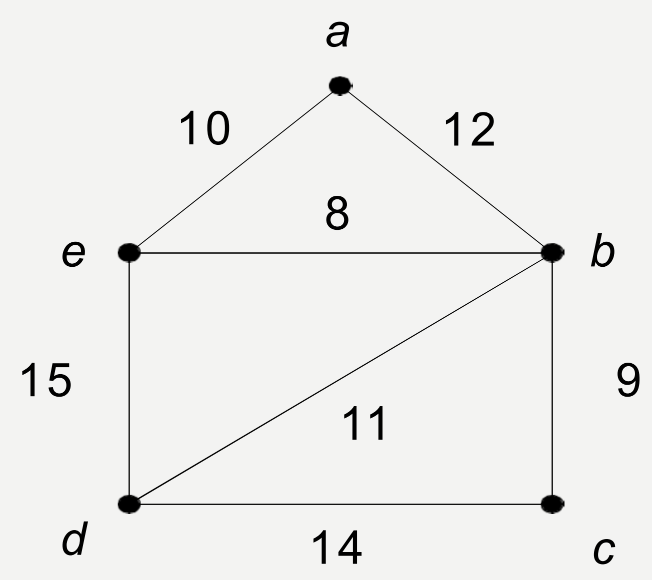
CUT-SET

- Pada graph di bawah, {(1,5), (1,4), (2,4), (2,3)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graph terhubung.
- Himpunan {(1,5), (4,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,2), (1,4), (1,5)} adalah *cut-set*, {(5,6)} juga *cut-set*,
- tetapi {(1,5), (4,5), (3,4)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,5), (4,5)} adalah *cut-set*.



GRAPH BERBOBOT (*WEIGHTED GRAPH*)

Graph berbobot adalah graph yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



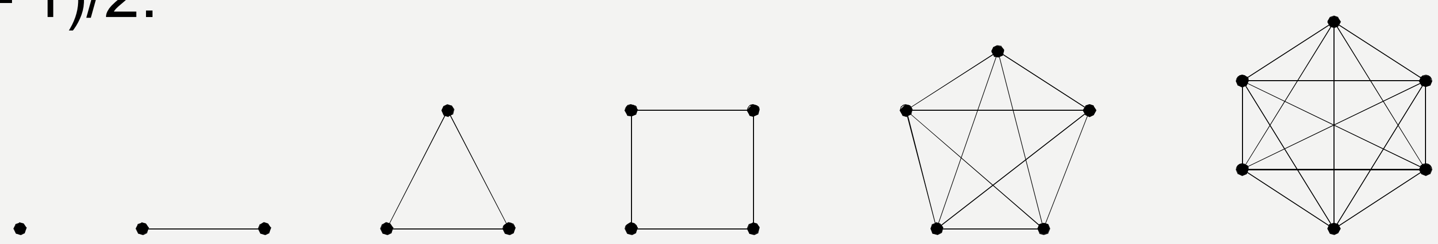
BEBERAPA GRAPH SEDERHANA KHUSUS

a. Graph Lengkap (*Complete Graph*)
b. Graph Lingkaran
c. Graph Teratur (*Regular Graphs*)
d. Graph *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

GRAPH LENGKAP

ialah graph sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graph lengkap dengan *n* buah simpul dilambangkan dengan *Kn*. Jumlah sisi pada graph lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul adalah

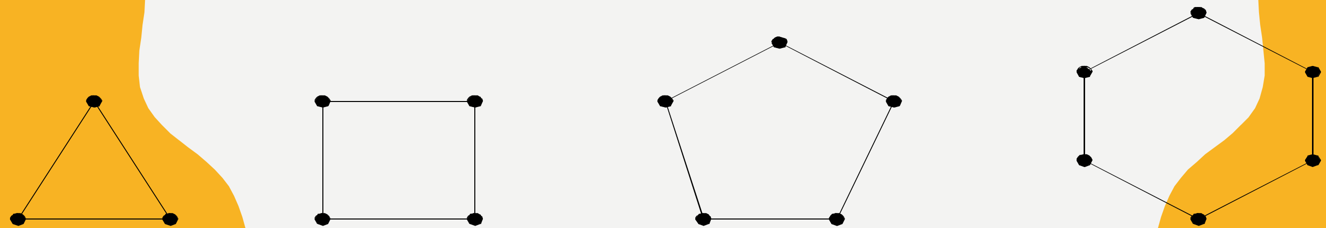
$n(n - 1)/2$.



*K*1 *K*2 *K*3 *K*4 *K*5 *K*6

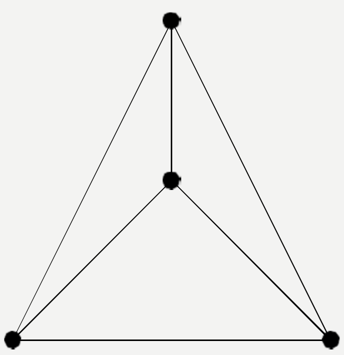
Graph lingkaran

adalah graph sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graph lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



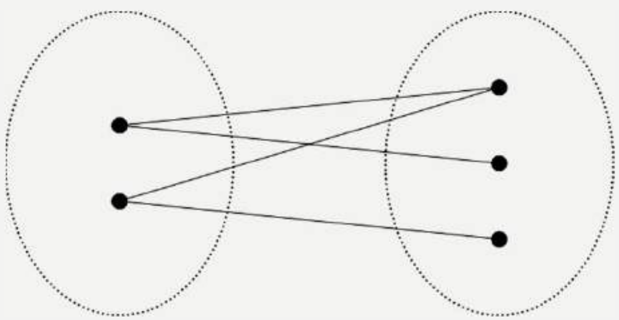
GRAPH TERATUR (*REGULAR GRAPHS*)

Graph yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graph teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graph tersebut disebut sebagai graph teratur derajat *r*. Jumlah sisi pada graph teratur adalah *nr*/2.



GRAPH *BIPARTITE* (*BIPARTITE GRAPH*)

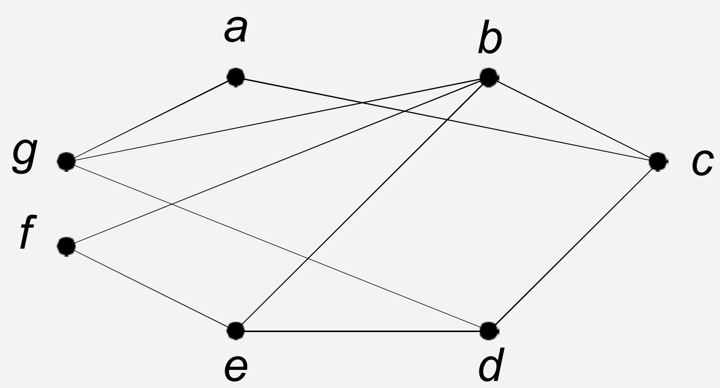
Graph G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graph bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



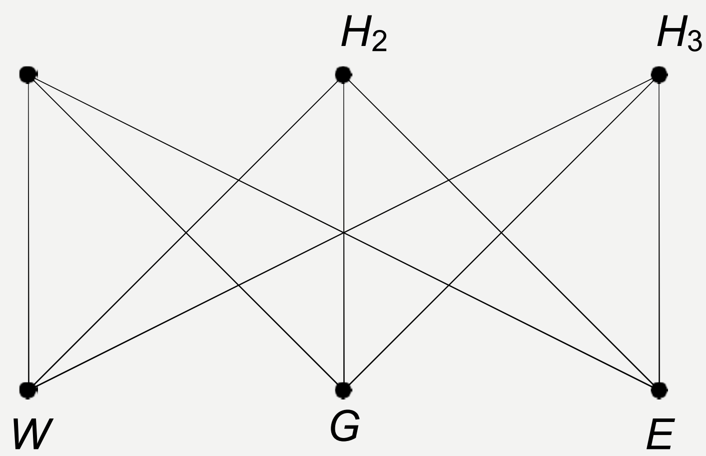
$V1$ $V2$

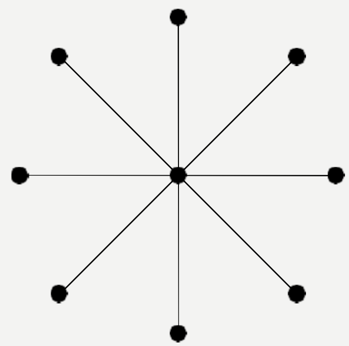
GRAPH *BIPARTITE* (*BIPARTITE GRAPH*)

Graph *G* di bawah ini adalah graph bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi *V*1 = {*a*, *b*, *d*} dan *V*2 = {*c*, *e*, *f*, *g*}



GRAPH *BIPARTITE* (*BIPARTITE GRAPH*)





REPRESENTASI GRAPH

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)
2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)
3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

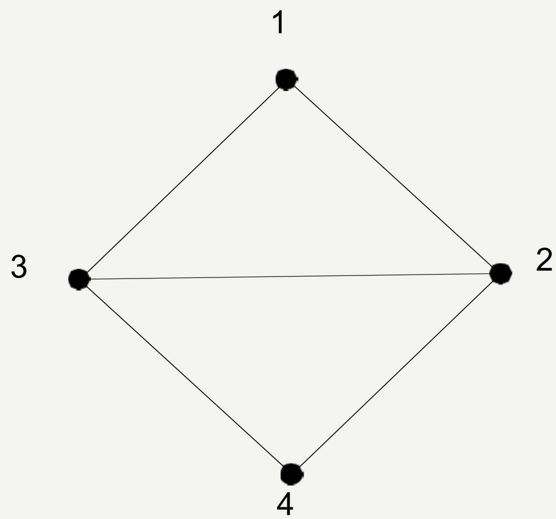
MATRIKS KETETANGGAAN (*ADJACENCY MATRIX*)

$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

MATRIKS KETETANGGAAN (ADJACENCY MATRIX)

- Graph

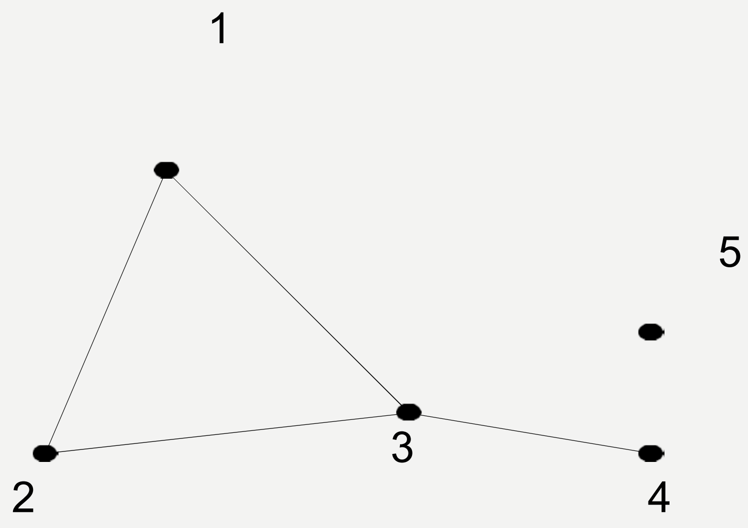


- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

MATRIKS KETETANGGAAN (*ADJACENCY MATRIX*)

- Graph

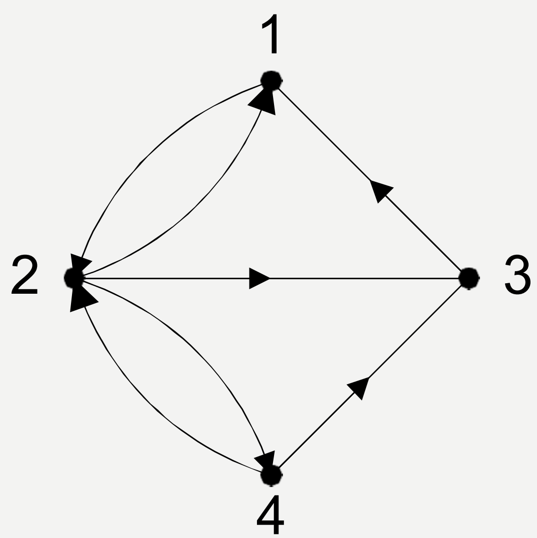


- **Matriks Ketetanggaan**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

MATRIKS KETETANGGAAN (*ADJACENCY MATRIX*)

- Graph

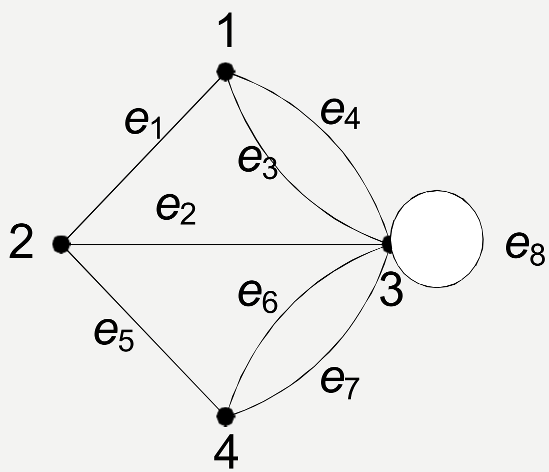


- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c}
 \\
1 \\
2 \\
3 \\
4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

MATRIKS KETETANGGAAN (*ADJACENCY MATRIX*)

- Graph



- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

DERAJAT TIAP SIMPUL *I*:

(a) Untuk graph tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

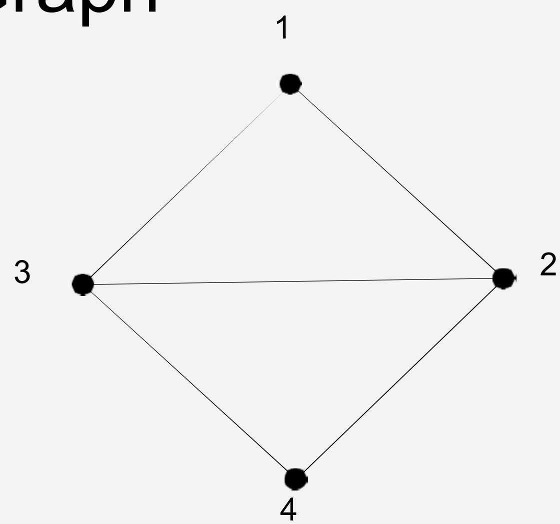
(b) Untuk graph berarah,

$d_{in}(v_j)$ = jumlah nilai pada kolom j = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

$d_{out}(v_i)$ = jumlah nilai pada baris i = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

DERAJAT TIAP SIMPUL

- Graph



Derajat simpul 2 = 1+0+1+1 = 3

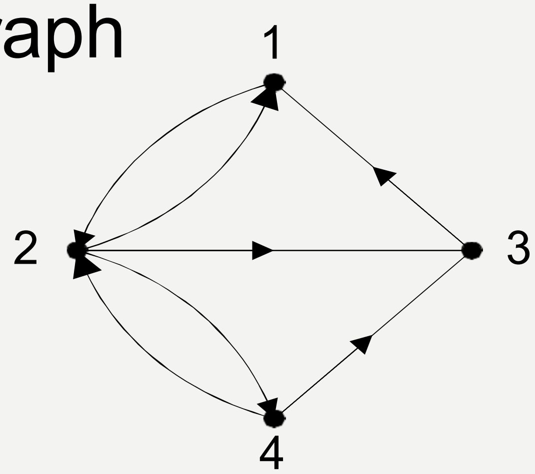
Derajat simpul 4 = 0+1+1+0 = 2

- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

DERAJAT TIAP SIMPUL

- Graph



Derajat masuk simpul 2 = 1+0+0+1 = 2

Derajat keluar simpul 2 = 1+0+1+1 = 3

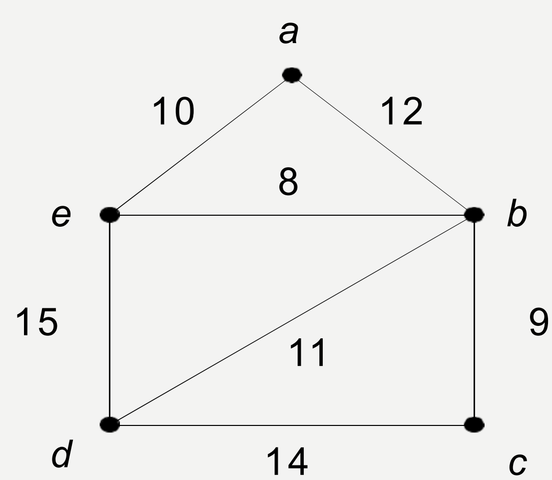
- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

MATRIKS KETETANGGAAN GRAPH BERBOBOT

- Graph

Tanda ∞ bila tdk ada sisi dari simpul I ke j



- **Matriks Ketetanggaan**

$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\
12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\
\infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\
\infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\
10 & 8 & \infty & 15 & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

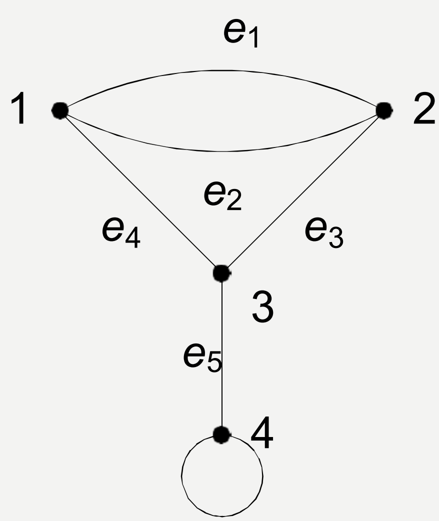
MATRIKS BERSISIAN (*INCIDENCY MATRIX*)

$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

MATRIKS BERSISIAN (*INCIDENCY MATRIX*)

- Graph

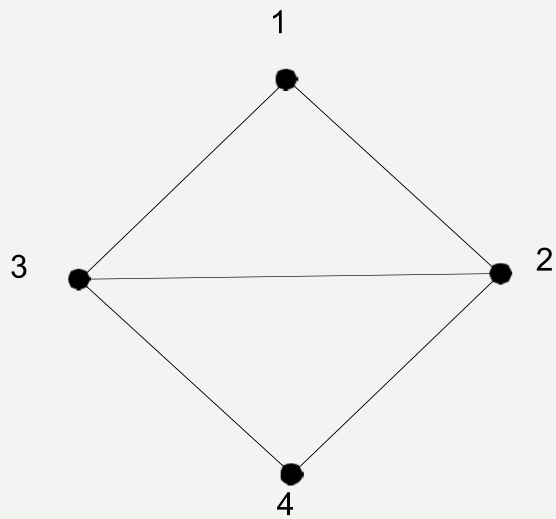


- **Matriks Bersisian**

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

SENARAI KETETANGGAAN (*ADJACENCY LIST*)

- Graph

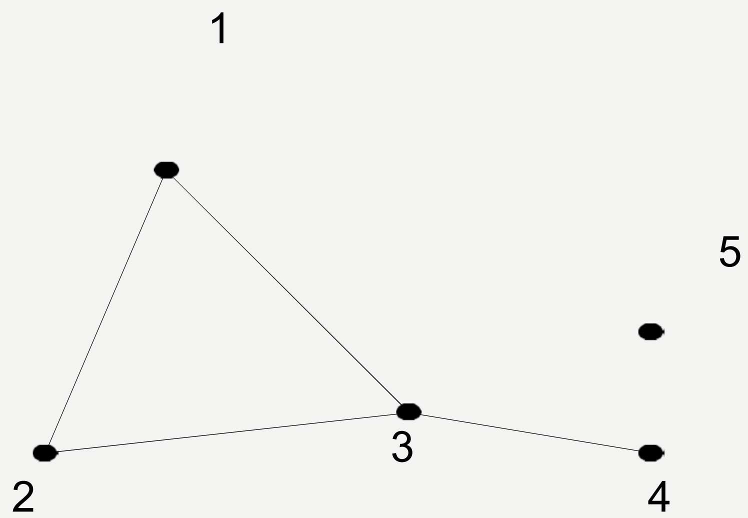


- **Senarai Ketetanggaan**

Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

MATRIKS KETETANGGAAN (*ADJACENCY MATRIX*)

- Graph

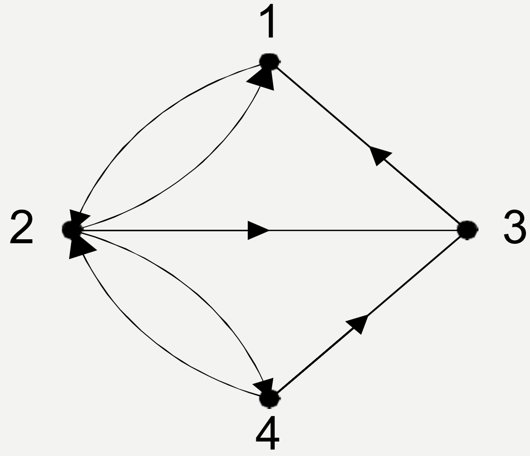


- **Senarai Ketetanggaan**

Simpul	**Simpul Tetangga**
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

SENARAI KETETANGGAAN (*ADJACENCY LIST*)

- Graph



- **Senarai Ketetanggaan**

Simpul	**Simpul Terminal**
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

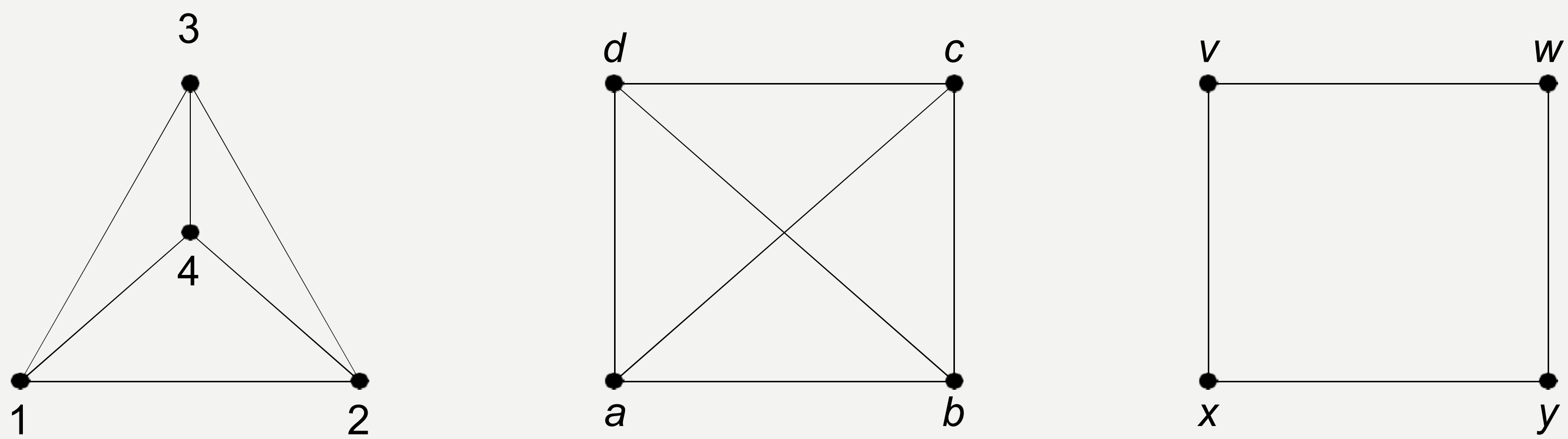
GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC GRAPH*)

- Dua buah graph yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graph yang saling **isomorfik**.
- Dua buah graph, *G*1 dan *G*2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.

GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC GRAPH*)

- Dengan kata lain, misalkan sisi *e* bersisian dengan simpul *u* dan *v* di *G*1, maka sisi *e*' yang berkoresponden di *G*2 harus bersisian dengan simpul *u*' dan *v*' yang di *G*2.
- Dua buah graph yang isomorfik adalah graph yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graph dapat digambarkan dalam banyak cara.

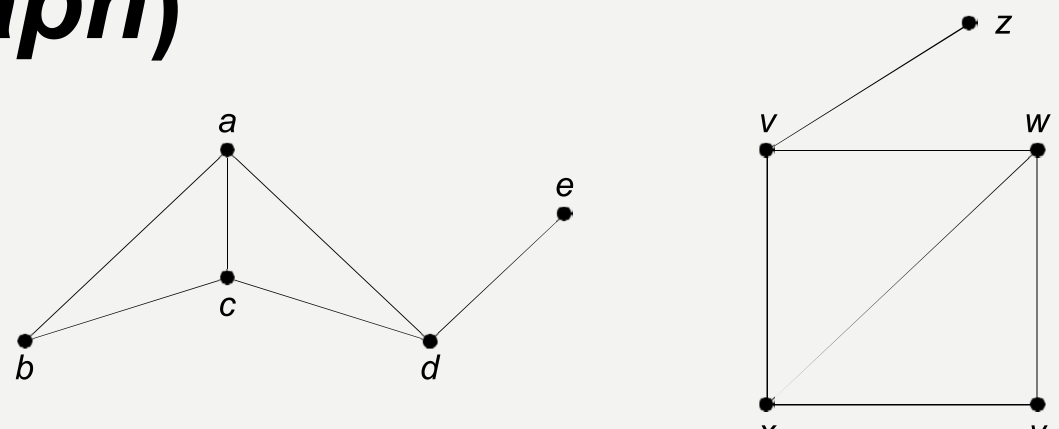
GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC GRAPH*)



(a) *G*1 (b) *G*2 (c) *G*3

***G*1 isomorfik dengan *G*2, tetapi *G*1 tidak isomorfik dengan *G*3**

GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC* *Graph*)

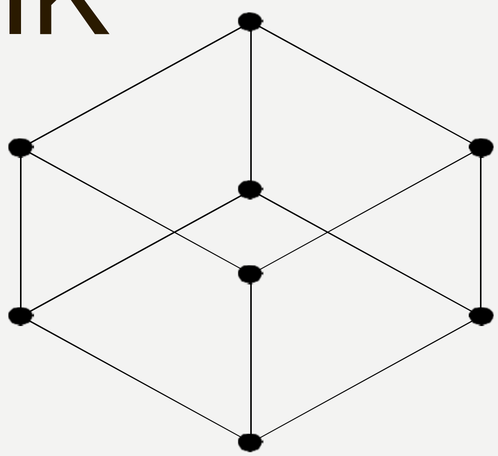


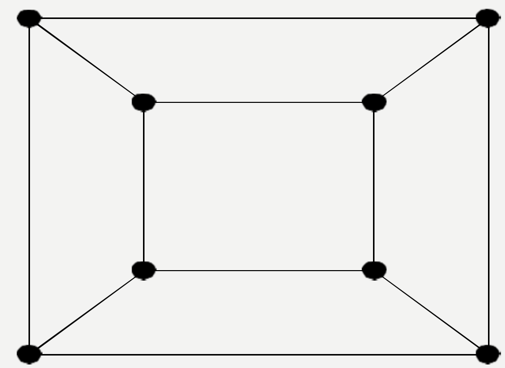
(a) *G*1 (b) *G*2

Graph (a) dan graph (b) isomorfik

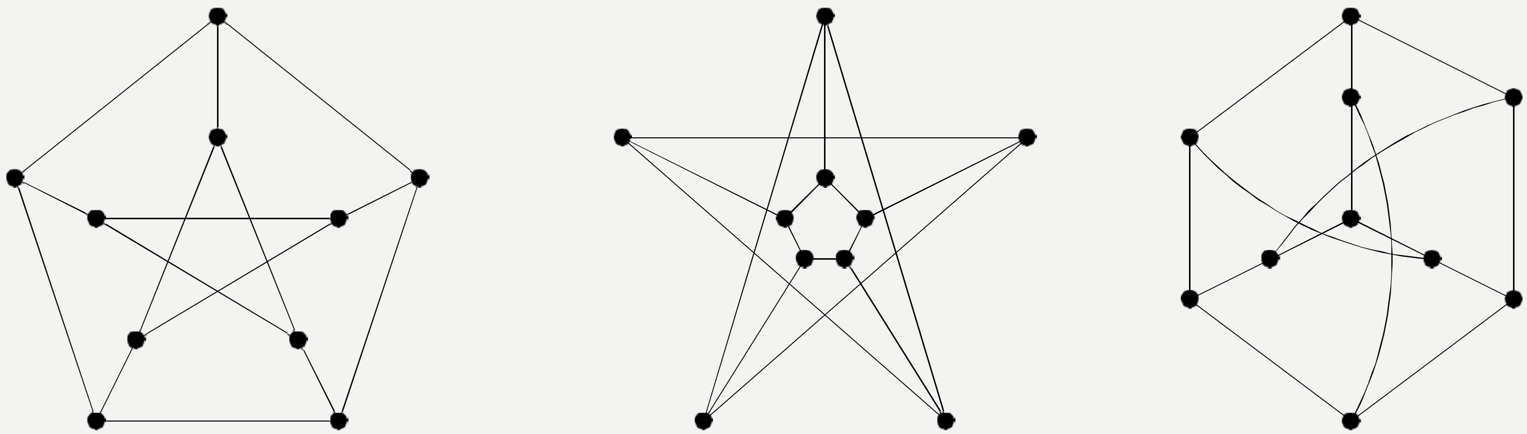
$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

DUA BUAH GRAPH ISOMORFIK





TIGA BUAH GRAPH ISOMORFIK



GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC GRAPH*)

Dari definisi graph isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graph isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

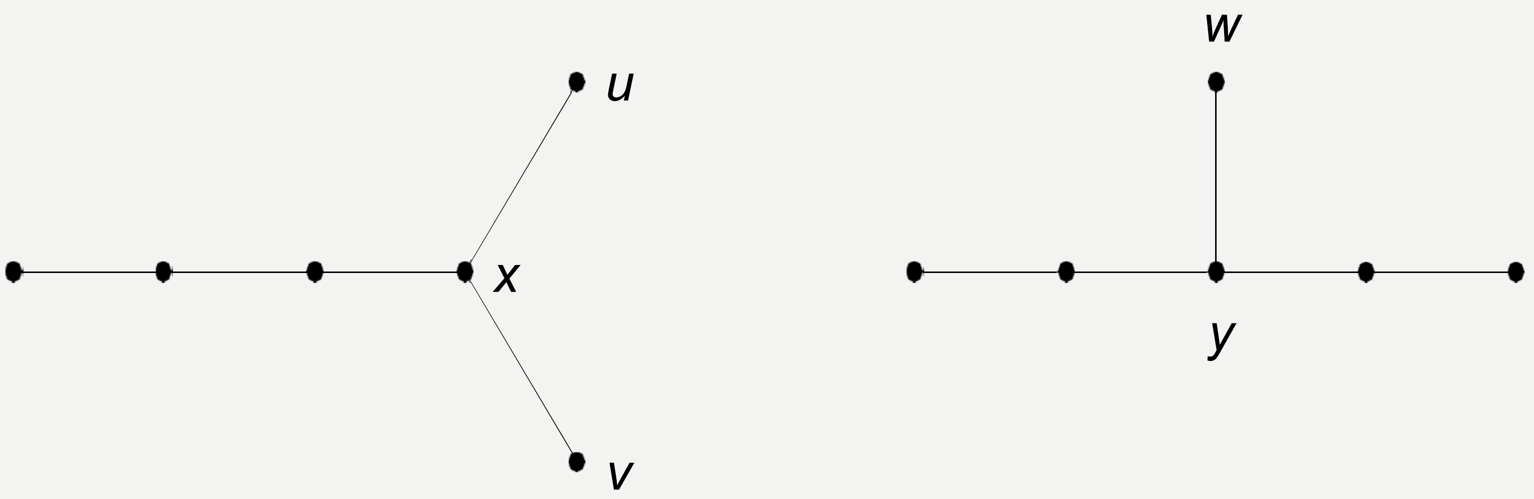
1.Mempunyai jumlah simpul yang sama.

2. Mempunyai jumlah sisi yang sama

3.Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

GRAPH ISOMORFIK (*ISOMORPHIC GRAPH*)

Ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.

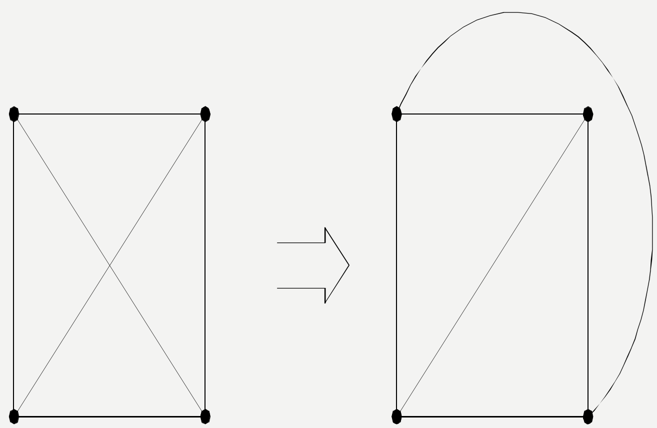


GRAPH PLANAR (*PLANAR GRAPH*) DAN GRAPH BIDANG (*PLANE GRAPH*)

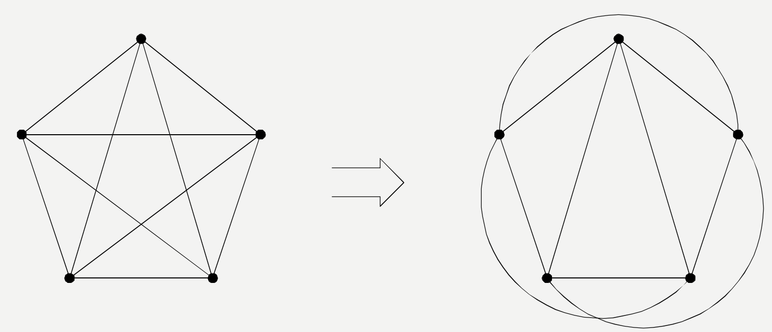
- Graph yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong disebut sebagai **graph planar**, jika tidak, ia disebut **graph tak-planar**.

GRAPH PLANAR (*PLANAR GRAPH*)

- Graph Planar
- Graph tidak planar



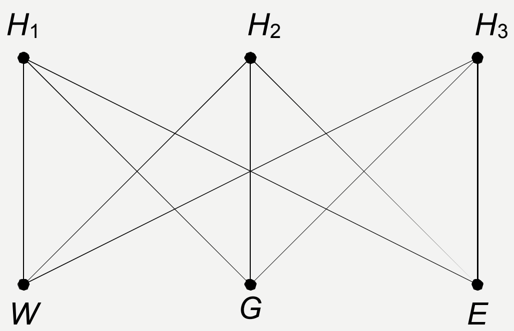
Graph K_4

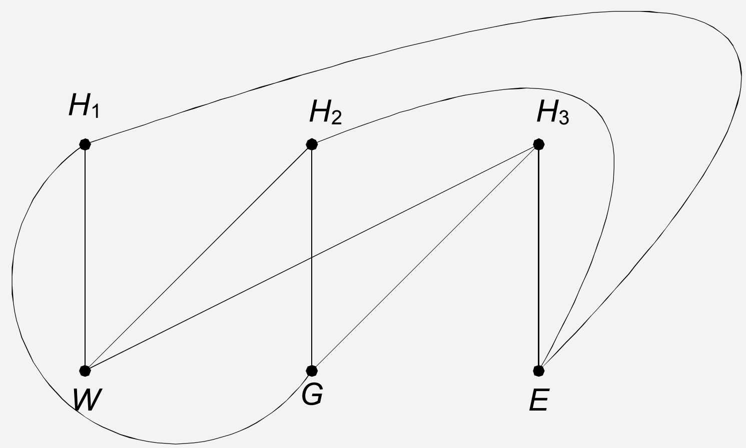


Graph K_5

GRAPH PLANAR (*PLANAR GRAPH*)

- Graph persoalan utilitas ($K_{3,3}$) bukan graph planar

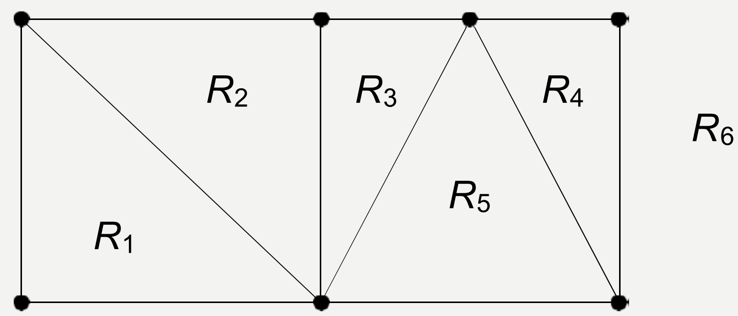




GRAPH PLANAR (*PLANAR GRAPH*)

- Sisi-sisi pada graph planar membagi bidang menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*). Jumlah wilayah pada graph planar dapat dihitung dengan mudah.

- Graph planar yang terdiri atas 6 wilayah



GRAPH PLANAR (*PLANAR GRAPH*)

Rumus Euler

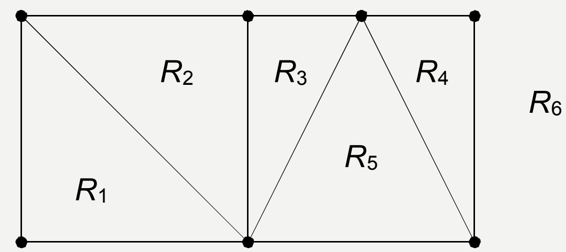
$$n - e + f = 2$$

yang dalam hal ini,

f = jumlah wilayah

e = jumlah sisi

n = jumlah simpul



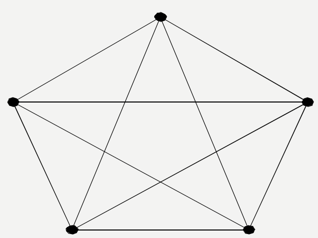
n = 11

e = 7

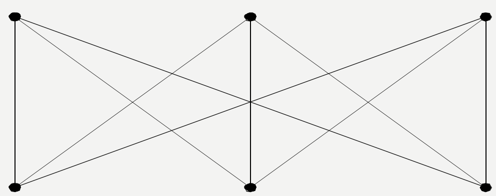
f = 11-7+2 = 6

TEOREMA KURATOSWKI

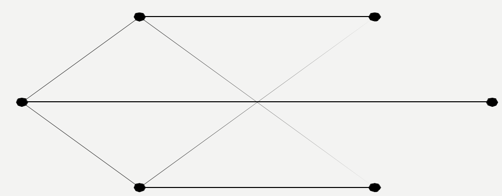
- Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graph.



(a)



(b)



(c)

(a) Graph Kuratowski pertama

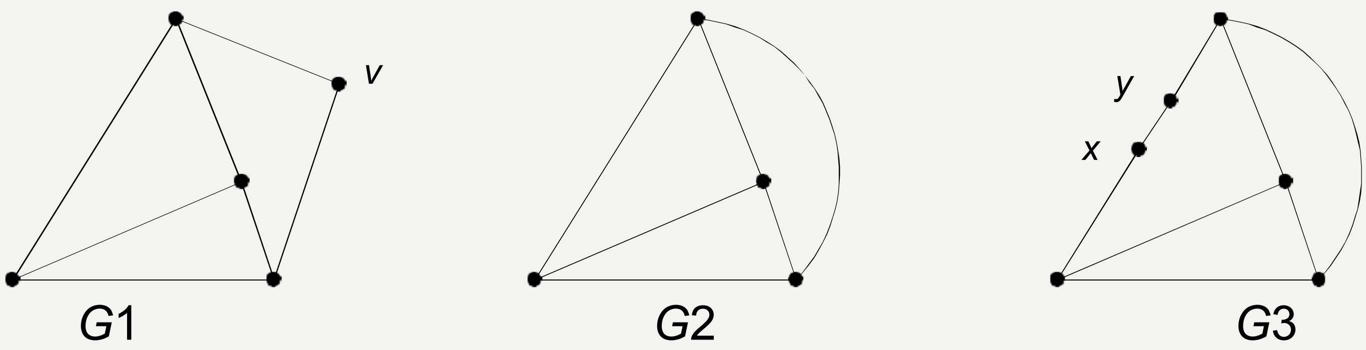
(b) dan (c) Graph Kuratowski kedua (keduanya isomorfik)

SIFAT GRAPH KURATOWSKI ADALAH:

- Kedua graph Kuratowski adalah graph teratur.
- Kedua graph Kuratowski adalah graph tidak-planar
- Penghapusan sisi atau simpul dari graph Kuratowski menyebabkannya menjadi graph planar.
- Graph Kuratowski pertama adalah graph tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graph Kuratowski kedua adalah graph tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

TEOREMA KURATOWSKI

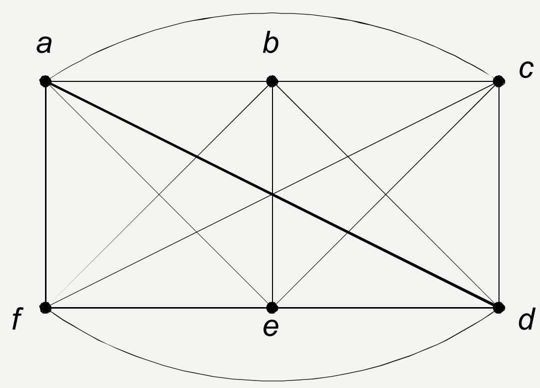
- Graph *G* bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraph yang sama dengan salah satu graph Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



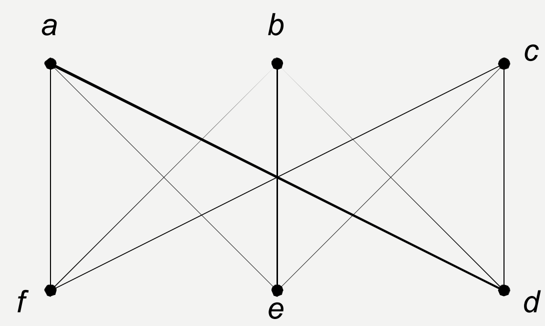
Tiga buah graph yang homemorfik satu sama lain

TEOREMA KURATOWSKI

- Graph di bawah ini bukan graph planar karena mengandung upagraph (*G*1) yang sama dengan $K_{3,3}$.



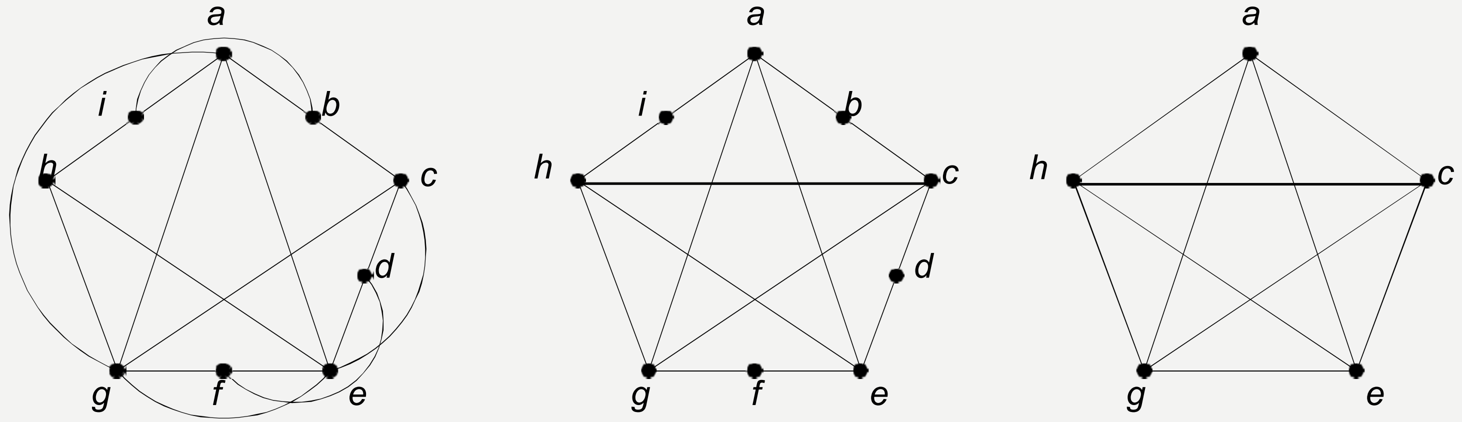
G



G_1

TEOREMA KURATOWSKI

- *G* tidak planar karena mengandung upagraph (*G*1) yang homeomorfik dengan *K*5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari *G*1, diperoleh *K*5).



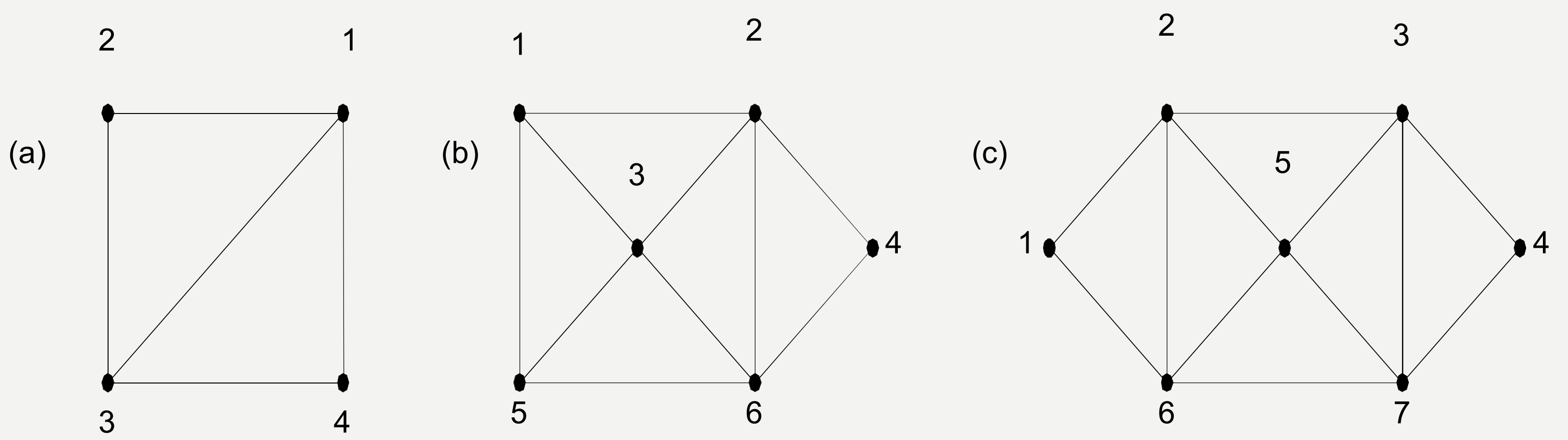
G *G*1 *K*5

LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- **Lintasan Euler** ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graph tepat satu kali.
- **Sirkuit Euler** ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali.
- Graph yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graph Euler** (*Eulerian graph*). Graph yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graph **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).

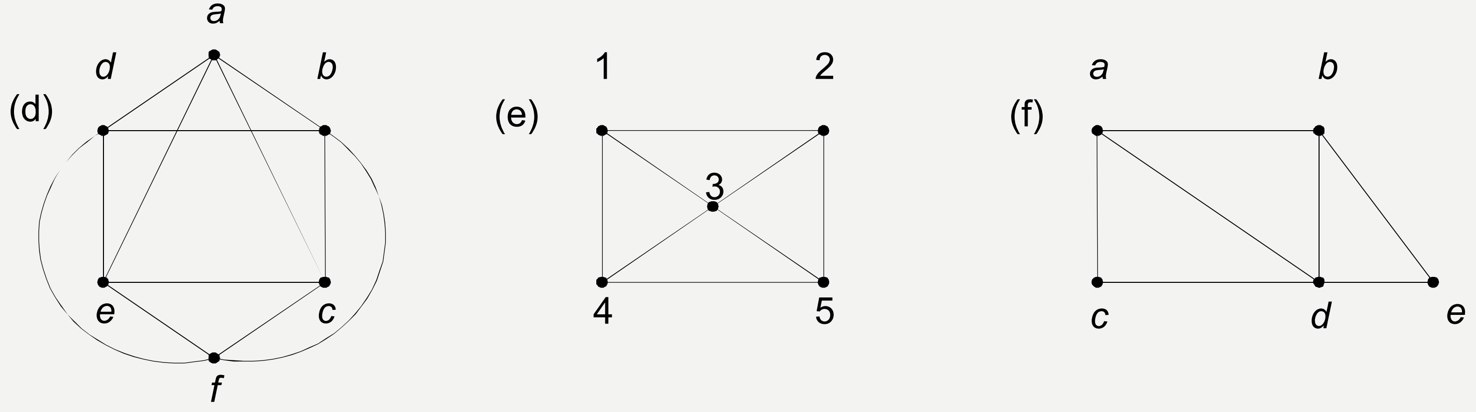
LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- Lintasan Euler pada graph (a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1
- Lintasan Euler pada graph (b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3
- Sirkuit Euler pada graph (c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6,1



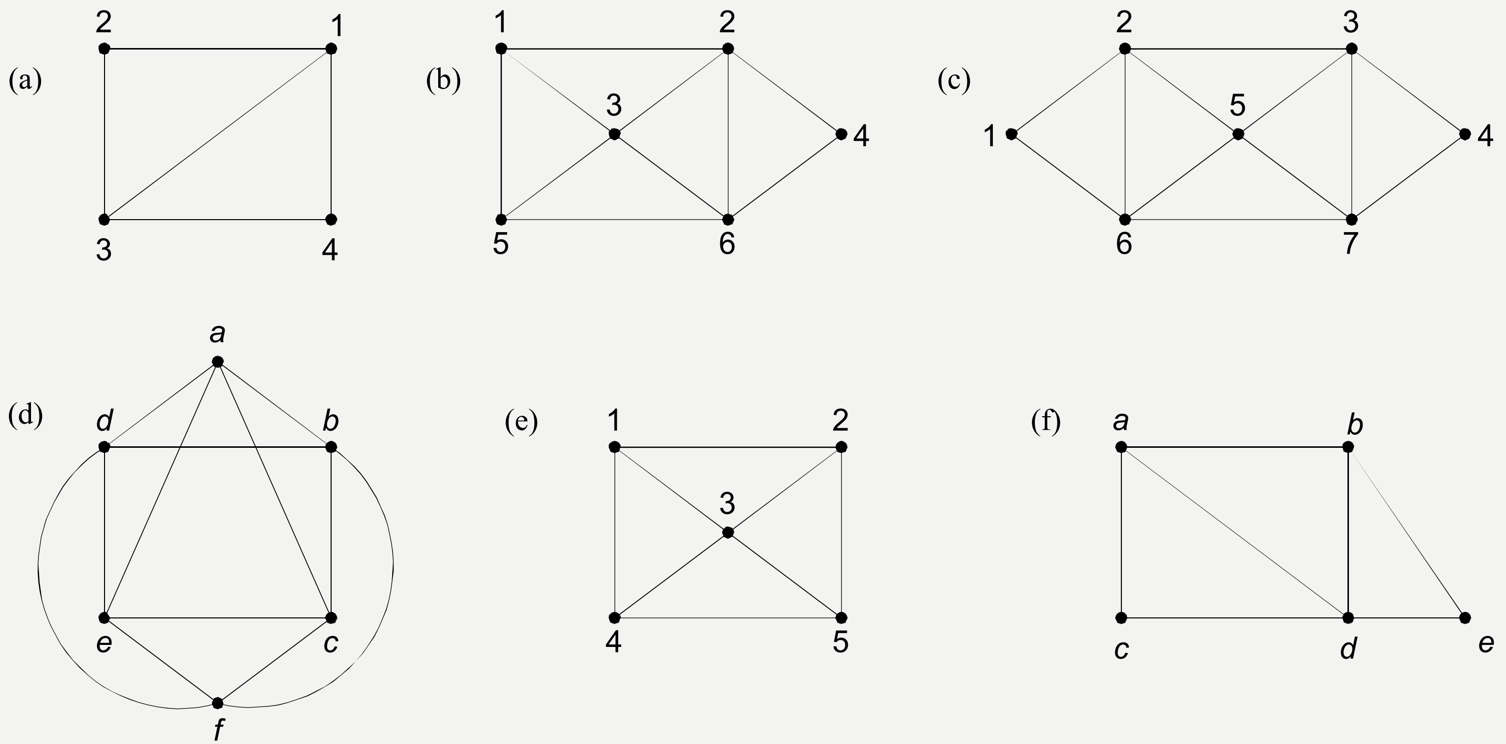
LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- Sirkuit Euler pada graph (d) : *a*, *c*, *f*, *e*, *c*, *b*, *d*, *e*, *a*, *d*, *f*, *b*, *a*
- Graph (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler



LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- (a) dan (b) graph semi-Euler (c) dan (d) graph Euler
- (e) dan (f) bukan graph semi-Euler atau graph Euler



TEOREMA

- Graph tidak berarah memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali

TEOREMA

- Graph tidak berarah *G* adalah graph Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap.

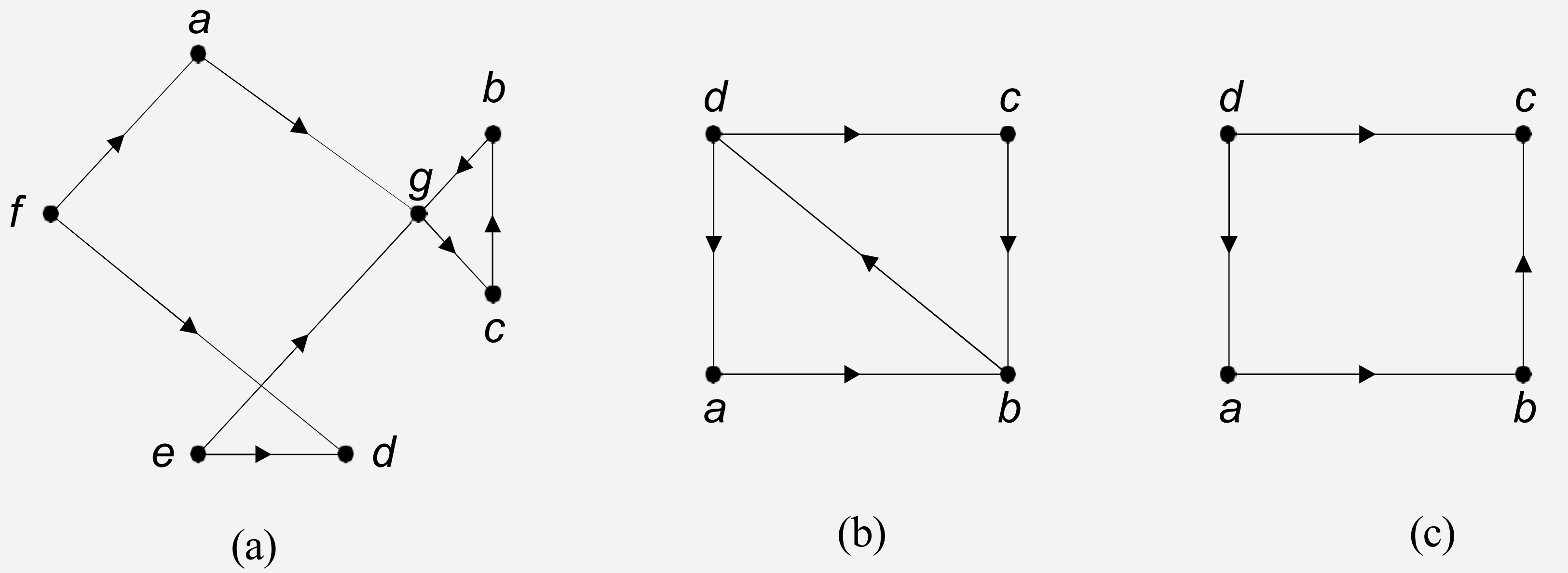
- (Catatlah bahwa graph yang memiliki sirkuit Euler pasti mempunyai lintasan Euler, tetapi tidak sebaliknya)

TEOREMA

- Graph berarah *G* memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika *G* terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama. *G* memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika *G* terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.

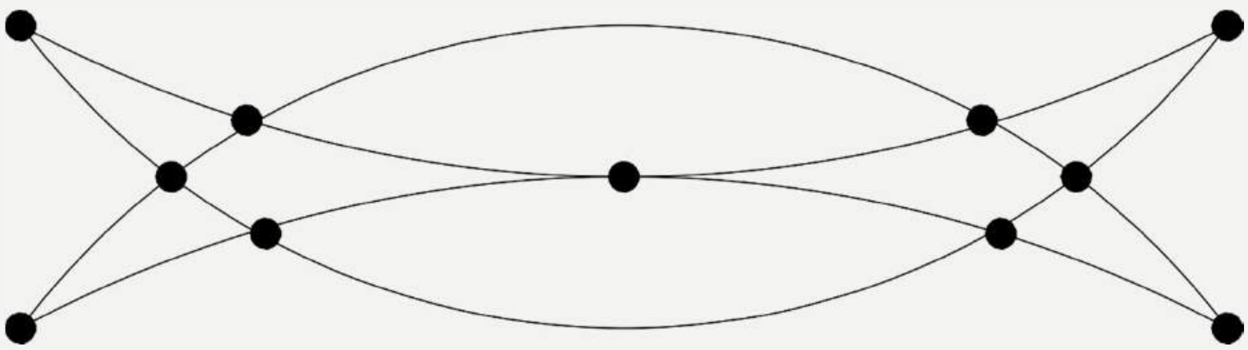
LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- (a) Graph berarah Euler (*a*, *g*, *c*, *b*, *g*, *e*, *d*, *f*, *a*)
- (b) Graph berarah semi-Euler (*d*, *a*, *b*, *d*, *c*, *b*)
- (c) Graph berarah bukan Euler maupun semi-Euler



LINTASAN DAN SIRKUIT EULER

- Bulan sabit Muhammad



LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON

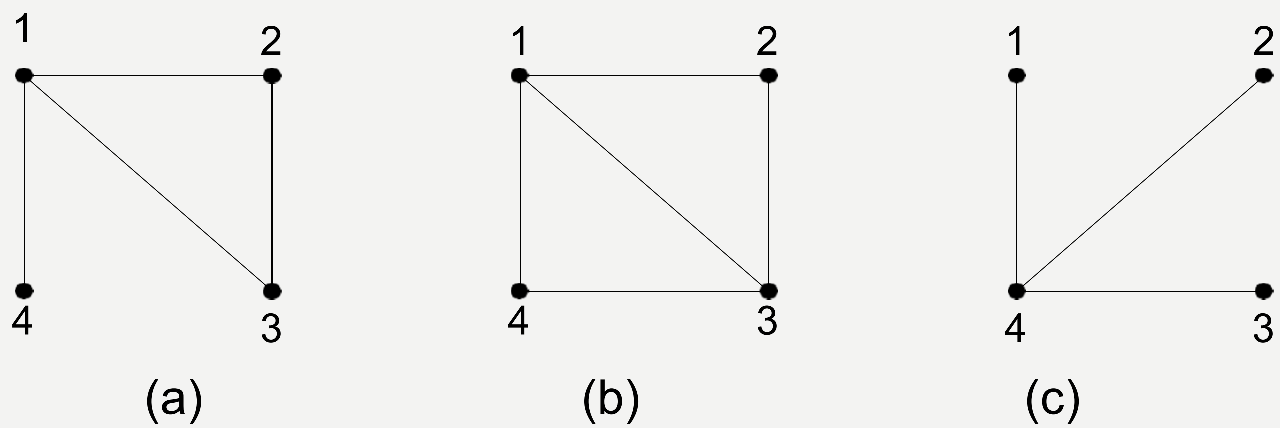
- **Lintasan Hamilton** ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graph tepat satu kali.
- **Sirkuit Hamilton** ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graph tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.
- Graph yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graph Hamilton**, sedangkan graph yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graph semi-Hamilton**.

LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON

(a)graph yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)

(b) graph yang memiliki lintasan Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)

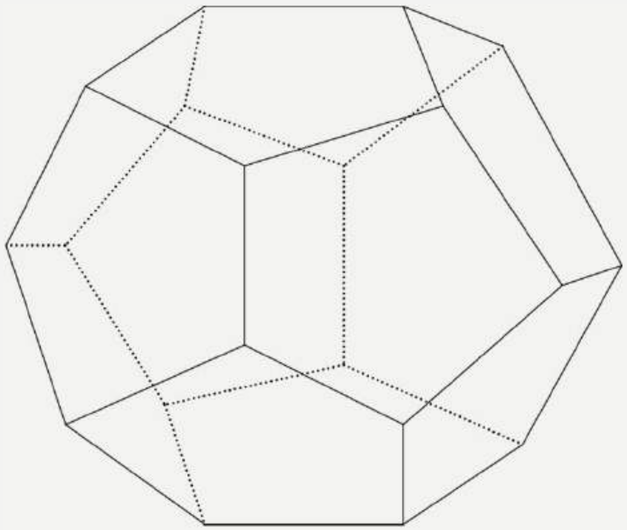
(c)graph yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton



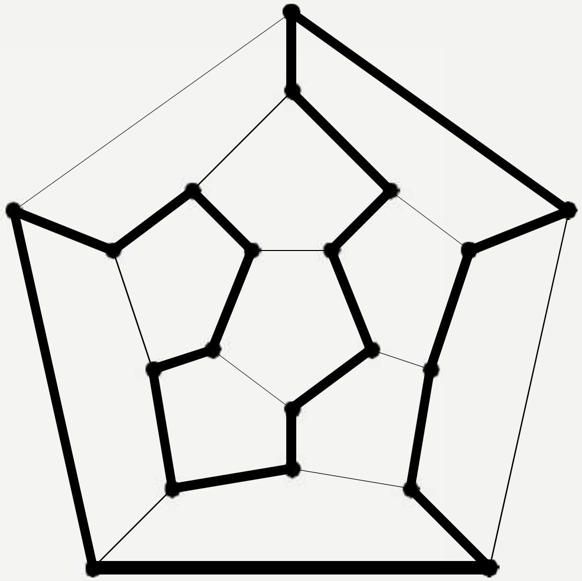
LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON

(a) Dodecahedron Hamilton

(b) graph yang mengandung sirkuit Hamilton



(a)



(b)

TEOREMA

- Syarat cukup (jadi bukan syarat perlu) supaya graph sederhana G dengan n ($\geq$ 3) buah simpul adalah graph Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit n/2 (yaitu, d(v) $\geq$ n/2 untuk setiap simpul v di G).

TEOREMA

- Setiap graph lengkap adalah graph Hamilton
-
- Di dalam graph lengkap *G* dengan *n* buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

TEOREMA

- Di dalam graph lengkap *G* dengan *n* buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat

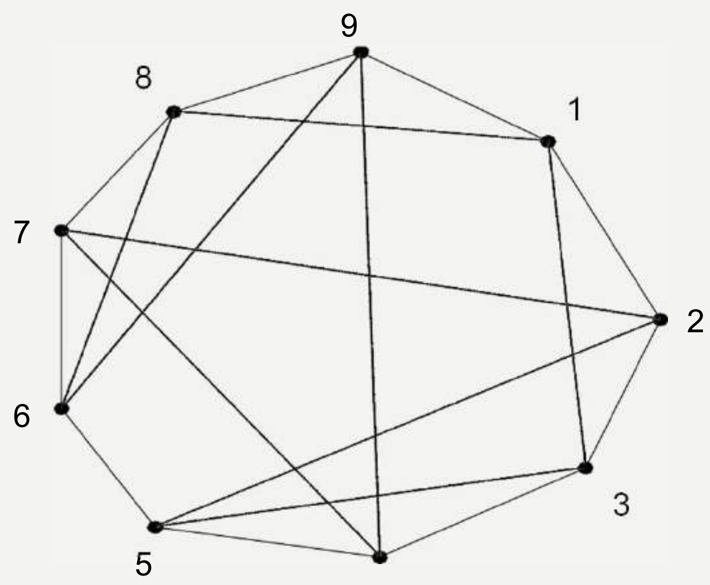
  $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika *n* genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

CONTOH

(Persoalan pengaturan tempat duduk). Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $(9 - 1)/2 = 4$.

LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON



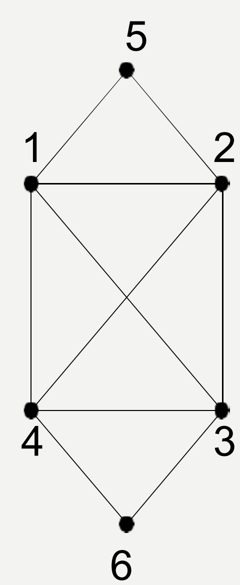
- Graph yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON/ EULER

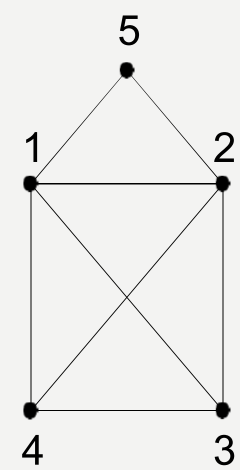
- Beberapa graph dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, mengandung sirkuit Euler dan lintasan Hamilton, mengandung lintsan Euler maupun lintasan Hamilton, tidak mengandung lintasan Euler namun mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya!).

LINTASAN DAN SIRKUIT HAMILTON/ EULER

- Graph (a) mengandung sirkuit Hamilton maupun sirkuit Euler
- graph (b) mengandung sirkuit Hamilton dan lintasan Euler (periksa!).



(a)



(b)

BEBERAPA APLIKASI GRAF

a. Lintasan Terpendek (*Shortest Path)*

- graf berbobot (*weighted graph*),
- lintasan terpendek: lintasan yang memiliki total bobot minimum.

Contoh aplikasi:

- Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
- Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (*message*) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.

LINTASAN TERPENDEK

Terdapat beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:

- Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
- Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
- Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
- Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

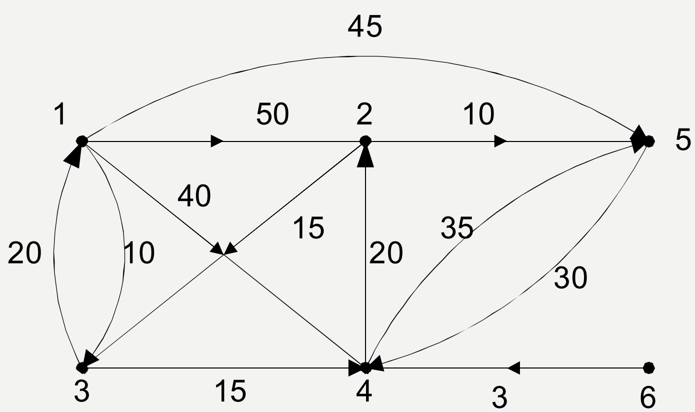
==> Di dalam kuliah ini kita memilih jenis persoalan 3.

LINTASAN TERPENDEK

- Uraian persoalan
- Diberikan graf berbobot $G = (V, E)$ dan sebuah simpul a. Tentukan lintasan terpendek dari a ke setiap simpul lainnya di G. Asumsi yang kita buat adalah bahwa semua sisi berbobot positif.

LINTASAN TERPENDEK

- Graph



Simpul asal	Simpul Tujuan	Lintasan terpendek	Ja a r k
1	3	$1 \rightarrow 3$	10
1	4	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$	25
1	2	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$	45
1	5	$1 \rightarrow 5$	45
1	6	tidak ada	-

ALGORITMA DIJKSTRA

Merupakan Algoritma menentukan lintasan terpendek yang terkenal.

Properti algoritma Dijkstra:

1. Matriks ketetanggaan $M[m_{ij}]$

   m_{ij} = bobot sisi (i, j) (pada graf tak-berarah $m_{ij} = m_{ji}$)

   m_{ii} = 0

   m_{ij} = ∞, jika tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j

2. Larik $S = [s_i]$ yang dalam hal ini,

   s_i = 1, jika simpul i termasuk ke dalam lintasan terpendek

   s_i = 0, jika simpul i tidak termasuk ke dalam lintasan terpendek

3. Larik/tabel $D = [d_i]$ yang dalam hal ini,

   d_i = panjang lintasan dari simpul awal s ke simpul i

BEBERAPA APLIKASI GRAF

b. Persoalan Perjalanan Pedagang (*Travelling Salesperson Problem* - TSP)

- Diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

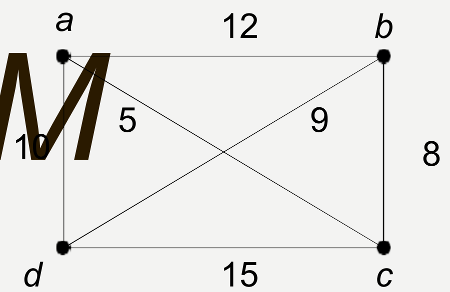
==> menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

APLIKASI TSP

- Pak Pos mengambil surat di kotak pos yang tersebar pada *n* buah lokasi di berbagai sudut kota.
- Lengan robot mengencangkan *n* buah mur pada beberapa buah peralatan mesin dalam sebuah jalur perakitan.
- Produksi *n* komoditi berbeda dalam sebuah siklus.

TRAVELLING SALESPERSON PROBLEM

- Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: $(n - 1)!/2$.

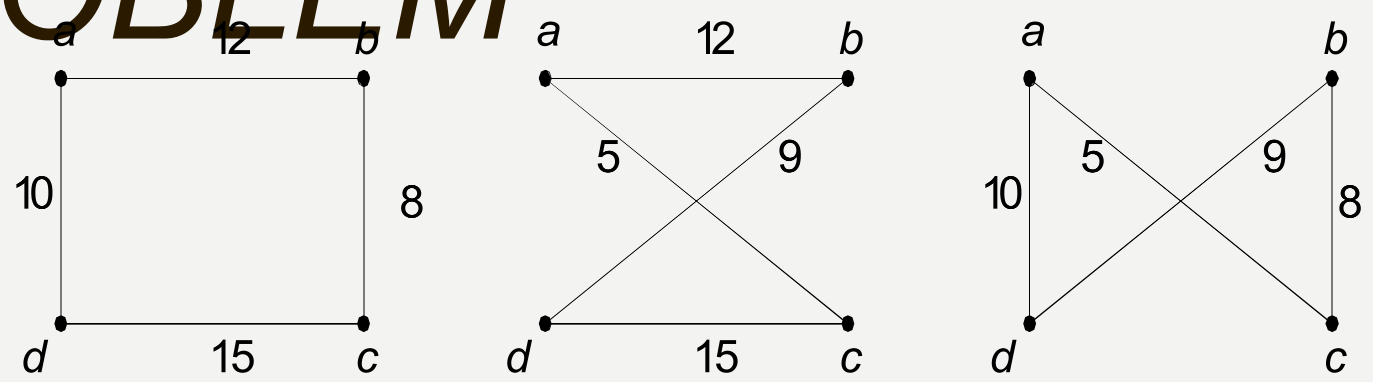


- Graf di atas memiliki $(4 – 1)!/2 = 3$ sirkuit Hamilton, yaitu:

$I_1 = (a, b, c, d, a)$ atau (a, d, c, b, a) ==> panjang = 10 + 12 + 8 + 15 = 45
$I_2 = (a, c, d, b, a)$ atau (a, b, d, c, a) ==> panjang = 12 + 5 + 9 + 15 = 41
$I_3 = (a, c, b, d, a)$ atau (a, d, b, c, a) ==> panjang = 10 + 5 + 9 + 8 = 32

TRAVELLING SALESPERSON PROBLEM

- Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah I3 = (*a*, *c*, *b*, *d*, *a*) atau (*a*, *d*, *b*, *c*, *a*) dengan panjang sirkuit = 10 + 5 + 9 + 8 = 32.



- Jika jumlah simpul n = 20 akan terdapat (19!)/2 sirkuit Hamilton atau sekitar 6×10^{16} penyelesaian.

BEBERAPA APLIKASI GRAF

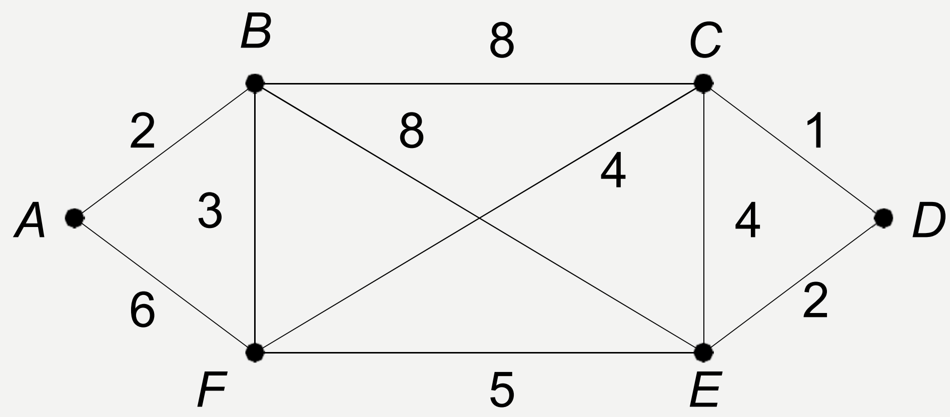
c. Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

- Dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962.
- Masalahnya adalah sebagai berikut: *seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.*

===> menentukan sirkuit Euler di dalam graf.

CHINESE POSTMAN PROBLEM

- Lintasan yang dilalui tukang pos: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *C*, *E*, *B*, *F*, *A*.



PEWARNAAN GRAPH

- Sebuah pewarnaan dari graph G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke simpul-simpul dari G sedemikian hingga simpul relasinya mempunyai warna warna yang berbeda.

BILANGAN KROMATIK

- Bilangan kromatik dari G adalah jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai graph G, dilambangkan dgn (G) { adalah huruf Yunani chi }
- Berapa bilangan kromatik dari graph lengkap K_6, K_{10} dan K_n ?

$$(Kn) = n$$

ALGORITMA WELCH-POWELL

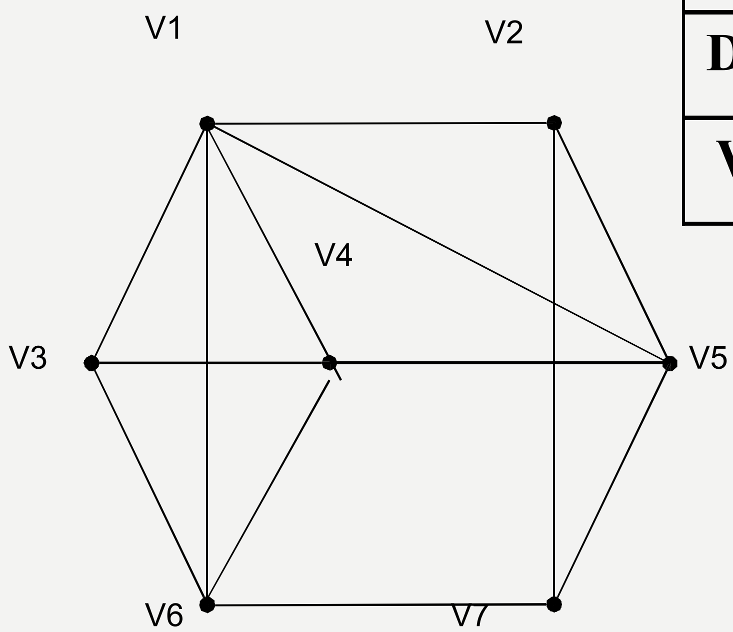
Algoritma Welch-Powell adalah sebuah cara efisien untuk mewarnai sebuah graph G

Algoritma Welch-Powell :

- Urutkan simpul-simpul G dalam derajat yang menurun. Urutan ini mungkin tidak unik karena bbrp simpul mempunyai derajat sama
- Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama dan untuk mewarnai, dalam urutan yang berurut setiap simpul dari daftar yang tidak berelasi dengan simpul sebelumnya.
- Mulai lagi dengan dengan daftar paling tinggi dan ulangi proses pewarnaan simpul yang tidak berwarna sebelumnya dengan menggunakan warna kedua.
- Terus ulangi dengan penambahan warna sampai semua simpul telah diwarnai

CONTOH

Graph H

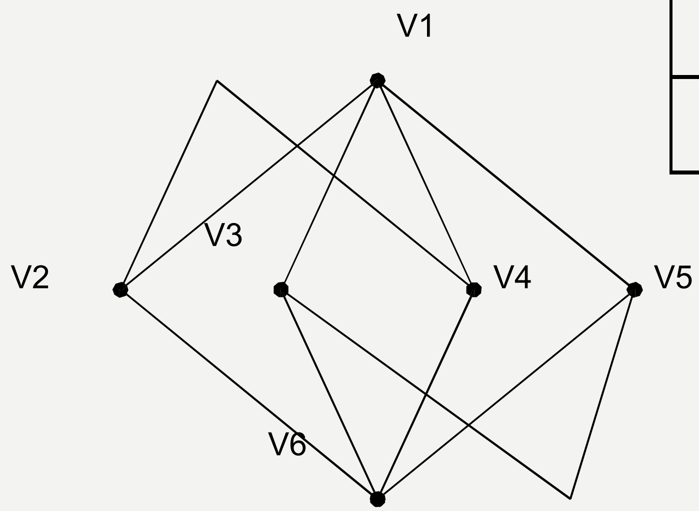


Simpul	V1	V4	V5	V6	V2	V3	V7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	a	b	c	d	b	c	a

Jadi $\chi(H) = 4$

CONTOH

- Graph G

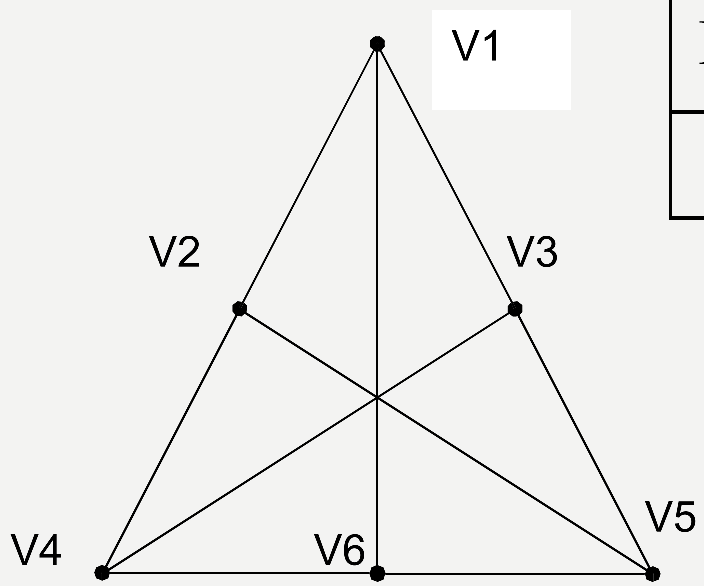


Simpul	V1	V6	V2	V3	V4	V5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	a	a	b	b	c	c

Jadi $\chi(G) = 3$

CONTOH

- Graph H

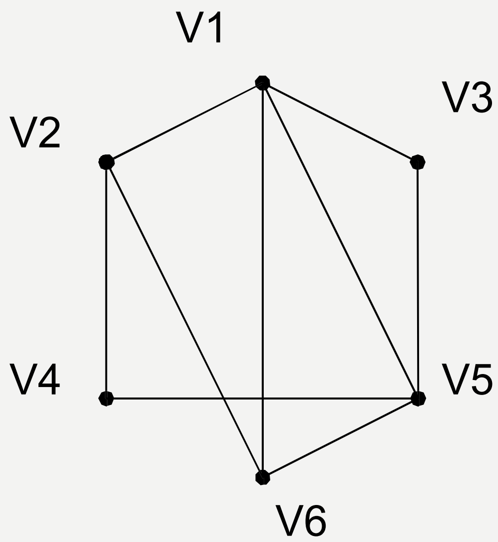


Simpul	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Derajat	3	3	3	3	3	3
Warna	a	b	b	a	a	b

Jadi $\chi(H) = 2$

CONTOH

- Graph G

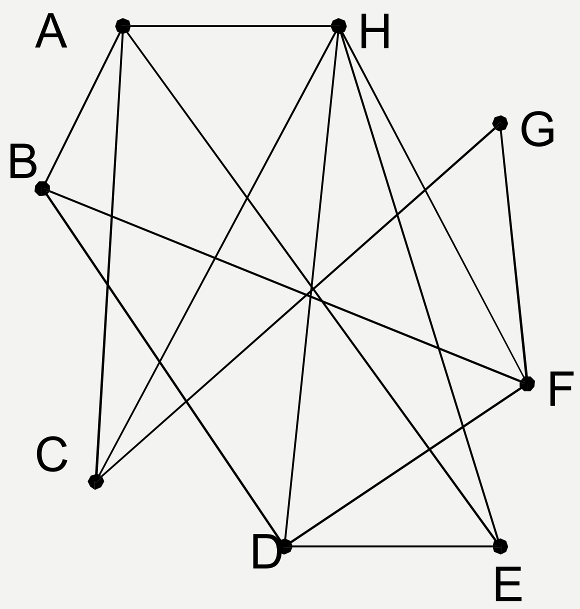


Simpul	V1	V5	V2	V6	V3	V4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	a	b	b	c	c	a

Jadi $\chi(G) = 3$

CONTOH

- Graph H

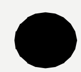


Simpul	H	A	D	F	B	C	E	G
Derajat	5	4	4	4	3	3	3	2
Warna	a	b	b	c	a	c	c	a

Jadi $\chi(H) = 3$

CONTOH

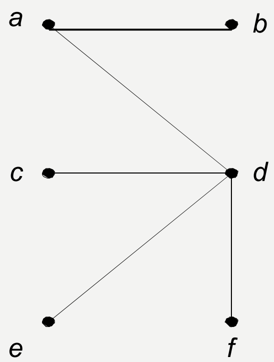
- Adakah graph dengan 1 warna????



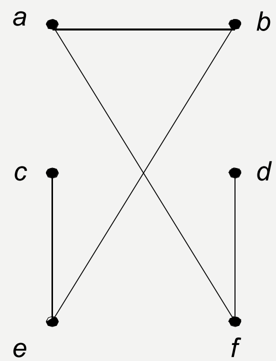
TREE GRAF

POHON

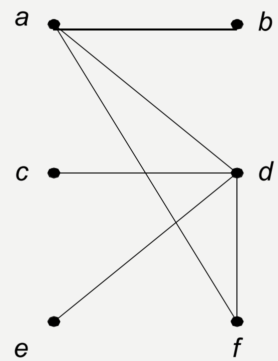
adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit



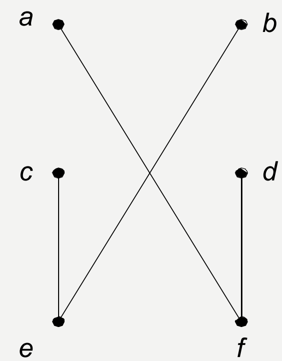
pohon



pohon



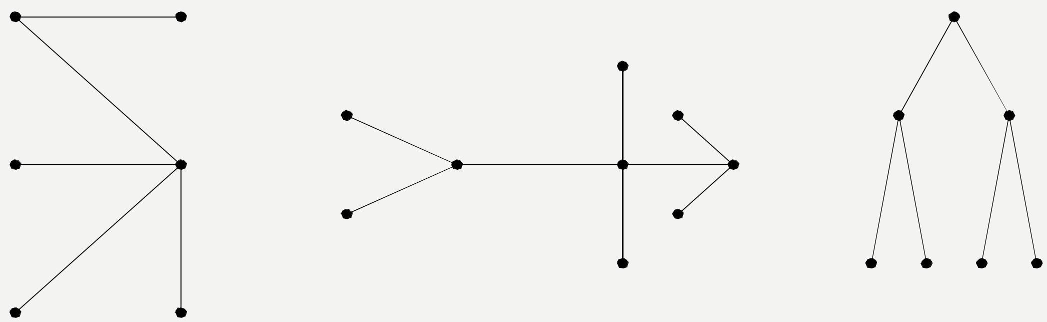
bukan pohon



bukan pohon

HUTAN (*FOREST*)

- kumpulan pohon yang saling lepas
- graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon.



Hutan yang terdiri dari tiga buah pohon

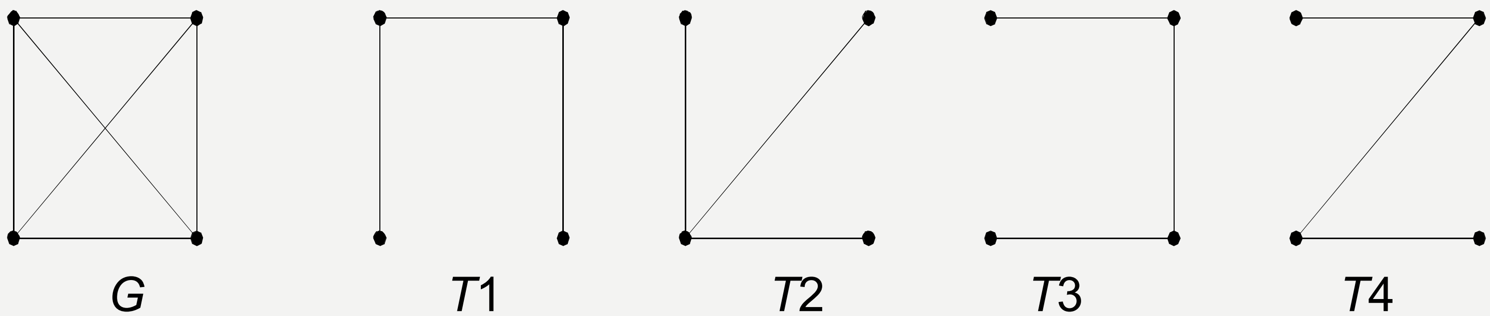
SIFAT-SIFAT POHON

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n. Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekivalen:

- G adalah pohon.
- Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
- G terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
- G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
- G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
- G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan.

POHON MERENTANG (*SPANNING TREE*)

- Pohon merentang dari graf terhubung adalah upagraf merentang yang berupa pohon.
- Pohon merentang diperoleh dengan memutus sirkuit di dalam graf.

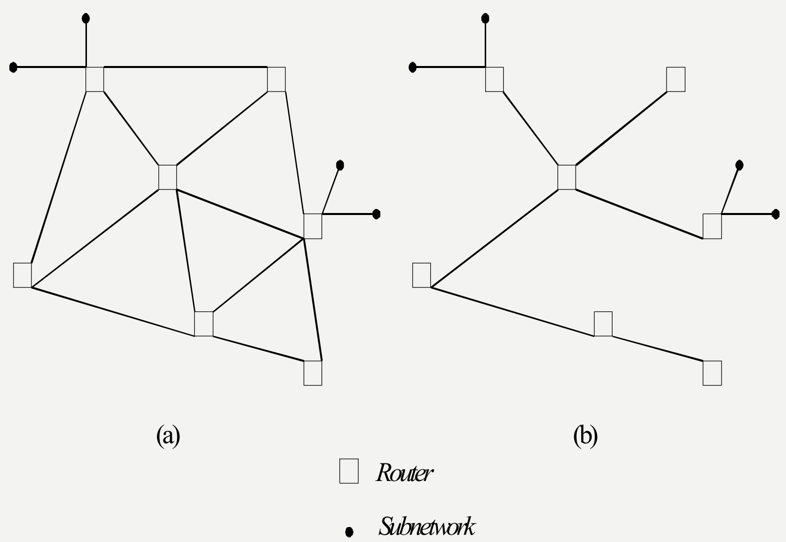


- Setiap graf terhubung mempunyai paling sedikit satu buah pohon merentang.
- Graf tak-terhubung dengan *k* komponen mempunyai *k* buah hutan merentang yang disebut hutan merentang (*spanning forest*).

APLIKASI POHON MERENTANG

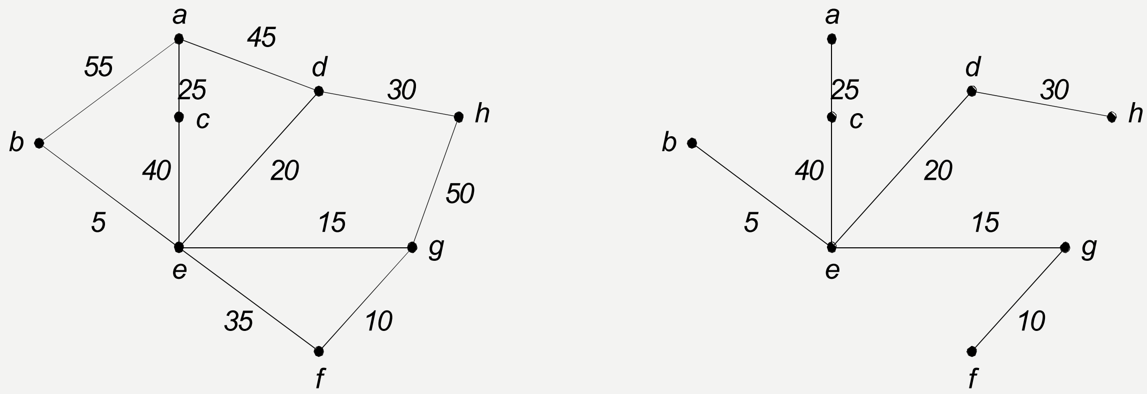
- Jalan-jalan seminimum mungkin yang menghubungkan semua kota sehingga setiap kota tetap terhubung satu sama lain.
- Perutean (*routing*) pesan pada jaringan komputer.

- Contoh



POHON RENTANG MINIMUM

- Graf terhubung-berbobot mungkin mempunyai lebih dari 1 pohon merentang.
- Pohon rentang yang berbobot minimum –dinamakan **pohon merentang minimum** (*minimum spanning tree*).



ALGORITMA PRIM

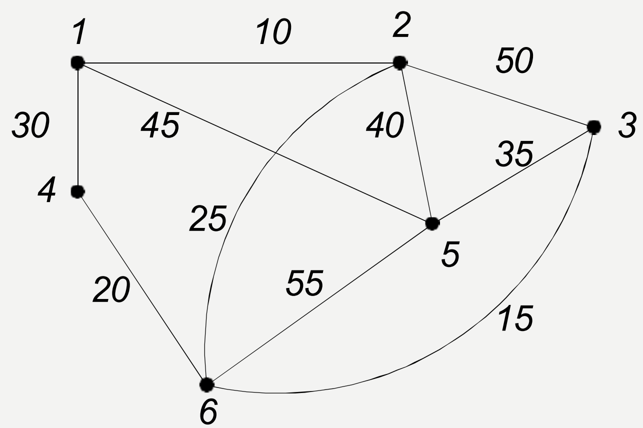
Langkah 1: ambil sisi dari graf *G* yang berbobot minimum, masukkan ke dalam *T*.

Langkah 2: pilih sisi (*u*, *v*) yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di *T*, tetapi (*u*, *v*) tidak membentuk sirkuit di *T*. Masukkan (*u*, *v*) ke dalam *T*.

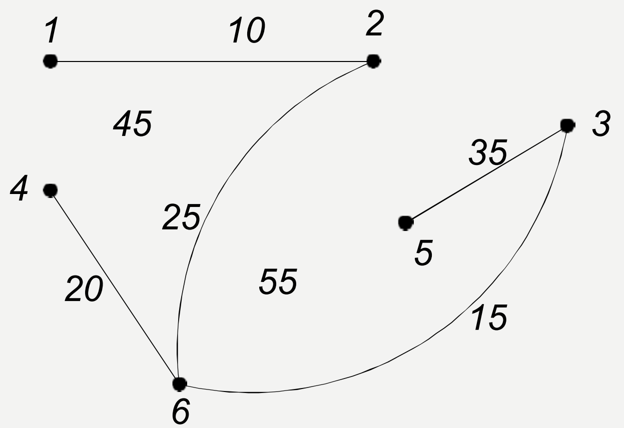
Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak *n* – 2 kali.

ALGORITMA PRIM

- Graph



- Pohon merentang minimum



ALGORITMA KRUSKAL

Langkah 0: sisi-sisi dari graf sudah diurut menaik berdasarkan bobotnya – dari bobot kecil ke bobot besar

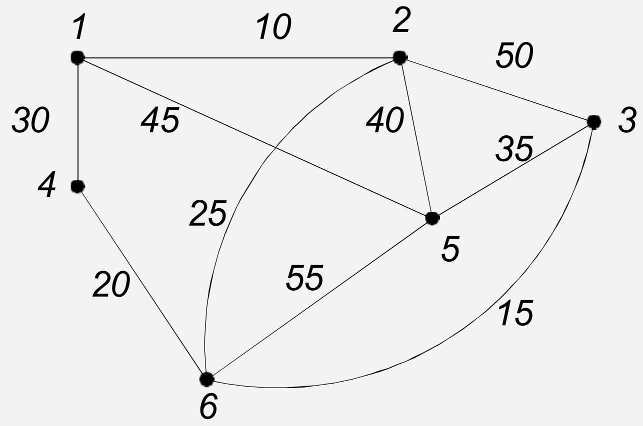
Langkah 1: *T* masih kosong

Langkah 2: pilih sisi (u, v) dengan bobot minimum yang tidak membentuk sirkuit di *T*. Tambahkan (u, v) ke dalam *T*.

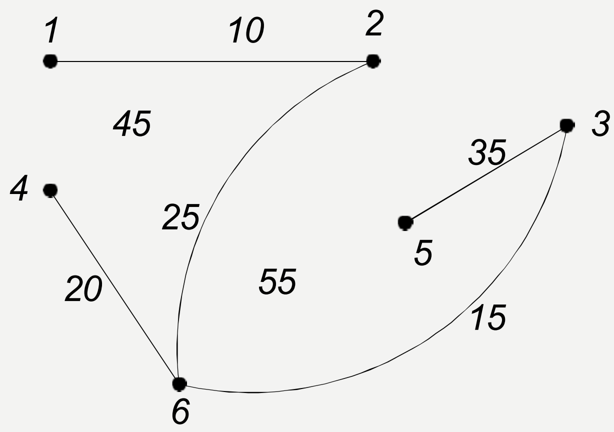
Langkah 3: ulangi langkah 2 sebanyak n – 1 kali.

ALGORITMA KRUSKAL

- Graph

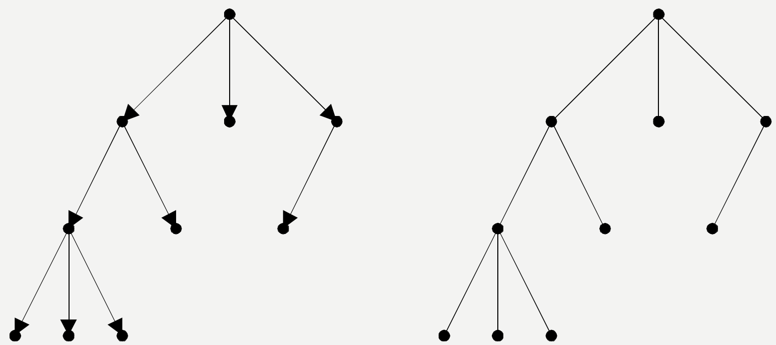


- Pohon merentang minimum



POHON BERAKAR

Pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah dinamakan **pohon berakar** (*rooted tree*).

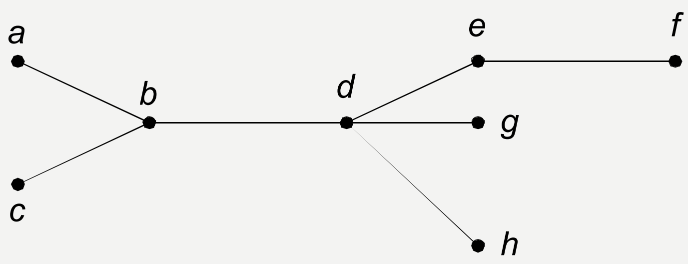


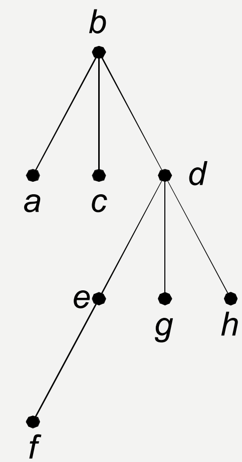
a
Pohon berakar

b
panah dibuang

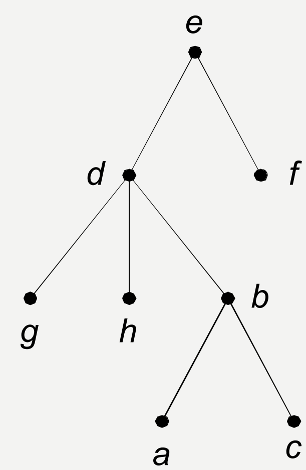
POHON BERAKAR

- Pohon dan dua buah pohon berakar yang dihasilkan dari pemilihan dua simpul berbeda sebagai akar





b sebagai akar



e sebagai akar

TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR

1. Anak (*child* atau *children*) dan Orangtua (*parent*)

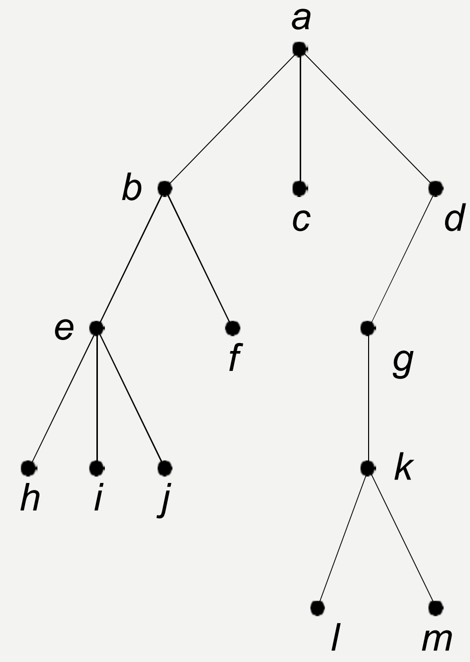
b, *c*, dan *d* adalah anak-anak simpul *a*,

a adalah orangtua dari anak-anak itu

2. Lintasan (*path*)

Lintasan dari *a* ke *j* adalah *a*, *b*, *e*, *j*.

Panjang lintasan dari *a* ke *j* adalah 3.



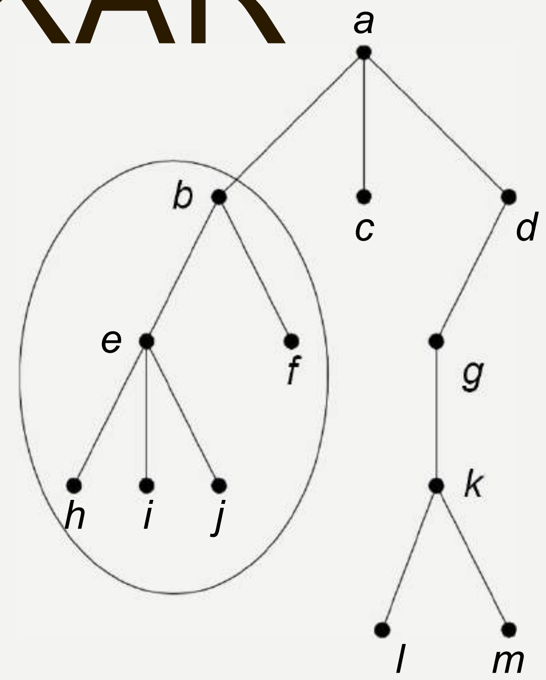
TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR

Saudara kandung (*sibling*)

f adalah saudara kandung *e*,

tetapi, *g* bukan saudara kandung *e*, karena orangtua mereka berbeda.

Upapohon (*subtree*)



TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR

- **Derajat (*degree*)**

Derajat sebuah simpul adalah jumlah upapohon (atau jumlah anak) pada simpul tersebut.

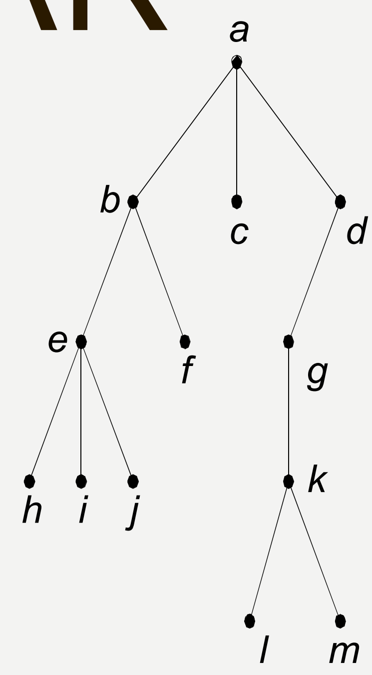
Derajat *a* adalah 3, derajat *b* adalah 2,

Derajat *d* adalah satu dan derajat *c* adalah 0.

Jadi, derajat yang dimaksudkan disini adalah derajat-keluar.

Derajat maksimum dari semua simpul merupakan derajat pohon itu sendiri.

Pohon di samping berderajat 3



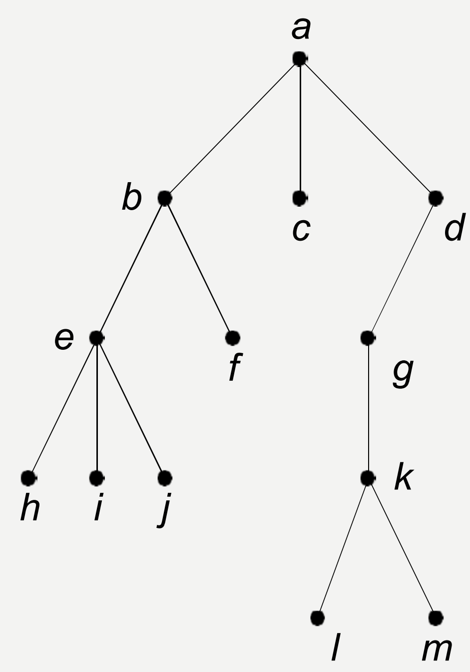
TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR

Daun (*leaf*)

- Simpul yang berderajat nol (atau tidak mempunyai anak) disebut **daun**.
- Simpul *h*, *i*, *j*, *f*, *c*, *l*, dan *m* adalah daun.

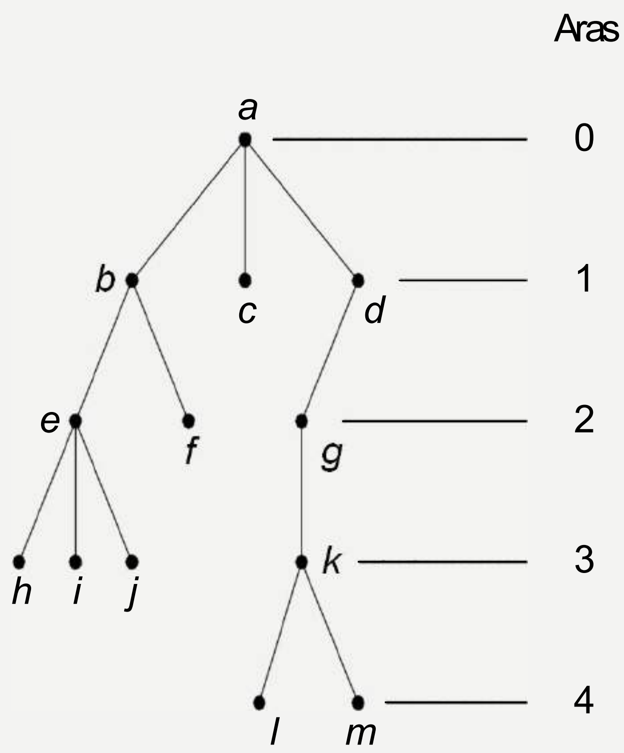
Simpul Dalam (*internal nodes*)

- Simpul yang mempunyai anak disebut **simpul dalam**.
- Simpul *b*, *d*, *e*, *g*, dan *k* adalah simpul dalam.



TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR

- **Aras (*level*) atau Tingkat**

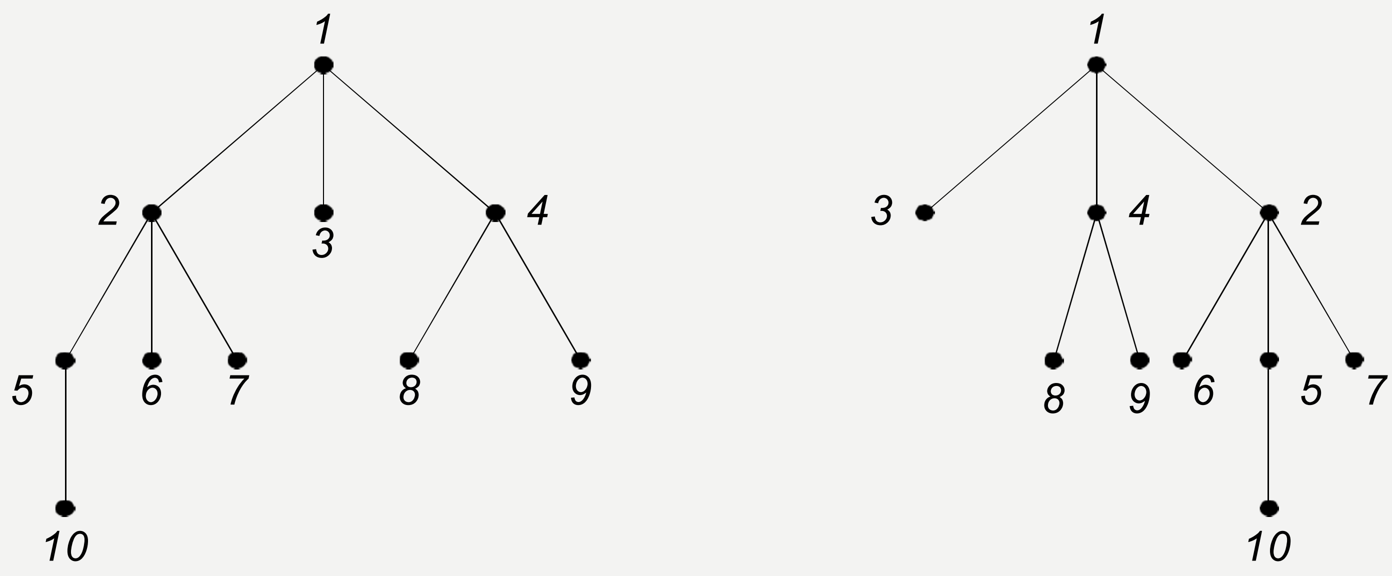


- **Tinggi (*height*) atau Kedalaman (*depth*)**

Aras maksimum dari suatu pohon disebut **tinggi** atau **kedalaman** pohon tersebut. Pohon di sebelah mempunyai tinggi 4.

POHON TERURUT

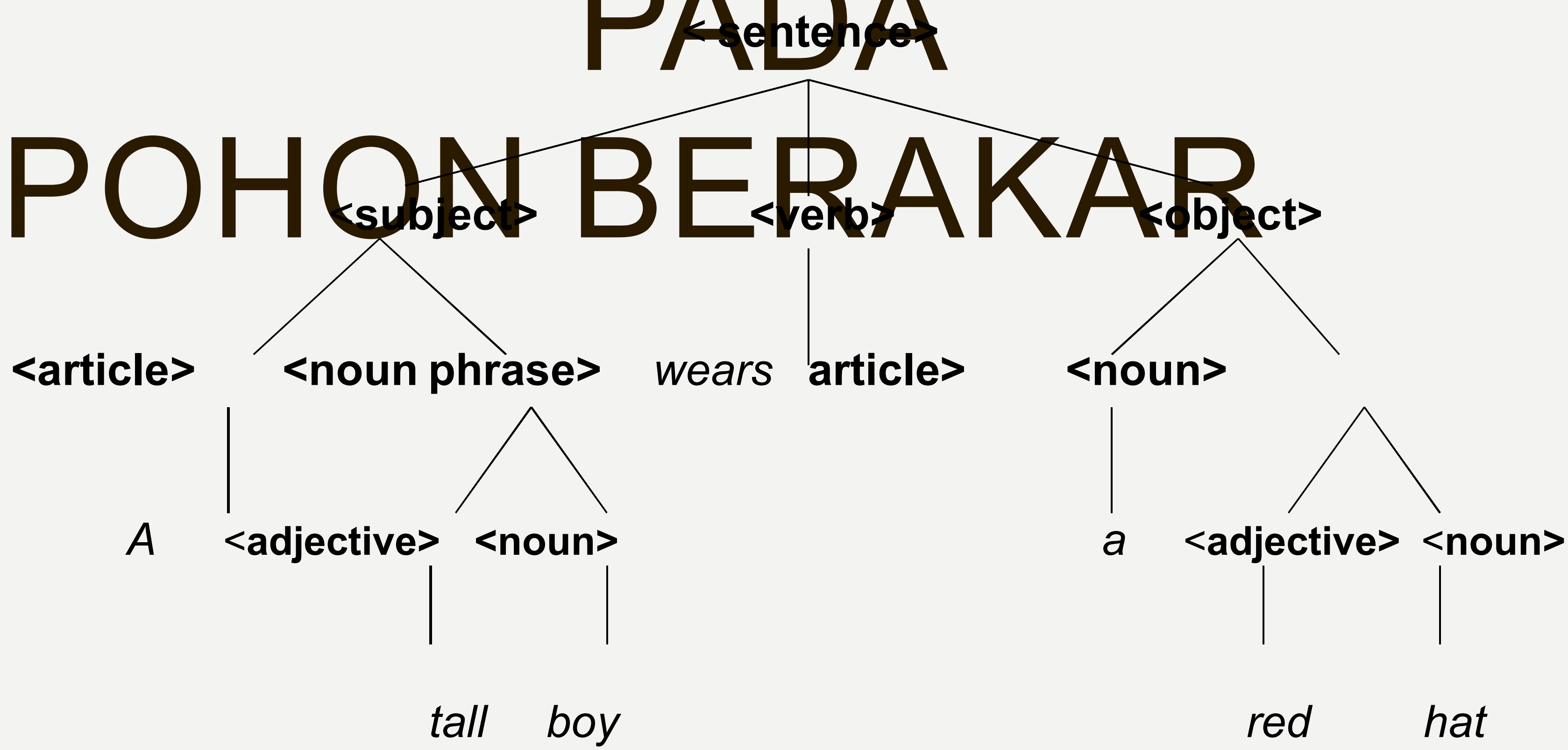
Pohon berakar yang urutan anak-anaknya penting disebut **pohon terurut** (*ordered tree*).



POHON *M-ARY*

- Pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak *m* buah anak disebut **pohon *m-ary***.
- Jika *m* = 2, pohonnnya disebut **pohon biner** (*binary tree.*
- Pohon *m-ary* dikatakan **teratur** atau **penuh** (*full*) jika setiap simpul cabangnya mempunyai tepat *m* anak.

TERMINOLOGI PADA POHON BERAKAR



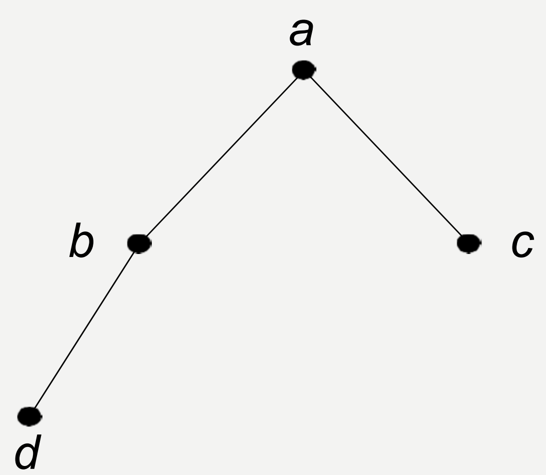
Pohon parsing dari kalimat A tall boy wears a red hat

POHON *M-ARY* TERATUR

- **Jumlah daun pada pohon n-ary teratur dengan tinggi h adalah n^h**
- **Jumlah seluruh simpul pada pohon n-ary teratur dengan tinggi h**

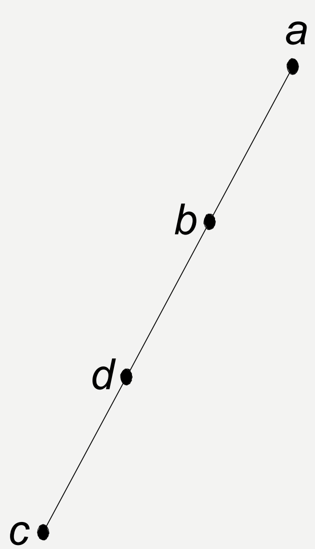
$$S = n^0 + n^1 + n^2 + \ldots\ldots + n^h = \frac{n^{h+1} - 1}{n - 1}$$

POHON BINER

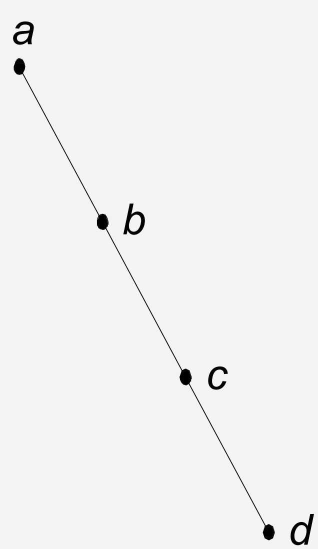


Gambar Dua buah pohon biner yang berbeda

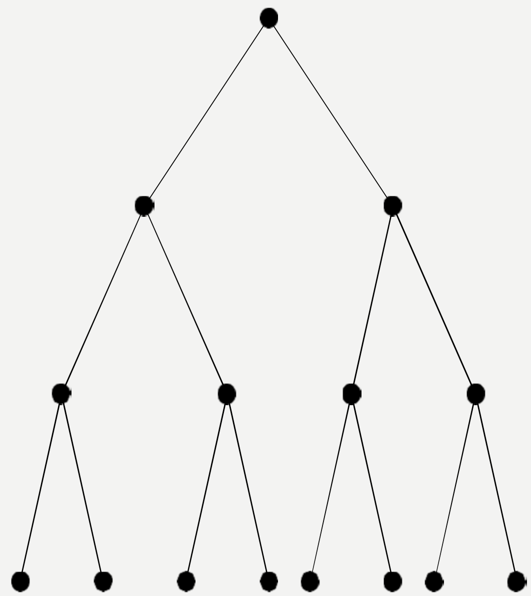
POHON BINER



Pohon condong-kiri



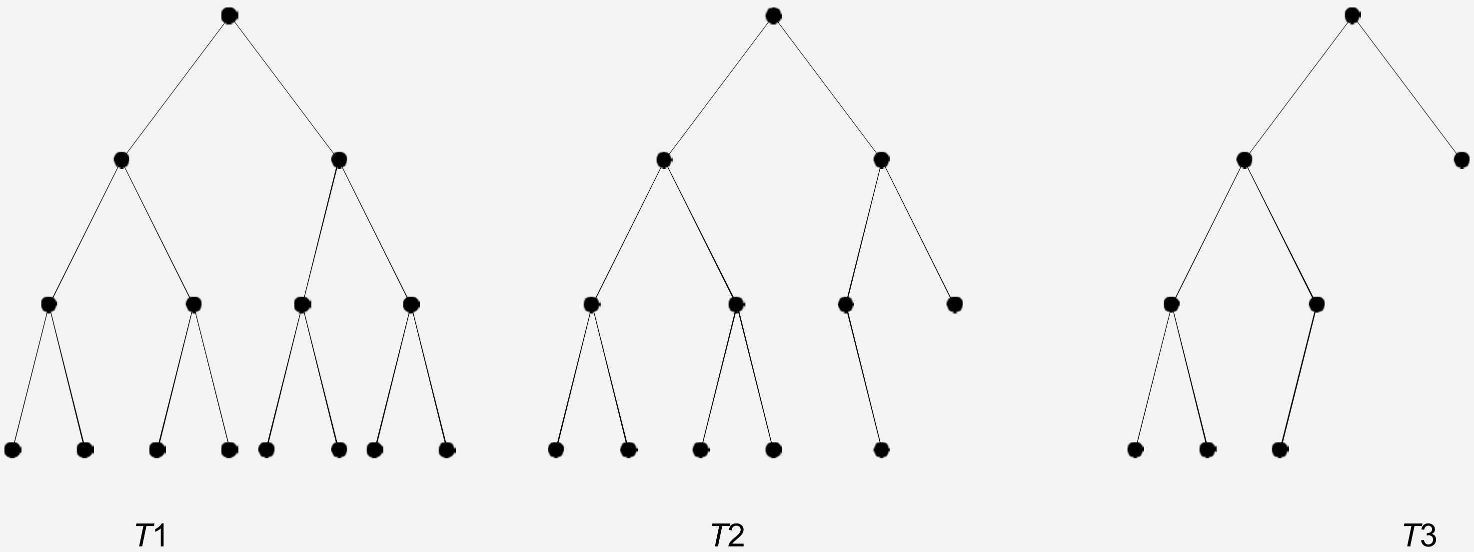
pohon condong kanan



Pohon biner penuh

POHON BINER SEIMBANG

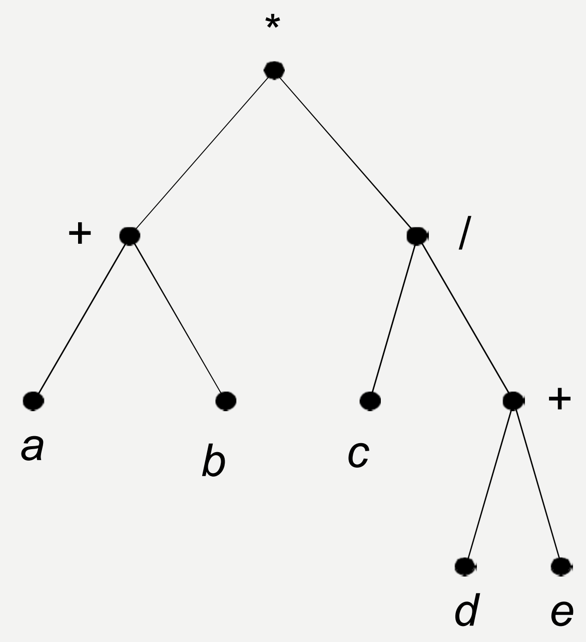
- Pada beberapa aplikasi, diinginkan tinggi upapohon kiri dan tinggi upapohon kanan yang seimbang, yaitu berbeda maksimal 1.



*T*1 dan *T*2 adalah pohon seimbang, sedangkan *T*3 bukan pohon seimbang.

TERAPAN POHON BINER

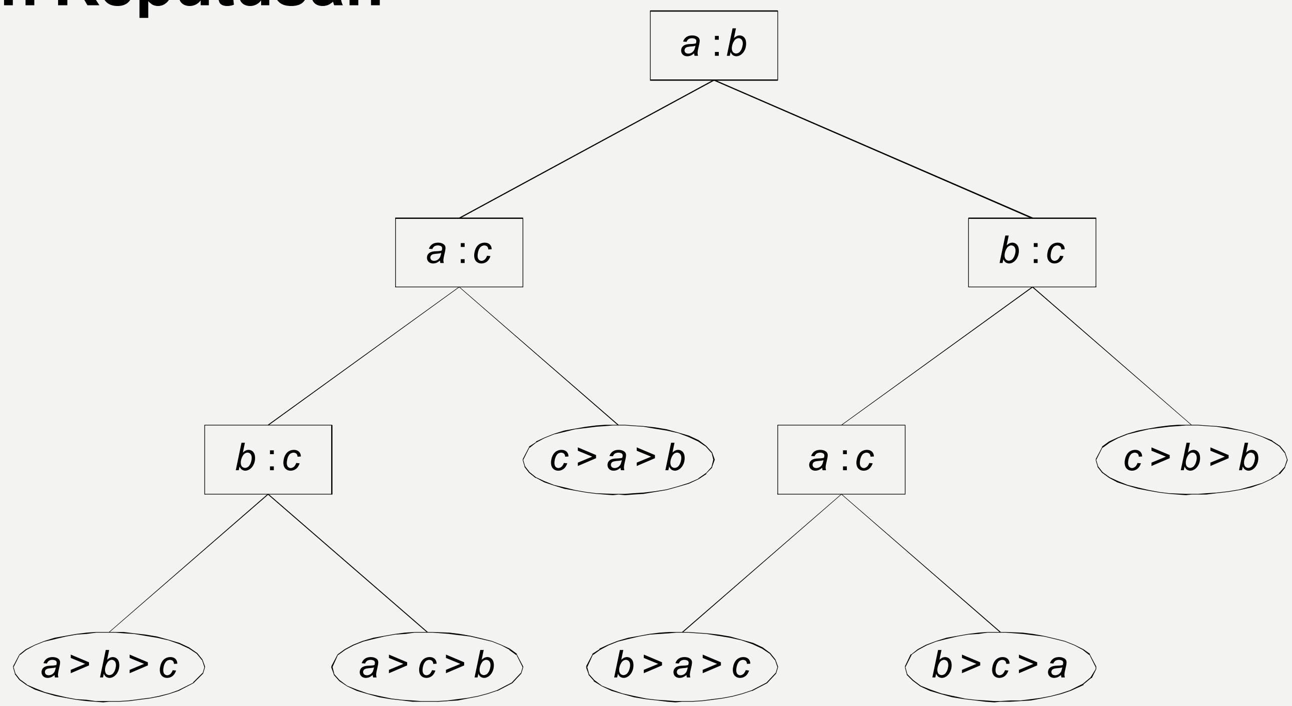
- **Pohon Ekspresi**



Pohon ekspresi dari (*a* + *b*)*(*c*/(*d* + *e*))

TERAPAN POHON BINER

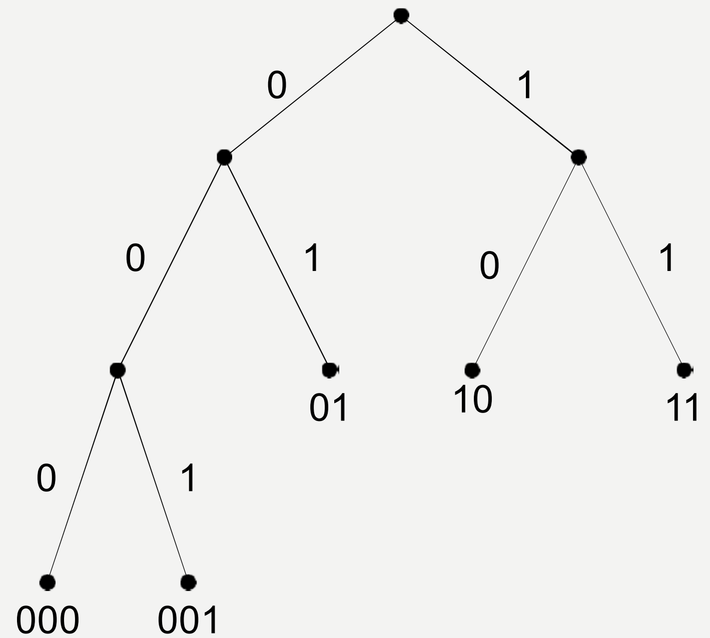
- **Pohon Keputusan**



Pohon keputusan untuk mengurutkan 3 buah elemen

TERAPAN POHON BINER

- **Kode Awalan**



Pohon biner dari kode prefiks { 000, 001, 01, 10, 11}

TERAPAN POHON BINER

- **Kode Huffman**
- rangkaian bit untuk string ‘*ABACCDA*’: 0100000101000001001000 001010000011010000001 10001000100000 1
- atau 7 × 8 = 56 bit (7 *byte*).

Simbol	Kode ASCII
A	1000001
B	1000010
C	1000011
D	1000100

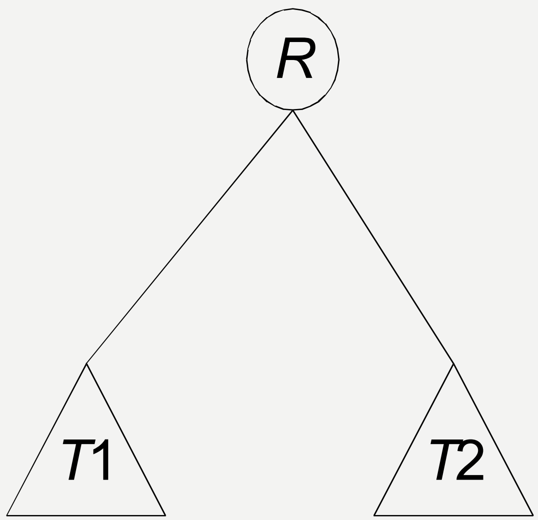
TERAPAN POHON BINER

- **Kode Huffman**
- rangkaian bit untuk *’ABACCDA’*:
- 0110010101110
- hanya 13 bit!

Simbol	Kekerapan	PeLuang	Kode Huffman
A	3	3/7	0
B	1	1/7	110
C	2	2/7	10
D	1	1/7	111

TERAPAN POHON BINER

- **Pohon Pencarian Biner**

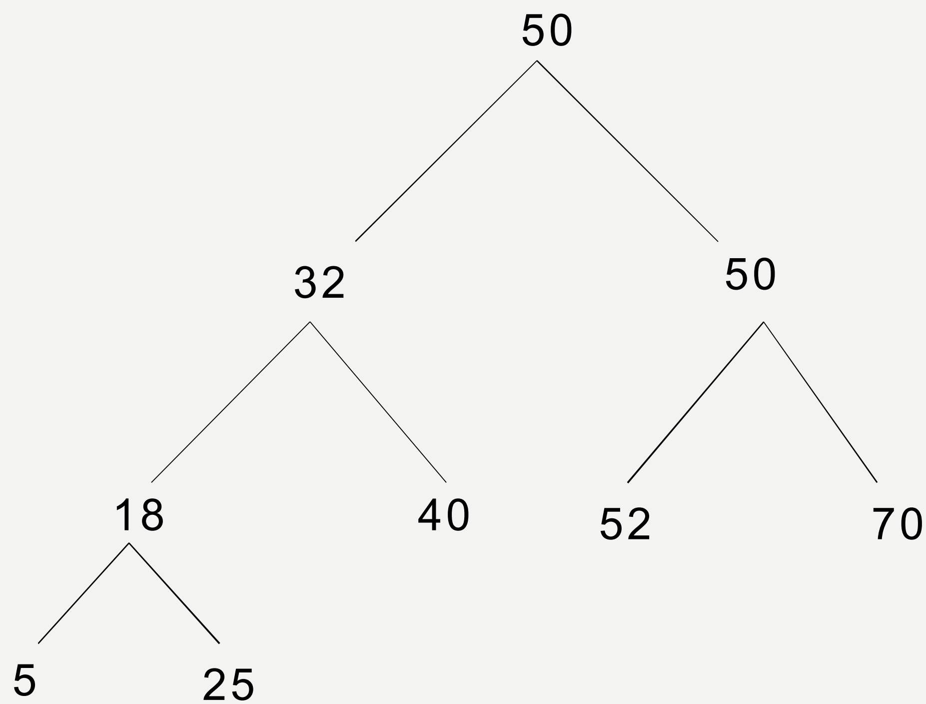


Kunci($T1$) < Kunci(R)

Kunci($T2$) > Kunci(R)

TERAPAN POHON BINER

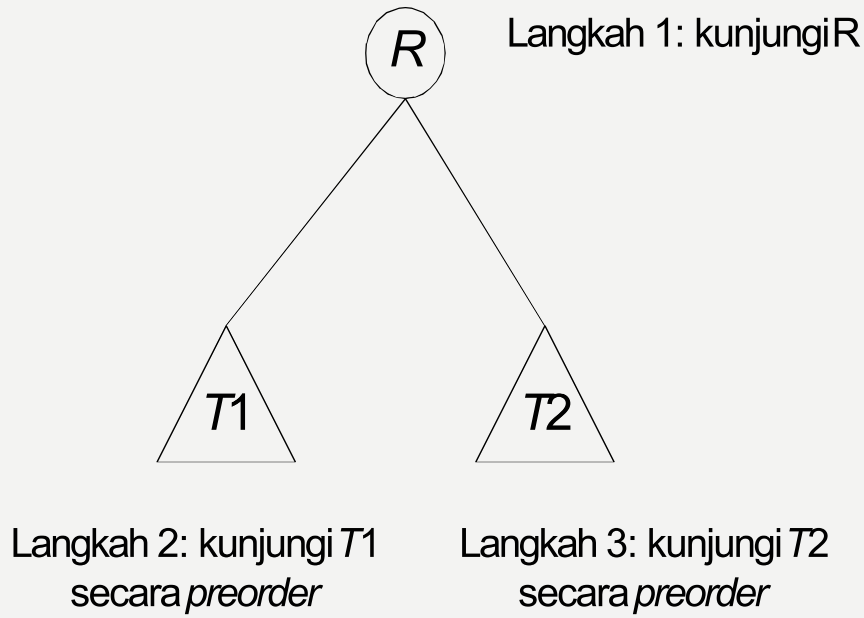
- Data: 50, 32, 18, 40, 60, 52, 5, 25, 70



PENELUSURAN POHON BINER

1. Preorder : *R*, *T*1, *T*2

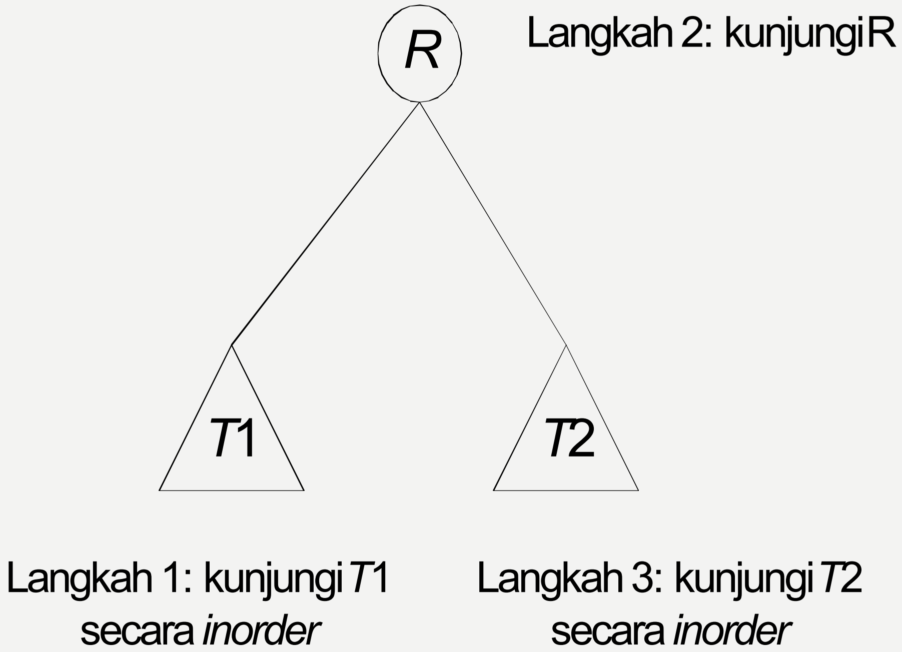
- kunjungi *R*
- kunjungi *T*1 secara *preorder*
- kunjungi *T*2 secara *preorder*



PENELUSURAN POHON BINER

2. *Inorder* : *T*1 , *R*, *T*2

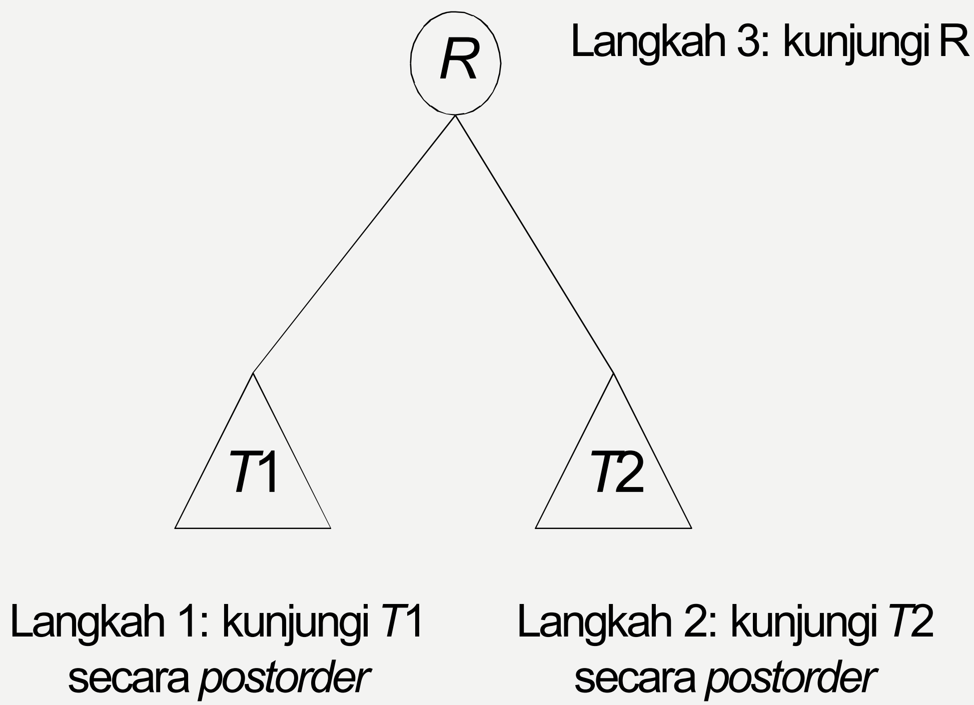
   - kunjungi *T*1 secara *inorder*
   - kunjungi *R*
   - kunjungi *T*2 secara *inorder*



PENELUSURAN POHON BINER

Postorder : *T*1, *T*2 , *R*

- kunjungi *T*1 secara *postorder*
- kunjungi *T*2 secara *postorder*
- kunjungi *R*



PENELUSURAN POHON BINER

- *preorder* : * + *a* / *b* *c* - *d* * *e* *f* (*prefix*)
- *inorder* : *a* + *b* / *c* * *d* - *e* * *f* (*infix*)
- *postorder* : *a* *b* *c* / + *d* *e* *f* * - * (*postfix*)