PERBANDINGAN DUA ALGORITMA UNTUK PENINGKATAN NILAI KONSISTENSI PADA METODE AHP

Farikhin [1], Siti Khabibah[2], Djuwandi[3]

[1] Departemen Matematika FSM UNDIP
email: farikhin.math.undip@gmail.com
[2] Departemen Matematika FSM UNDIP
email: khabibah_ku@yahoo.co.id
[3] Departemen Matematika FSM UNDIP
email: djuwandi225433@gmail.com

Abstrak

Pembuatan keputusan merupakan kegiatan yang sering dilakukan dalam kehidupan. Sejumlah kriteria diberikan untuk membuat keputusan dari alternatif keputusan yang tersedia. Metode AHP merupakan salah satu metode yang digunakan dalam analisis multi kriteria untuk pembuatan keputusan. Seperti diketahui, metode AHP dapat digunakan untuk pembuatan keputusan jika nilai konsistensinya kuraang dari sepuluh persen. Dalam makalah ini, dibahas dua algoritma untuk meningkatkan nilai konsistensi matriks resiprokal. Salah satu algoritma yang dibahas adalah algoritma yang dikonstrusikan berdasarkan relasi preferensi *fuzzy*. Pada bagian akhir makalah ini, diberikan suatu contoh sebagai ilustrasi numeriknya**.**

Kata Kunci: metode AHP, relasi preferensi multiplikatif dan relasi relasi preferensi fuzzy**.**

Abstract

Decision making is most activity for human live. However, a given criterias may also use to make a choosing decision making. AHP method is one of methods to use multicriteria analysis for decision making. As well known that the mehod is accepeted if ratio consistence less than ten percents. In this paper, we compare two methods to analyze ratio consistence from resoprocal comparation matrix. The one of these algorithm can be constructed based on fuzzy preference relation. Finally, we give an example as numerical illustration.

Keywords: *AHP method, multiplicative preference relation, and fuzzy preference relation.*

A. PENDAHULUAN

Metode AHP (analytic hierarchy process) dapat digunakan untuk kegiatan perencanaan, evaluasi, dan prediksi di bidang ekonomi, rekayasa, ilmu politik, peternakan/pertanian, dan sains. Metode AHP digunakan untuk pembuatan keputusan pada *n* alternatif keputusan melalui beberapa tahapan, yakni menentukan struktur hirarki dari problema keputusan, membuat matrik relasi prefrensi multiplikatif (RPM), pengujian konsistensi, dan menentukan vektor prioritas untuk himpunan alternatif keputusan. Metode AHP dikatakan dapat diterima jika nilai konsistensinya kurang dari atau sama dengan sepersepuluh. (Brunelli 2015; Saaty & Vargas, 2012).

Dua masalah pokok dalam metode AHP yang dapat dikaji secara matematis adalah problema konsistensi dan problema pembuatan vektor prioritas. Peningkatan nilai konsistensi dapat dilakukan melalui transformasi elemen dalam matriks RPM yang dikaitkan dengan nilai eigen terbesarnya. Transformasi ini dapat dilakukan secara iteratif, sehingga hasilnya akhirnya mendekati nilai *n*. (Xu & Cuiping, 1999; Xu & Da, 2003).

Relasi preferensi multipilkatif dapat dibuat bentuk normalnya, yang biasa disebut relasi preferensi fuzzy. Karakteristik relasi preferensi fuzzy ini dikaji dalam (Herrera-Viedma dkk., 2004). Selanjutnya, hubungan dua preferensi ini dibahas secara mendalam pada (Xu & Da, 2003; Fedrizzi and Brunelli, 2010).

Dalam makalah ini, dikaji perbandingan antara dua algoritma untuk meningkatkan nilai konsistensi matriks RPM. Algoritma pertama disusun berdasarkan transformasi langusng elemen matriks RPM. Algoritma kedua dikonstruksikan berdasarkan transformasi yang menggunakan relasi preferensi multiplikatif dan relasi preferensi fuzzy. Selain perbandingan analitik, diberikan juga perbandingan komputasi kedua algoritma melalui contoh numerik.

B. METODE

Metode yang digunakan adalah kajian analitik dan simulasi numerik. Pada kajian analitik, dibahas beberapa pengertian relasi preferensi yang menjadi dasar pembuatan keputusan dalam AHP.

Matriks Relasi Perferensi

Diberikan himpunan alternatif keputusan $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, dan notasi $a_{i,j}$ menyatakan nilai preferensi alternatif keputusan A_i terhadap alternatif keputusan A_j, untuk $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Jika nilai-nilai $a_{i,j}$ disajikan dalam matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{i,j} > 0$, $a_{i,i} = 1$, dan $a_{i,j} \times a_{j,i} = 1$ untuk $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, maka matriks A dinamakan **matriks relasi preferensi multiplikatif (RPM).** Sebagai contoh, matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1/5 \\ 1/7 & 1 & 8 \\ 5 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks RPM.

Diberikan matriks keputusan RPM $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$, matriks A dikatakan **konsisten** jika $a_{i,j} \times a_{j,k} = a_{i,k}$ untuk setiap $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Sebagai contoh, matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks RPM yang konsisten (Saaty & Vargas, 2012; Brunelli, 2015). Teorema berikut memperlihatkan hubungan antara nilai eigen terbesar matriks A dan sifat konsisten matriks RPM.

Teorema 1 (Saaty, 1986)
Diberikan himpunan n alternatif keputusan $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, dan matriks RPM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a}_{1,2} & \cdots & \mathrm{a}_{1,\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{2,1} & 1 & \cdots & \mathrm{a}_{2,\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{n},1} & \mathrm{a}_{\mathrm{n},2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dan λ_A nilai eigen maksimal matriks A, maka
(a) $\lambda_A \geq n$, dan
(b) A matriks RPM konsisten jika dan hanya jika $\lambda_A = n$. •

Diberikan matriks $R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & \mathrm{r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{bmatrix}$, matriks R disebut **matriks relasi preferensi *fuzzy* (RPF)** jika entri-entri matriks R memenuhi sifat

$$r_{i,i} = 0{,}5,\ 0 \leq r_{i,j} \leq 1,$$

dan

$$r_{i,j} + r_{j,i} = 1$$

untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$. Matriks RPF R dinamakan **matriks konsisten aditif** jika

$$r_{i,j} = r_{i,k} + r_{j,k} - \frac{1}{2}$$

untuk setiap $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Sebagai contoh, matriks

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}5000 & 0.6577 & 0.8155 \\ 0.3423 & 0{,}5000 & 2 \\ 0.1845 & 0.3423 & 0{,}500 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks RPF yang bersifat konsisten aditif. Dua teorema berikut memperlihatkan hubungan antara matriks RPM dan matriks RPF.

Teorema 3 (Fedrizzi and Brunelli, 2010)
jika $A = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ matriks RPM maka matriks $R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & \mathrm{r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{bmatrix}$ merupakan matriks RPF , dengan

$$r_{i,j} = \frac{1}{2}\left(1 + {}^{9}\log(a_{i,j})\right)$$

untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$.•

Teorema 4 (Xu & Da, 2003)
jika $R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & \mathrm{r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{bmatrix}$ matriks RPF maka $A = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks RPM , dengan

$$a_{i,j} = 9^{2(r_{i,j} - 0{,}5)}$$

untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$.•

Peningkatan Nilai Konsistensi

Pengukuran konsistensi pembuat keputusan untuk menentukan keputusan yang dipilih, dapat dilakukan melalui analisis elemen-elemen matriks A. Kuantitas

$$IK = \frac{\lambda_A - n}{n-1}$$

diinterpretasikan sebagai rata-rata ketidakpastian yang dihasilkan oleh pembuat keputusan (Saaty, 1986). Rasio konsistensi dihitung dengan rumus berikut

$$RK = \frac{IK}{IR}$$

dengan IR ditentukan dalam tabel berikut.

Tabel 1. Nilai IR untuk n alternatif keputusan

n	3	4	5	6
IR	0,58	0,90	1,12	1,24
n	7	8	9	10
IR	1,32	1,41	1,45	1,49

Matriks RPM A dikatakan **dapat diterima** jika nilai RK kurang dari atau sama dengan 0,1.

Xu dan Cuiping mengusulkan perbaikan nilai eigen maksimal matriks A melalui bentuk tranformasi

$$a_{i,j}^{*} = a_{i,j}^{\delta}\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1-\delta}$$

dengan $0 < \delta < 1$, $\overline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektor eigen yang terkait dengan λ_A, untuk $i, j = 1, 2, \ldots, 3$ (Xu & Cuiping, 1999). Selanjutnya, persamaan ini dapat dikombinasikan dengan relasi prefrensi fuzzy agar diperloeh matriks RPF yang bersifat konsisten aditif (Xu & Da, 2003). Karakteristik transformasi ini yang terkait dengaan nilai eigen maksimal dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 2 (Xu & Cuiping, 1999)
Diberikan dan matriks RPM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 1 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

dan λ_A nilai eigen maksimal matriks A. Jika

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^{*} & \cdots & a_{1,n}^{*} \\ a_{2.1}^{*} & 1 & \cdots & a_{2,n}^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^{*} & a_{n,2}^{*} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

maka $\lambda_A > \lambda_{A^*}$. •

Berdasarkan Teorema 2, Xu dan Cuiping membuat algoritma berikut.

Algoritma 1 (Xu & Cuiping, 1999)

Input :
Matriks RPM $A = [a_{i,j}]$
m = jumlah iterasi
$0 < \delta < 1$

Output :
matriks RPM $A^{(m)}$ dengan RK kurang dari atau sama dengan 0,1.

Step 1. Tentukan $A^{(k)} = A$ untuk $k = 0$
Step 2. Hitung $\lambda_{A^{(k)}}$ dan vektor eigennya $\overline{w}^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \ldots., w_n^{(k)})$
Step 3. Hitung $IK = \frac{\lambda_{A^{(k)}} - n}{n-1}$ dan $RK = \frac{IK}{IR}$.
Step 4. Jika $RK \le 0{,}1$, kerjakan step 7. jika tidak, kerjakan step berikut
Step 5. Buat matriks RPM baru $A^{(k+1)} = [a_{i,j}^{(k+1)}]$ dengan $a_{i,j}^{(k+1)} = (a_{i,j}^{(k)})^{\delta}\left(\frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}\right)^{1-\delta}$
Step 6. Pilih $k = k + 1$ dan kembali ke step 2.
Step 7. Pilih $A^{(m)} = A^{(k)}$ dan $\overline{w}^{(k)}$ sebagai vektor prioritasnya.
Step 8. Selesai.•

Algoritma 1 merentang barisan matriks RPM $\{A^{(m)}\}$ sedemikian hingga

$$\lambda_{A^{(0)}} > \lambda_{A^{(1)}} > \lambda_{A^{(2)}} > \cdots \ge \mathrm{n}$$

dan

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{A^{(m)}} = n$$

Oleh karenanya, algoritma 1 menjamin adanya matriks RPM yang dapat diterima.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagain ini, dibahas suatu algoritma untuk memperoleh matriks RPM yang konsisten. Selanjutnya, hasil ini dibandingkan dengan hasil dari Algoritma 1.

Beberapa peneliti telah mengkaji hubungan matriks RPM dan RPF dengan dikaitkan sifat konsisten dan konsisten aditif. Dua transformasi seperti pada Teorema 3 dan Teorema 4 dapat digunakan agar sifat konsisten dan konsisten aditif dapat terjadi secara bersamaan. Untuk pembahasan detailnya dapat dilihat dalam (Herrea-viedma dkk, 2004; Xu & Da, 2003).

Penulis membuktikan suatu bentuk transformasi pada matriks RPF yang dapat menghasilkan matriks RPF baru yang bersifat konsisten aditif. Pernyataan ini ditulis dalam teorema berikut.

Teorema 5 (Siti Khabibah dkk., 2015)

Diberikan matriks RPF $R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{bmatrix}$

dan $G = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{bmatrix}$ dengan

$$g_{i,j} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(r_{i,k} + r_{k,j}\right)\right) - \frac{1}{2}$$

untuk setiap $1 \leq i,j \leq n$. Syarat cukup dan syarat perlu agar matriks RPF R bersifat konsisten aditif adalah $R = G$.•

Berdasarkan teorema 5, dikonstruksikan suatu algoritma untuk membentuk matriks RPM yang konsisten.

Algoritma 2 :

Input :
Matriks RPM $A = [a_{i,j}]$
Output :
matriks RPM B dengan RK kurang dari atau sama dengan 0,1.
Step 1. Ubah matriks A menajdi matriks R seperti dalam Teorema 3.
Step 2. Gunakan Toerema 4 pada matriks R dalam step 1.
Step 3. Tentukan matriks B sebagai hasil transformasi matriks hasil step 2 menggunakan persamaan dalam Teorema 4.
Step 4. Selesai. •

Selanjutnya, diberikan suatu contoh penggunaan Algoritma 2 untuk membuat matriks RPM yang konsisten.

Contoh 1

Diberikan matriks RPM

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1/5 \\ 1/7 & 1 & 11/8 \\ 1/5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika Algoritma 2 digunakan, dihasilkan matriks RPF

$$R = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.9428 & 0.1338 \\ 0.0572 & 0.5000 & 0.0268 \\ 0.8662 & 0.9732 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks RPM outputnya adalah

$$B = \begin{bmatrix} 1.0000 & 4.2799 & 0.3271 \\ 0.2336 & 1.0000 & 0.0764 \\ 3.0571 & 13.0843 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen maksimal matriks A dan B berturut-turut adalah $\lambda_A = 3{,}2470$ dan $\lambda_A = 3{,}0000$. Mengingat Teorema 1, matriks output dari Algoritma 2 bersifat konsisten. Sementara itu, matriks inputnya tidak konsisten.•

Matriks A pada Contoh 1 diambil dari 9Xu & Cuiping, 1999). Tinjau kembali Algoritma 1. Algoritma ini membutuhkan beberapa input. Input $0 < \delta < 1$ pada Algoritma 1 bersifat *trial-error*. Nilai δ semakin dekat dengan satu, maka nilai eigennya semakin besar dibandingkan tiga. Oleh karenanya, diperlukan suatu eksperimen yang lebih banyak untuk memperkecil jumlah iterasi Algoritma 1.

D. PENUTUP

Simpulan

Peningkatan konsisten merupakan salah isu dalam penggunaan metode AHP. Kajian ini dapat dilakukan melalui keterkaitan relasi preferensi multiplikatif dan relasi preferensi fuzzy. Suatu algoritma untuk peningkatan konsistensi telah dihasilkan. Algoritma ini dapat digunakan dengan mudah. Algoritma ini dapat memberi jaminan bahwa matriks RPM dapat diperbaiki tingkat konsistensinya melalui komputasi yang sederhana. Ide ini memberikan gagasan lain berupa bentuk-bentuk lain trasnformasi yang hanya memerlukan informasi parsial dalam pembuatan keputusan berdasarkan metode AHP.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Fakultas Sains dan Matematika UNDIP yang telah memberikan dukungan dana melalui DIPA FSM UNDIP. Makalah ini merupakan bagian dari penilitian DIPA FSM UNDIP tahun anggaran 2016.

E. DAFTAR PUSTAKA

Brunelli, M. (2015). Introduction *to Analytic Hierarchy Process*, New York : Springer.

Fedrizzi, M., and Brunelli, M. (2010). On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix, *Soft Computing*, 14, 639-645.

Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., and Luque, M. (2004). Some issues of fuzzy preferency relation, *European Journal of Operational Research*, 154, 98–109.

Saaty, T.L. and Vargas, L.G. (2012) *Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process*, New York : Springer.

Saaty, Thomas L., (1986). Axiomatic foundation of the analityc hierarchy process, *Management science*, 32 (7), 841-855.

Siti Khabibah, Farikhin, , Nikken Prima Puspita, (2015). *Pengembangan Metode Tipe AHP berdasarkan relasi Preferensi Fuzzy Tergeneralisir untuk Pembuatan Keputusan Berkelompok*, Laporan Penelitian FSM UNDIP.

Xu, Z., and Cuipin, W. (1999). A consistency improving method in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, Vol. 116, 443 - 449.

Xu, Z., and Da, Q. (2003). An Approach to Improving Consistency of Fuzzy Preference Matrix, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2, 3– 12.