PDB ORDO II
PERSAMAAN BESSEL

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PROF DR HAMKA

PERSAMAAN BESSEL

Persamaan Bessel

Fungsi Bessel Jenis Pertama

Bentuk umum PD Bessel : $x^2y'' + xy' + (x^2 - \upsilon^2)y = 0$ …… (2-31) dengan υ parameter yang diketahui dan nilai $\upsilon \geq 0$.

Persamaan ini biasanya muncul dalam masalah getaran; medan-medan elektrostatik; masalah konduksi panas dan sebagainya.Untuk menyelesaikan PD Bessel ini, digunakan metoda Frobenius dengan penderetan di sekitar x=0 (x=0 merupakan titik singular teratur untuk PD Bessel di atas).

Penyelesaian PD mempunyai bentuk :

$$Y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \quad \text{.................................} \quad (2\text{-}32)$$

dengan syarat nilai a_0 # 0. Sehingga :

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)a_m x^m \quad \text{...........} \quad (2\text{-}33)$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)m + r\text{-}1)a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r\text{-}1)a_m x^m$$

$$\text{..} \quad (2\text{-}34)$$

PDnya mempunyai :

$$x^2\left[x^{r-2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^m\right] + x\left[x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^m\right] + (x^2 - \upsilon^2)$$

$$\left[x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right] = 0$$

atau,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r\text{-}1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \upsilon^2$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0 \text{..} \quad (2\text{-}35)$$

Jika x tidak selalu nol, maka yang pasti = 0 adalah koefisien-koefisien dari x^{r+s} :

Koefisien x^r : $(r-1)ra_0 + ra_0 - \upsilon a_0 = 0$

$$(r^2 - r + r - \upsilon^2)a_0 = 0$$

$$(r_2 - \upsilon^2)a_0 = 0 \; ; \; a_0 \# 0$$

Persamaan indical : $r^2 - \upsilon^2 = 0$; $r_{1.2} = + \upsilon$ ……………………… (2-36)

Koefisien x^{r+1} : $r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - \upsilon^2 a_1 = 0$

$$(r^2 + r + r + 1 - \upsilon^2)a_1 = 0$$

$$(2r + 1 + r^2 - \upsilon^2)a_1 = 0$$

$$(2r + 1 +)a_1 = 0; \; (2r + 1) \text{ tidak selalu } 0$$

$$a_1 = 0$$

Koefisien x^{r+s} : $(s + r - 1))s + r)a_s + (s + r)a_s + a_{s-2} - \upsilon^2 a_s = 0$

$$[(s + r)(s + r - 1 + 1) - \upsilon^2]a_s = a_{s-2}$$

$$[(s + r)^2 - \upsilon^2]a_s = -a_{s-2}$$

$$a_s = -\frac{a_{s-2}}{(s+r)^2 - \upsilon^2} \quad \ldots\ldots \text{(2-37)}$$

Untik $r = \upsilon$:

$$a_s = -\frac{a_{s-2}}{(s+\upsilon)^2 - \upsilon^2} = -\frac{a_{s-2}}{s^2 + 2s\upsilon + \upsilon^2 - \upsilon^2} = -\frac{a_{s-2}}{s(s+2\upsilon)}$$

$s = 2 \rightarrow \qquad a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\upsilon)} = -\frac{a_0}{4(1+\upsilon)}$

$s = 3 \rightarrow \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3(3+2\upsilon)} = 0$

$s = 4 \rightarrow \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\upsilon)} = \frac{a_0}{2.4(2+\upsilon).4(1+\upsilon)}$

Karena $a_1 = 0$; $\upsilon \geq 0$, maka untuk s ganjil $a_s = 0$ dan untuk s genap = 2m; m = 1,2,3……….

$$a_{2m} = -\frac{1}{2m(2\upsilon + 2m)} a_{2m-2}$$

$$= -\frac{1}{2^2 m(\upsilon + m)} a_{2m-2}$$

Karena a_0 sembarang dan a_0 # 0, maka bisa dipilih $a_0 = \dfrac{1}{2^{\upsilon}\,\Gamma(\upsilon+1)}$

Dengan $\Gamma(\upsilon + 1) = \upsilon\Gamma(\upsilon) = \upsilon!$ Untuk υ = 0,1,2,3,……. Sehingga :

$$m = 1 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2(2\upsilon+2)} = -\frac{1}{2^2(\upsilon+1)}\frac{1}{2^{\upsilon}\,\Gamma(\upsilon+1)}$$

$$= \frac{-1}{2^{\upsilon+2}(\upsilon+1)\Gamma(\upsilon+1)} = \frac{-1}{2^{\upsilon+2}\Gamma(\upsilon+2)} = \frac{1}{1!2^{\upsilon+2}\Gamma(\upsilon+2)}$$

$$m = 2 \rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\upsilon+2)} = -\frac{1}{2.2^2(\upsilon+2)}\frac{-1}{2^{2+\upsilon}\,\Gamma(\upsilon+2)}$$

$$= \frac{1}{2^{\upsilon+4}.2\Gamma(\upsilon+3)} = \frac{1}{2!2^{\upsilon+4}\Gamma(\upsilon+3)}$$

$$m = 3 \rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{2^2 3(\upsilon+3)} = -\frac{1}{3.2^2(\upsilon+3)}\frac{1}{2!2^{4+\upsilon}\,\Gamma(\upsilon+3)}$$

$$m = m \rightarrow a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)}$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{\upsilon+2m} \quad \text{……………………… (2-38)}$$

Fungsi y yang merupakan penyelesaian PD berbentuk deret tak hingga ini disebut **Fungsi Bessel Jenis Pertama orde** υ dan dinotasikan dengan $J_{\upsilon}(x)$.

Jadi, $J_{\upsilon}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{\upsilon+2m}$

$$J_{\upsilon}(x) = x^{\upsilon}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{\upsilon+2m}\Gamma(\upsilon+m+1)} x^{2m} \quad \text{………………… (2-39)}$$

Untuk akar indicial yang lain, yaitu $r = -\upsilon$;

$$J_{-\upsilon} =(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{-\upsilon+2m}\Gamma(-\upsilon+m+1)} x^{-\upsilon+2m} \quad \text{…………… (2-40)}$$

Untuk υ bukan integer (bukan bilangan bulat), maka $J_{\upsilon}(x)$ dan $J_{-\upsilon}$ tidak bergantungan secara linier, sehingga PUD PD Bessel :

$y(x) = C_1 J_{\upsilon}(x) + C_2 J_{-\upsilon}(x)$ …………………………………… (2-41)

Untuk υ integer (bulat); misalkan υ = n ; n = 0,1,2,3, …………………..

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)} + \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)}$$

Karena untuk m = 0, 1, 2, …..(n-1) ; harga $\Gamma(-n + m + 1) = \infty$, maka :

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)} x^{-n+2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)} +$$

$$\sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)}$$

Karena untuk m = 0, 1, 2, ……(n-1) ; harga $\Gamma(-n + m + 1) = \infty$, maka :

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{m!2^{-n+2m}\Gamma(-n+m+1)}$$

Misalkan, $\left.\begin{matrix} p = m - n \\ m = p + n \end{matrix}\right\}$

- $-n + 2m = 2p + n$
- $-n + m + 1 = -n + p + n + 1 = p + 1$
- $M = n \rightarrow p + n = n \rightarrow p = 0$

Sehingga,

$$J_{-n}(x) = \sum_{p-0}^{\infty} (-1)^{p+n} \frac{x^{2p+n}}{(p+n)!2^{2p+n}\Gamma(p+1)}$$

$$= (-1)^n x^n \sum_{p-0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!2^{2p+n}\Gamma(p+n+1)}$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

Jadi untuk υ = n bulat :

$Y(x) = C_1J_n(x) + C_2J_{-n}(x) = C_1J_n(x) + (-1)^n C_2 J_{-n}(x)$

$Y(x) = [C_1 + (-1)^n C_2]J_n(x) = KJ_n (x)$

Belum merupakan PU PD Bessel, karena hanya memuat satu konstanta sembarang untuk PD orde 2. Untuk menentukan Penyelesaian Basis yang lain pada kasus υ = n bulat ini akan dibahas pada bagian **Fungsi Bessel Jenis Kedua**.

Fungsi Bessel Jenis Pertama untuk n = 0, 1, 2, ……….. (bulat)

$$J_n(x) = x^n \sum_{m-0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{n+2m}\Gamma(n+m+1)} x^{2m}$$

$$n = 0 \rightarrow J_0(x) = \sum_{m-0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{n+2m}\Gamma(n+m+1)} x^{2m}$$

$$= \frac{(-1)^0 x^0}{2^0\ 0!\Gamma(1)} + \frac{(-1)^1\ x^2}{2^2 1!\Gamma(2)} + \frac{(-1)^2\ x^4}{2^4\ 2!\Gamma(3)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6\ (3!)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

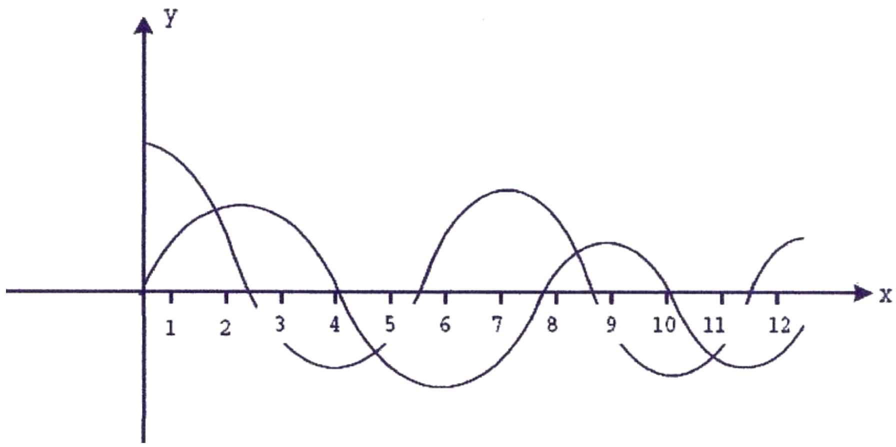
$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = 1 \rightarrow J_1(x) = \sum_{m-0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{2m+1}\ \Gamma(m+2)} x^{2m+1}$$

$$= \frac{(-1)^0 x^1}{2^1\ 0!\Gamma(2)} + \frac{(-1)^1\ x^3}{2^3 1!\Gamma(3)} + \frac{(-1)^2\ x^5}{2^5\ 2!\Gamma(4)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3 1!2!} - \frac{x^5}{2^5\ 2!3!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{384} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



- Akar-akar dari $J_0(x) = 0$ dan $J_1(x) = 0$

Berikut ini adalah 5 buah akar positif pertama dari $J_0(x) = 0$ dan $J_1(x) = 0$ dalam 4 desimal, beserta selisih antara 2 akar yang berurutan :

$J_0(x)$		$J_1(x)$	
Akar	Selisih	Akar	Selisih
x_1 = 2,4048		x_1 = 3,8317	
	3,1153		3,1839
x_2 = 5,5201		x_2 = 7,0156	
	3,1336		3,1579
x_3 = 8,6537		x_3 = 10,1735	
	3,1378		3,1502
x_4 = 11,7915		x_4 = 13,3237	
	3,1394		3,1469
x_5 = 14,9309		x_5 = 16,4706	

Untuk $\upsilon = ½$;

$$J_{1/2}(x) = x^{1/2} \sum_{m-0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!2^{1/2+2m}\,\Gamma(1/2+m+1)} x^{2m}$$

$$= \sum_{m-0}^{\infty} \frac{(x/2)^{1/2+2m}(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+3/2)}$$

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{0!_{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!_{\frac{5}{2}\frac{9}{2}\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}$$

<u>Catatan</u> : $\Gamma(\upsilon + 1) = \upsilon\Gamma(\upsilon)$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{1/2\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{(x/2)^2}{1!3/2} + \frac{(x/2)^4}{2!5/2\,3/2} - \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{(x/2)^{1/2}}{1/2\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{x^2}{1!2\,3} + \frac{x^4}{2!2^2\,35} - \dots\dots\dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{(x/2)^{1/2}}{1/2\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\dots\dots\dots\dots\right]$$

Ekspansi Mc. Laurin $\left[f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^n(0)\right]$ dari :

Sin x = x - $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ + ……………

Cos x = 1 - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!}$ + ……………

Jadi :

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{1/2\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\dots\dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}\text{ Sin } x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\text{ Sin } x$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\text{ Sin } x$$

Dengan cara yang sama bisa ditentukan :

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\text{ Cos } x$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\sin x}{x} - \cos x\right]$$

$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\cos x}{x} - \sin\ x\right]$

Rumus-rumus untuk fungsi Bessel :

1. $[x^{\upsilon}\ J_{\upsilon}(x)] = x^{\upsilon}J_{\upsilon-1}(x)$
2. $[x^{-\upsilon}J_{\upsilon}(x)] = -x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)$
3. $J_{\upsilon-1}(x) + J_{\upsilon+1}(x) = \frac{2\upsilon}{x}J_{\upsilon}(x)$
4. $J_{\upsilon-1}(x)-J_{\upsilon+1}(x) = 2J_{\upsilon}(x)$

Rumus integral yang meliputi fungsi Bessel

1. $\int x^{\upsilon}J_{\upsilon-1}(x)dx = x^{\upsilon}J_{\upsilon}(x) + C$
2. $\int J_{\upsilon+1}(x)dx = \int J_{\upsilon-1}(x)dx - 2J_{\upsilon}(x)$
3. $\int x^{-\upsilon}J_{\upsilon+1}(x)dx = -x^{-\upsilon}J_{\upsilon}(x) + C$

Contoh :

1. $J_{3/2}(x) = J_{1/2+1}(x) = \frac{2\frac{1}{2}}{x}J_{1/2}(x) - J_{1/2-1}(x)$

$= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{Sin}\,x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{Cos}\,x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\text{Sin}\,x}{x} - \text{Cos}\,x\right]$

$J_{-3/2}(x) \quad = J_{-1/2-1}(x) = \frac{2(-\frac{1}{2})}{x}\ J_{-1/2}(x) - J_{-1/2+1}(x)$

$= -\ \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{Sin}\,x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \text{Cos}\,x$

$= -\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\text{Cos}\ x}{x} - \text{Sin}\,x\right]$

2. $\int x^4\ J_1(x)\ dx = \int x^2\ x^2\ J_1(x)\ dx = \int x^2\ d[x^2\ J_2\ (x)]$

$= x^2\ x^2\ J_2(x) - \int x^2\ J_2\ (x)dx^2$

$= x^4\ J_2\ (x) - 2\int\ x^3\ J_2\ (x)$

$= x^4\ J_{2\ (x)\ -\ 2}\int d\ [x^3\ J_3\ (x)\ ]$

$= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C$

$= x^4 \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - 2x^3 \left[\frac{2.2}{x} J_2(x) - J_1(x)\right]$

$= x^4 \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - 2x^3 \left[\frac{4}{x}\left(\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right) J_1(x)\right]$

$= 2x^3 J_1(x) - x^4 J_0(x) - 16x J_1(x) + 9x^2 J_0(x) + 2x^3 J_1(x)$

$= (8x^2 - x^4) J_0(x) + (4x^3 - 16x) J_1(x) + C$

3. $\int x^3 J_3(x)\, dx = \int x^5 [x^{-2} J_3(x)] dx = -\int x^5 d[x^{-2} J_2(x)]$

$= -x^5 x^{-2} J_2(x) + \int x^{-2} J_2(x)\, dx^5$

$= x^3 J_2(x) + 5 \int x^2 J_2(x)\, dx^5$

$= -x^3 J_2(x) + 5 \int x^3 [x^{-1} J_2(x)]$

$= -x^3 J_2(x) + 5 \int x^3 d[x^{-1} J_1(x)]$

$= -x^3 J_2(x) + 5x^2 J_1(x) - 5 \int x^{-1} J_1(x)\, dx^3$

$= - x^3 J_2(x) + 5x^2 J_1(x) - 15 \int x J_1(x)\, dx$

$= -x^3 J_2(x) + 5x^2 J_1(x) - 15 \int x J_0(x)\, dx$

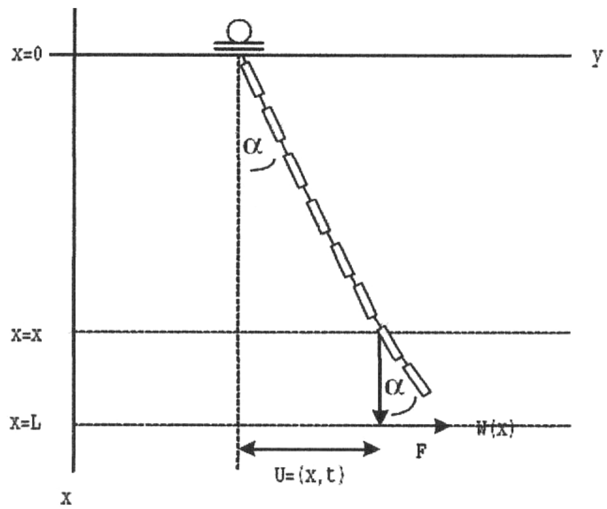
$= -x^3 J_2(x) + 5x^2 J_1(x) - 15 \int x\, d[J_0(x)]$

$= -x^3 J_2(x) + 5x^2 J_1(x) - 15 x J_0(x) - 15\int J_0(x)\, dx$

Aplikasi Fungsi Bessel

Vibrasi dari Rantai yang Tergantung

Suatu rantai dengan masa persatuan panjang konstan, dengan panjang L digantung tegak lurus pada suatu tumpuan tetap) seperti pada gambar. Pada saat t = 0, rantai ditempatkan dengan membentuk sudut α terhadap bidang vertikal, kemudian dilepaskan.



L = panjang rantai

ρ = densitas rantai (massa persatuan panjang) = konstan

α = sudut penyimpangan rantai terhadap bidang vertikal

U(x,t) = besarnya simpangan di titik x = x pada rantai terhadap vertikal pada saat t.

Berat bagian rantai di bawah sembarang titik (x = x) = W (x)

W (x) = ρg (L-x)

Karena rantai menyimpang sejauh α terhadap bidang vertikal, maka

W (x) $\approx$ gaya tekan yang bekerja secara tangensial pada gerak rantai.

Sehingga komponen horisontal dari gaya tekan [W(x)] :

F(x) = W (x)sinα

Jika $\alpha \to 0$; W (x) Sin $\alpha \approx$ W (x) tg α = W(x) $\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}$

Ambil bagian kecil rantai dari x sampai x + Δx ; dengan $\Delta x \to 0$

maka besarnya perubahan gaya : F (x + Δx) – F (x)

$$F(x+\Delta x) - F(x) = W(x+\Delta x)\ \frac{\partial U(x+\Delta x, t)}{\partial (x+\Delta x)} - W(x)\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \left[\frac{w(x+\Delta x)\frac{\partial U(x+\Delta x, t}{\partial (x+\Delta x)} - w(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} \right]$$

$$= \Delta x\ \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial U(,t)}{\partial x}\right]$$

$$= \Delta x\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho g (L-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

Hukum Newton II : F = ma = massa x percepatan

- percepatan vibrasi : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$
- massa dari bagian kecil rantai (Δx) = $\rho\ \Delta x$

Gaya F = $\Delta x \rho\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, gaya ini sama dengan perubahan gaya F(x+Δx) – F(x), jadi :

$$\Delta x \rho\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta x\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho g (L-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

$$= \Delta x \rho g\ \frac{\partial}{\partial x}\left[(L-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(L-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

Bila gerakannya merupakan gerak periodik dalam t dengan periode $2\pi/\omega$, maka :

$U(x,t) = y(x) \cos(\omega t + \partial)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\ \omega y(x) \sin(\omega t + \partial)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\ \omega^2 y(x) \cos(\omega t + \partial)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y'(x) \cos(\omega t + \partial)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2 y \cos(\omega t + \partial) = g \frac{\partial}{\partial x}\left((L-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$-\omega^2 y \cos(\omega t + \partial) = g \frac{\partial}{\partial x}[(L - x)\, y' \cos(\omega t + \partial)]$$

$$-\omega^2 y \cos(\omega t + \partial) = g \cos(\omega t + \partial) \frac{\partial}{\partial x} [(L - x)\, y']$$

$$-\omega^2 y = g \frac{\partial}{\partial x}[(L - x)y'] = g[-y' + (L - x)y'']$$

$$-\frac{\omega^2}{g} y = -y' + (L - x)y''$$

$$(L - x)y'' - y' + \lambda^2 y = 0 \ ; \ \lambda^2 \ \frac{\omega^2}{g}$$

Misal : $L-x = z$; $\frac{dz}{dx} = -1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -1\frac{dy}{dz} = -\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{dy}{dz}\right] = -1\frac{d}{dz}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dz^2}$$

Sehingga persamaan menjadi : $z \ \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + \lambda^2 \ y = 0$

$s = 2\lambda z^{1/2}$; $z = \frac{s^2}{4\lambda^2}$

Misal :

$$dz = \frac{2s\,ds}{4\lambda^2} = \frac{sds}{2\lambda^2} \ ; \ \frac{ds}{dz} = \frac{2\lambda^2}{s}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{2\lambda^2}{s}\frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda^2}{2\lambda z^{1/2}}\frac{dy}{ds} = \lambda z^{-1/2}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{dy}{dz}\right] = \frac{d}{dz}\left[\lambda z^{-1/2}\frac{dy}{ds}\right] = \lambda\left[-\frac{1}{2} z^{-/32} \frac{dy}{ds} + z^{-1/2}\frac{d}{dz}\frac{dy}{ds}\right]$$

$$= -\ \frac{1}{2}\lambda z^{-3/2}\ \frac{dy}{ds} + \lambda z^{-/12}\ \frac{d}{ds}\frac{dy}{dz}$$

$$= -\ \frac{1}{2}\lambda z^{-3/2}\ \frac{dy}{ds} + \lambda z^{-/12}\ \frac{d}{ds}\left[\lambda z^{-1/2}\ \frac{dy}{ds}\right]$$

$$= -\ \frac{1}{2}\lambda z^{-/32}\ \frac{dy}{ds} + \lambda^2 z^{-1}\ \frac{d^2 y}{ds^2}$$

Persamaan menjadi :

$$z\left[-\frac{1}{2}\lambda z^{-3/2}\ \frac{dy}{ds} + \lambda^2 z^{-1}\ \frac{d^2 y}{ds^2}\right] + \lambda z^{-1/2}\ \frac{dy}{ds} + \lambda^2 y = 0,\ \text{atau}$$

$$\lambda^2\ \frac{d^2 y}{ds^2} + \left[-\frac{1}{2}\lambda z^{-1/2} + \lambda z^{-1/2}\right]\frac{dy}{ds} + \lambda^2 y = 0$$

$$\lambda^2\ \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda z^{-1/2}\ \frac{dy}{ds} + \lambda^2\ y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{2}\lambda^{-1} z^{1½}\ \frac{dy}{ds} + y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dy}{ds} + y = 0 \rightarrow \text{PD Bessel dengan } \nu = 0$$

Penyelesaian

PD : $y(s) = J_0(s)$

Sehingga $y(x) = J_0\left(2\omega\sqrt{L - x} / \sqrt{g}\right)$

Syarat batas : pada x = 0 rantai berada pada posisi tetap pada setiap saat : y(0) = 0

$y(0) = J_0(2\omega\sqrt{L-0} / \sqrt{g} = 0 \rightarrow J_0(2\omega\sqrt{L/g}) = 0$

Akar positif pertama dari $J_0(2\omega\sqrt{L/g}) = 0$ adalah 2,4148, berarti

$2\omega\sqrt{L/g} = 2{,}4048 : \omega = \frac{2{,}4048}{2}\ \sqrt{g/L}$

Frekuensi getaran (gerakan) rantai = $\frac{\omega}{2\pi}$ siklus/satuan waktu =

$\frac{2{,}4048}{4\pi}\ \sqrt{g/L}$ siklus / satuan waktu

Fungsi Bessel Jenis Kedua

Persamaan diferensial Bessel berbentuk : $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0$ dengan penyelesaian : $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2\, J_{-n}(x)$.

Untuk n bilangan bulat, $J_n(x)$ dan $J_{-n}(x)$ bergantungan secara linear, maka harus dicari penyelesaian basis kedua selain $J_n(x)$ untuk memperoleh penyelesaian umum PD Bessel untuk n bilangan bulat.

c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang, dipilih $c_1 = E + \dfrac{F \cos n\pi}{\sin \pi}$;

$c_2 = -\dfrac{F}{\sin n\,\pi}$, E dan F adalah konstanta sembarang.

PUPD Bessel menjadi :

$$y(x) = \left[E + \frac{F \cos n\pi}{\sin n\,\pi}\right] J_n\,(x) + \left[-\frac{F}{\sin n\pi}\right] j_{-n}\,(x)$$

$$y(x) = E\, J_n(x) + \frac{F \cos n\pi}{\sin n\pi} J_{-n}(x)$$

$$y(x) = EJ_n(x) + F \left[\frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}\right]$$

$$y(x) = EJ_n(x) + FY_n(x)$$

$$\text{dimana } Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}; & n \,\#\, \text{bilanganbulat} \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p\,(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}; & n = \text{bilangan bulat} \end{cases}$$

Fungsi $Y_n(x)$ disebut fungsi Bessel jenis kedua.

Untuk n = O PD Bessel menjadi :

$Xy'' + y' + xy = 0$

Akar-akar persamaan indicial : $r_{1,2} = 0$, sehingga

$Y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m$

$Y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m-1}$

$Y_2'' = J_0'' \ln x + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$

Substitusikan Y_2, Y_2' dan Y_2'' ke PD (1), kemudian disederhanakan dan diperoleh :

$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m-1} = 0$

Berdasarkan fungsi Bessel jenis pertama untuk n = 0 diperoleh :

$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m} (m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!(m-1)!}$

Persamaan menjadi :

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$

Koefisien dari x^0 : $A_1 = 0$

Koefisien dari x^{2s} : $(2s + 1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0$, s = 1, 2, 3, ...

$A_3 = 0$, $A_5 = 0$, $A_7 = 0$, ...

Koefisien dari x^{2s+1} : $-1 + 4A_2 = 0 \rightarrow A_2 = \frac{1}{4}$

Untuk s + 1, 2, 3…. Berlaku :

$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0$

Untuk s = 1 diperoleh : $\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \rightarrow A_4 = -\frac{3}{128}$

Rumus untuk menentukan A_{2m} :

$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m} (m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}\right)$, m = 1, 2, 3 ….

bila $h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$, maka :

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2}$$

J_0 dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian yang bersifat linear independence, sehingga : a ($y_2 + bJ_0$) juga merupakan penyelesaian basis. Bila $a = \frac{2}{\pi}$, $b=\gamma - \ln 2$ maka :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)\left[\ln \frac{x}{2} + \gamma\right] + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2-42)}$$

$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{m}$, γ = 0,57721566490 .., konstanta Euler

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma\right] + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n}\, m!(m+n)!} x^{2m+n}$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}\, m!} x^{2m-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2-43)}$$

Sehingga PUDP Bessel untuk semua nilai n adalah :

$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$

Rumus-rumus rekursi yang berlaku untuk $J_n(x)$ juga berlaku untuk $Y_n(x)$.

Contoh :

1. Selesaikan PD : xy" + xy' + (x – 4)y = 0

PD : $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ merupakan PD Bessel dengan n = 2.

PUDPD-nya : $y(x) = C_1J_2(x) = C_2\, Y_2(x)$

dengan

$$J_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[\frac{x}{2}\right]^{2k+1}}{k!\,\Gamma(k+3)}$$

$$Y_2(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] J_2(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{1} (1-k)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (1)^k$$

$[\phi(k) + \phi(k + 2)] \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}}{k!(k+2)!}$

2. PD : $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \upsilon^2)y = 0$; (subst $\lambda x = z$)

Misalkan : $z = \lambda x \rightarrow x = \dfrac{z}{\lambda}$

$$\frac{dz}{dx} = \lambda$$

Jadi,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\lambda$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= \lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \lambda\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) = \pi\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dy}{dz}\right) = \lambda^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

PD menjadi :

$$x^2 \left(\lambda^2 \frac{d^2y}{dz^2}\right) + x\left(\lambda\frac{dy}{dz}\right) + (\lambda^2 x^2 - \upsilon^2) y = 0$$

$$\frac{z^2}{\lambda^2}\left(\lambda^2 \frac{d^2y}{dz^2}\right) + \frac{z}{\lambda}\left(\lambda\frac{dy}{dz}\right) + (\lambda^2 \frac{z^2}{\lambda^2} - \upsilon^2)\ y = 0$$

$z^2 \dfrac{d^2y}{dz^2} + z\dfrac{dy}{dz} + (z^2 - \upsilon^2) y = 0 \rightarrow$ PD Bessel dalam y dan z dengan $\upsilon = \upsilon$

PUPD :

$$y(z) = C_1 J_\upsilon (z) + C_2 Y_\upsilon(z)$$

$$Y(x) = C_1 J_\upsilon (\lambda x) + C_2 Y_\upsilon (\lambda x)$$

3. $xy'' + (1 + 2n) y' + xy = 0$ ($y = x^{-n}u$)

Misalnya $y = x^{-n} u$; maka :

$$\frac{dy}{dx} = -n x^{-n-1} u + x^{-n} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-n\,x^{-n-1}\,u + x^{-n}\,\frac{du}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\,[-n\,x^{-n-1}u] + \frac{d}{dx}\left[x^{-n}\,\frac{du}{dx}\right]$$

$$= (n + 1)nx^{-n-2}u - nx^{-n-1}\,\frac{du}{dx} - nx^{-n-1}\,\frac{du}{dx} + x^{-n}\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$= (n + 1)nx^{-n-2}u - 2nx^{-n-1}\,\frac{du}{dx} + x^{-n}\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$x\left((n+1)nx^{-n-2}u - 2nx^{-n-1}\,\frac{du}{dx} + x^{-n}\,\frac{d^2u}{dx^2}\right) + (1+2n)\left[-nx^{-n-1}u + x^{-n}\,\frac{du}{dx}\right] + x\,x^{-n}u = 0$$

PD menjadi :

$$(n + 1)nx^{-n-1}u - 2nx^{-n}\,\frac{du}{dx} + x^{-n+1}\,\frac{d^2u}{dx^2} - nx^{-n-1}u + x^{-n}\,\frac{du}{dx} - 2n^2\,x^{-n-1}u +$$

$$2nx^{-n}\,\frac{du}{dx} + x^{-n+1}u = 0$$

$$[n^2 + n - n - 2n^2] +^{-n-1}u + x^{-n+1}\,\frac{d^2u}{dx^2} + x^{-n}\,\frac{du}{dx} + x^{-n+1}\,u = 0$$

Masing-masing ruas dibagi dengan x^{-n} :

$$-\,n^2x^{-1}u + x\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + xu = 0$$

$$x\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + (x - n^2\,x^{-1})\,u = 0$$

Masing-masing ruas dikalikan dengan x :

$$x^2\,\frac{d^2u}{dx^2} + x\,\frac{du}{dx} + (x^2 - n^2)u = 0 \rightarrow$$ PD Bessel dalam u dan x

dengan $\upsilon = n$

PU PD :

$u(x) = C_1\,J_n\,(x) + C_2\,Y_n\,(x)$; $y = x^{-n}\,u$

$y(x) = x^{-n}\,u(x) = x^{-n}[C_1\,J_n\,(x) + C_2\,Y_n\,(x)]$

$= C_1\,x^{-n}\,J_n\,(x) + C_2\,x^{-n}\,Y_n\,(x)$

4. $x^2y'' - 3xy' + 4(x^4 - 3)y = 0$; $(y = x^2u,\ x^2 = z)$

Misalkan $y = x^2\,u$; maka :

$\frac{dy}{dx}$ = $\frac{d}{dx}$(x^2u) = 2 x u + x^2 $\frac{du}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2x\,u + x^2\frac{du}{dx}\right) = 2u + 2x\frac{du}{dx} + 2x\frac{du}{dx} + x^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$= 2u + 4x\frac{du}{dx} + x^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

PD menjadi :

$$x^2\left(2u + 4x\frac{du}{dx} + x^2\frac{d^2u}{dx^2}\right) + 3x\left(2xu + x^2\frac{du}{dz}\right) + 4(x^4 - 3)x^2\,u = 0$$

$$x^4\frac{d^2u}{dx^2} + (4x^3 - 3x^3)\frac{du}{dx} + (2x^2 - 6x^2 + 4x^6 - 12x^2)u = 0$$

$$x^4\frac{d^2u}{dx^2} + x^3\frac{du}{dx} + (4x^6 - 16x^2)u = 0 \quad \text{dibagi dengan } x^2$$

$$x^4\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (4x^4 - 16)\,u = 0$$

Misalkan : x = z $\rightarrow$ $\frac{dz}{dx}$ = 2x

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 2x\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2x\frac{du}{dz}\right) = 2\frac{du}{dz} + 2x\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$= 2\frac{du}{dz} + 2x\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx}\right) = 2\frac{du}{dz} + 2x\frac{d}{dz}\left(2x\frac{du}{dz}\right)$$

$$= 2\frac{du}{dz}4x^2\frac{d^2u}{dz^2}$$

PD menjadi :

$$x^2\left(2\frac{du}{dz} + 4x^2\frac{d^2u}{dz^2}\right) + x\left(2x\frac{du}{dz}\right) + (4x^4 - 16)u = 0$$

$$4x^4\frac{d^2u}{dz^2}(2x^2 + 2x^2)\frac{du}{dz} + (4x^4 - 16)u = 0$$

$4x^4 \frac{d^2u}{dz^2} + 4x^2 \frac{du}{dz} + (4x^4 - 16)u = 0 \rightarrow$ dibagi dengan $4x^2$

$x^2 \frac{d^2u}{dz^2} + x \frac{du}{dz} + (x^2 - 4)u = 0 \rightarrow$ PD Bessel dalam u dan z dengan $\upsilon = 2$

PU PD : $u(z) = C_1 J_2(z) + C_2 Y_2(z)$

$z = x^2 \rightarrow u(x) = C_1 J_2(x^2) + C_2 Y_2(x^2)$

$z = x^2 u \rightarrow y(x) = x^2 u(x) = x^2 [C_1 J_2(x^2) + C_2 Y_2(x^2)]$

Fungsi Bessel Termodifikasi (Modified Bessel Function)

Persamaan Diferensial :

$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0$ .... (2-44)

dikenal dengan nama persamaan Bessel termodifikasi orde n. Karena bisa ditulis :

$x^2y'' + xy' - (i^2 x^2 + n^2)y = 0$ .... (2-45)

yang merupakan persamaan Bessel dengan variable bebas ix dan mempunyai penyelesaian umum : $y = C_1 J_n(ix) + C_2 Y_n(ix)$ ...... (2-46)

dengan,

$$J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-1)^k \frac{(ix)^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$J_n(ix) = i^n \sum_{k=0}^{\infty} (1-1)^k \frac{i^{2k}\, x^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$i^{-n} J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

Bentuk $[i^{-n}J_n(ix)]$ merupakan fungsi baru yang berharga real dan disebut **fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama** orde n yang dinotasikan dengan $I_n(x)$.

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)} \quad \text{.................................. (2-47)}$$

I-n(x) didapat dengan mengganti n dengan –n sebagai berikut :

$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-n+2k}}{2^{-n+2k}\, k!\Gamma(n+k+1)}$ .... (2-48)

Untuk n tidak bulat I_n dan I_{-n} merupakan penyelesaian yang *linear independence* dari PD (1-44) sehingga penyelesaian umum PD (1) adalah :

$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_{-n}(x)$, n#bilangan bulat .... (2-49)

Untuk n bulat :

$(-1)^n J_{-n}(ix) = J_n(ix)$

$(i^2)^n J_{-n}(ix) = J_n(ix)$

$i^n J_{-n}(ix) = i^{-n} J_n(ix)$

$I_{-n}(x) = I_n(x)$

Untuk n bilangan bulat $I_{-n}(x) = I_n(x)$ linear dependence, sehingga perlu didefinsikan penyelesaian basis yang lain yang bersifat linear independence dengan $I_n(x)$ sebagai berikut :

Dipilih $c_1 = A - \frac{\pi}{2}\frac{B}{\sin n\pi}$, $c_2 = \frac{B}{\sin n\pi}$

$$y = AI_n(x) - \frac{\pi}{2}\frac{B}{\sin n\pi} I_n(x) + \frac{\pi}{2} + \frac{B}{\sin n\pi} I_{-n}(x)$$

maka $y = AI_n(x) + B\,\frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}\right]$

$$y = AI_n(x) + BK_n(x)$$

$$\text{dengan } K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin n\pi}\right]; n \,\#\, \text{bilangan bulat} \\ \lim\limits_{p\to n} \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin n\pi}\right]; n = \text{bilangan bulat} \end{cases}$$

$K_n(x)$ disebut **fungsi Bessel termodifikasi** orde n jenis kedua.

PD Bessel termodifikasi bisa dinyatakan dengan : $x^2y'' + xy' - (\lambda^2x^2 + n^2)\,y = 0$ dengan PUPD : $y = c_1 I_n(\lambda x) + c_2 I_{-n}(\lambda x)$ untuk n # bilangan bulat

$y = c_1 I_n(\lambda x) + c_2 K_n(\lambda x)$ untuk n = bilangan bulat

Untuk $\lambda = \sqrt{i}$, maka PD menjadi :

$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)\,y = 0$

$x^2y'' + xy' + (-ix^2 - n^2)\, y = 0$

Dan PUPD : $y = c_1 I_n(\sqrt{ix}) + c_2 K_n(\sqrt{ix})$

$y = c_1 J_n(i^{3/2}x) + c_2 K_n(i^{1/2}x)$

$$J_n(i^{3/2}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i^{3/2}x)^{n+2k}}{2^{-n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$= i^{3/2\,n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (i^{3k}\, x^{\,n+2k}}{2^{-n+2k}\, k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$j^{3k} = 1$; $k = 0,4,8$.......

$j^{3k} = -i$; $k = 1,5,9$ ......

$j^{3k} = -1$; $k = 2,6,10$......

$j^{3k} = i$; $k = 3,7,11$ ....

Untuk k ganjil $\rightarrow$ $J_n(i^{3/2}x)$ real

Untuk k genap $\rightarrow$ $J_n(i^{3/2}x)$ imaginer

Untuk $k = 2j \rightarrow (-1)^k i^{3k} = (-1)^j$

$k = 2j + 1 \rightarrow (-1)k_i^{3k} = (-1)^j i$

sehingga

$$J_n(i^{3/2}x) = i^{3/2\,n}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{n+4j}}{2^{n+4j}(2j)!\,\Gamma(n+2j+1)} + i\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{n+2+4j}}{2^{n+2+4j}(2j+1)!\,\Gamma(n+2j+2)}\right]$$

$$\approx i^{3/2\,n}\left(\sum_R + i\sum_I\right)$$

Menurut Rumus de Moivre :

$$i^{3/2} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{3/2n} = \cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}$$

Catatan :

$$z = a + ib = \text{cps}(\text{arc tg}\,\frac{b}{a}) + I\sin(\text{arc tg}\,\frac{b}{a})$$

$$z = i \rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

Jadi,

$J_n(i^{3/2}x) = \left(\cos\frac{3n\pi}{2} + i\sin\frac{3n\pi}{2}\right) \quad (\sum_R + i\sum_I)$

$= \left(\cos\frac{3n\pi}{2}\sum_R - \sin\frac{3n\pi}{2}\sum_I\right) + i\left(\cos\frac{3n\pi}{2}\sum_I - \sin\frac{3n\pi}{2}\sum_R\right)$

dengan :

$Ber_n\ x = \cos\ \frac{3n\pi}{2}\sum_I - \sin\ \frac{3n\pi}{2}\sum_I$

$Bei_n\ x = \cos\ \frac{3n\pi}{2}\sum_I - \sin\ \frac{3n\pi}{2}\sum_R$

Untuk n = 0 :

$Ber_0\ x = Ber\ x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\ x^{4j}}{2^{4j}\left[(2j)!\right]^2}$

$Bei_0\ x = Bei\ x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\ x^{4j+2}}{2^{4j+2}\left[(2j)!\right]^2}$

Dengan cara yang sama fungsi $K_n\ (i^{1/2}x)$ dapat juga dinyatakan dalam jumlahan : (deret real) + i (deret real) seperti di atas, dengan

$K_n\ (i^{1/2}\ x) = Ker_n x + i\ Kei_n\ x$

Sehingga PU PD : $x^2\ y'' + xy' - (ix^2 + n^2)\ y = 0$

adalah :

$y = c_1\ (Ber_n\ x + iBei_n x) + c_2\ (Ker_n x + Kei_n x)$

Persamaan yang bisa ditranformasikan kedalam PD Bessel

1. PD : $x^2y'' + (2K + l)xy' + (\alpha^2\ x^{2r} + \beta^2)y = 0$

dengan *k, a, r, β* konstanta

akan mempunyai PU PD :

$y = x^{-k}\ [C_1 J_{x/r}\ (ax^r/r) + C_2\ Y_{x/r}\ (ax^r\ /\ r)]$

$\gamma = \frac{2 - r + s}{2}$

$\lambda = \dfrac{2\sqrt{|a|}}{2 - r + s}$

$n = \dfrac{\sqrt{(1-r)^2 - 4b}}{2 - r + s}$

Jika a < 0 → J_n dan Y_n diganti dengan I_n dan K_n

Jika n # bulat → Y_n dam K_n diganti dengan J_{-n} dan I_{-n}

Contoh :

1. PD : x y" + y' + ay = 0

Dikalikan dengan x :

k = 0; r = ½ ; $\alpha^2 = a \rightarrow \alpha = \sqrt{a}$

$\beta = 0$; $\chi = \sqrt{k^2 - \beta^2} = \sqrt{0^2 - 0^2 = 0}$

Jadi PU PD :

$y = x^0 [C_1 J_0 (2\sqrt{ax}) + C_2 Y_0 (2\sqrt{ax})]$

$= C_1 J_0 (2\sqrt{ax}) + C_2 Y_0 (2\sqrt{ax})$

2. PD : $x^2y'' + x(4x^2 - 3)y' + (4x^8 - 5x^2 + 3)y = 0$

a = - 3; b = 2; c = 3; d = -5

p = 4 ; q = 1

$\rightarrow \alpha = 2$; $\beta = ½$; $\lambda = \sqrt{5}$; n = 1

PU PD : $y = x^2 e^{-x4/2} [c_1 I_1)x\sqrt{5}) + c_2 K_1 (x\sqrt{5})]$

3. PD : $x^2y'' - xy' + (1 + x) y = 0$

dibagi x^3 :

$\dfrac{y''}{x} - \dfrac{y'}{x^2} + \left[\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}\right] y = 0$

$(x^{-1}y')' + (x^{-2} + x^{-3}) y = 0$

r = -1 ; s = -2; a = b = 1; $\alpha = 0$; $\gamma = ½$; $\lambda = 2$; n = 0

PUPD : $y = x [c_1 J_0 (2\sqrt{x}) + c_2 J_0 (2\sqrt{x})]$

4. PD : $9(y'' + \frac{1}{x}y' + y) - \frac{4}{x^2}\ y = 0$

$(y'' + \frac{1}{x}y' + y) - \frac{9}{9x^2}\ y = 0$, dikalikan x^2

$x^2y'' + xy' + x^2y – 4/9\ y = 0$

$x^2y'' + xy' + (x^2 – 4/9)y = 0 \rightarrow$ PD Bessel dengan n = 2/3

PUPD : $y = c_1J_{2/3}\ (x) + c_2J_{-2/3}(x)$

5. PD : $\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = \mu$; R = R (r)

Dikalikan Rr^2 PD menjadi :

$r^2R''rR' - \mu r^2 = 0 \rightarrow$ PD Bessel termodifikasi dengan λ = u; n = 0

PUPD : $R = c_1I_0\ (r\sqrt{\mu}\ ) + c_2\ K_2\ (r\sqrt{\mu}\ )$

6. PD : $xy'' + y' + 2ixy = 0$

atau $x^2\ y'' + xy' + 2ix^2y = 0 \rightarrow$ PD Bessel dengan $\lambda = \sqrt{2i}$

PUPD : $y = c_1J_0\ (x\ \sqrt{2i}\ ) + c_2\ Y_0\ (x\ \sqrt{2i}\ )$

Soal Latihan

Selesaikan PD berikut !

1. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)\,y = 0$
2. $xy'' + y' + \frac{1}{4}\,y = 0$; ($\sqrt{x} = z$)
3. $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{1}{4})\,y = 0$; ($x^2 = z$)
4. $x^2y'' - 3xy' + 4\,(x^4 - 3)\,y = 0$; ($y = x^2 u$, $x^2 = z$)
5. $x^2\,y'' + \frac{1}{4}\,(x + \frac{3}{4})\,y = 0$; ($y = u\,\sqrt{x}$, $\sqrt{x} = z$)
6. $y'' + x^2\,y = 0$; ($y = u\,\sqrt{x}$, $\frac{1}{2}\,x^2 = z$)

Jawaban :

1. $y = AJ_2\,(x) + BY_2\,(x)$
2. $y = AJ_0\,(\sqrt{x}) + BY_0\,(\sqrt{x})$
3. $y = AJ_{1/4}\,(x^2) + BY_{1/4}\,(x^2)$
4. $y = x^2\,[AJ_2\,(x^2) + BY_2\,(x^2)]$
5. $y = \sqrt{x}\,[AJ_{1/2}\,(\sqrt{x}) + BJ_{-1/2}\,(\sqrt{x})]$
6. $y = \sqrt{x}\,[AJ_{1/4}\,(\frac{1}{2}x^2) + BY_{1/4}\,(\frac{1}{2}x^2)]$