

Persamaan Diferensial Orde II

PDB Orde II

- Bentuk umum :

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = r(x)$$

$p(x)$, $g(x)$ disebut koefisien jika $r(x) = 0$, maka Persamaan Differensial diatas disebut homogen, sebaliknya disebut non homogen.

- Persamaan Differensial Biasa linier orde dua homogen dengan koefisien konstan, memiliki bentuk umum :

$$y'' + ay' + by = 0$$

dimana a , b merupakan konstanta sebarang.

Solusi Homogen

Diketahui

$$y'' + ay' + by = 0$$

Misalkan $y = e^{rx}$

Persamaannya berubah menjadi $r^2 + ar + b = 0$, sebuah persamaan kuadrat.

1. Akar real berbeda (r_1, r_2 ; dimana $r_1 \neq r_2$)

Memiliki solusi basis $y_1 = e^{r_1 x}$ dan $y_2 = e^{r_2 x}$ dan mempunyai solusi umum

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Solusi Homogen

2. Akar real kembar (r_1, r_2 ; dimana $r = r_1 = r_2$)
Memiliki solusi basis $y_1 = e^{r x}$ dan $y_2 = x e^{r x}$ dan mempunyai solusi umum

$$y = C_1 e^{r x} + C_2 x e^{r x}$$

3. Akar kompleks kojugate ($r_1 = u + wi, r_2 = u - wi$)
Memiliki solusi basis $y_1 = e^{ux} \cos wx$; dan $y_2 = e^{ux} \sin wx$ dan mempunyai solusi umum

$$y = e^{ux} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$$

Contoh soal

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $(r + 2)(r + 3) = 0$

$$r_1 = -2 \text{ atau } r_2 = -3$$

maka solusinya : $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $(r + 3)(r + 3) = 0$

$$r_1 = r_2 = -3$$

maka solusinya : $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

3. $y'' + 4y = 0$

Persamaan karakteristiknya: $r^2 + 4 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \pm 2i$$

maka solusinya : $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Persamaan Differensial non homogen

Bentuk umum:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = r(x)$$

dengan $r(x) \neq 0$

Solusi total : $y = y_h + y_p$

Dimana y_h = solusi P D homogen

y_p = solusi P D non homogen

Menentukan y_p

1. Metode koefisien tak tentu
2. Metode variasi parameter

Metode koefisien tak tentu

- pilihlah y_p yang serupa dengan $r(x)$, lalu substitusikan ke dalam persamaan.

$r(x)$	y_p
$r(x) = e^{mx}$	$y_p = A e^{mx}$
$r(x) = X^n$	$y_p = A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_0$
$r(x) = \sin wx$	$y_p = A \cos wx + B \sin wx$
$r(x) = \cos wx$	$y_p = A \cos wx + B \sin wx$
$r(x) = e^{ux} \sin wx$	$y_p = e^{ux} (A \cos wx + B \sin wx)$
$R(x) = e^{ux} \cos wx$	$y_p = e^{ux} (A \cos wx + B \sin wx)$

Ctt: Solusi Parsial tidak boleh muncul pada solusi homogennya. Jika hal ini terjadi, kalikan solusi khususnya dengan faktor x atau x^2 sehingga tidak memuat lagi solusi homogennya.

Contoh

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \# \quad (r - 2)(r - 1) = 0$$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogenya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Untuk y_p dipilih $y_p = A e^{-x}$

$$y_p' = -A e^{-x} \quad \# \quad y_p'' = A e^{-x}$$

Kemudian masukan ke PD di atas:

$$A e^{-x} + 3A e^{-x} + 2A e^{-x} = e^{-x} \quad \# \quad 6A e^{-x} = e^{-x} \quad \# \quad A = 1/6$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 1/6 e^{-x}$$

Contoh

$$2. y'' - 3y' + 2y = \cos x$$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \# \quad (r - 2)(r - 1) = 0$$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogenya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Untuk y_p dipilih $y_p = A \cos x + B \sin x$

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x \quad \# \quad y_p'' = -A \cos x - B \sin x$$

Kemudian masukan ke PD di atas:

$$(-A \cos x - B \sin x) - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \cos x$$

$$(-A - 3B + 2A) \cos x + (-B + 3A + 2B) \sin x = \cos x \quad \#$$

$$(-3B + A) \cos x + (3A + B) \sin x = \cos x \quad \# \quad -3B + A = 1 \quad \text{dan} \quad 3A + B = 0$$

Contoh (no. 2 Lanjutan)

Didapat

$$A = 1/10 \text{ dan } B = -3/10$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + (1/10) \cos x - (3/10) \sin x$$

3. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + \cos x$

Jawab:

Dari contoh 1 dan 2 didapat, solusi umumnya adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + (1/6) e^{-x} + (1/10) \cos x - (3/10) \sin x$$

Contoh

$$4. y'' - 3y' + 2y = e^x, y(0)=1, y'(0)=-1$$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \# \quad (r - 2)(r - 1) = 0$$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogenya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Untuk y_p dipilih $y_p = A x e^x$

$$y_p' = A e^x + A x e^x \quad \# \quad y_p'' = 2A e^x + A x e^x$$

Kemudian masukan ke PD di atas:

$$2Ae^x + Axe^x - 3(Ae^x + Axe^x) + 2Axe^x = e^x \quad \# \quad -A e^x = e^x$$

$$\# A = -1$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - x e^x$

Contoh

Kita punya $y(0)=1$ dan $y'(0)=-1$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - x e^x \quad \text{D} \quad 1 = C_1 + C_2$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x - e^x - x e^x \quad \text{D} \quad 0 = 2C_1 + C_2$$

Didapat

$$C_1 = -1, \text{ dan } C_2 = 2$$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah

$$y = -e^{2x} + 2e^x - x e^x$$

Latihan

1. $y'' - 3y' - 4y = 3x^2 + 2$
2. $y'' - 9y = x + 2$
3. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x}$
4. $y'' + 4y = 2 \sin x$
5. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$
6. $y'' + 4y = 2 \cos 2x$
7. $y'' + 2y' = 3x^2 + 2$
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
9. $y'' + 3y' - 4y = 3x^2 + 2$
10. $y'' + 9y = \sin 3x + e^{2x}$
11. $y'' + y' = e^x + 3x$
12. $y'' - 4y = 4 \sin x$, $y = 4$, $y' = 0$ bila $x = 0$
13. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, $y = 1$, $y' = 0$ bila $x = 0$

Metode Variasi Parameter

- Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan-persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.
- Persamaan Differensial orde dua non homogen

$$y'' + a y' + b y = r(x)$$

memiliki solusi total : $y = y_h + y_p$

misal $y_p = u y_1 + v y_2$ dimana $u = u(x)$; $v = v(x)$

maka $y'_p = u' y_1 + u y_1' + v y_2' + v' y_2$

pilih u dan v sehingga :

$$u' y_1 + v' y_2 = 0 \dots\dots\dots(*)$$

Metode Variasi Parameter

$$y'_p = u y_1' + v y_2'$$

$$y''_p = u' y_1' + u y_1'' + v' y_2' + v y_2''$$

Substitusikan y_p, y_p', y_p'' ke dalam persamaan awal sehingga di dapatkan :

$$b (u y_1 + v y_2) = r(x)$$

$$u (y_1'' + a y_1' + b y_1) + v (y_2'' + a y_2' + b y_2) + u' y_1' + v' y_2' = r(x)$$

$$u' y_1' + v' y_2' = r(x) \dots \dots \dots (**)$$

Metode Variasi Parameter

Eliminasi (*) dan (**) di peroleh :

$$u' y_1 + v' y_2 = 0$$

$$u' y_1' + v' y_2' = r(x)$$

dengan aturan cramer diperoleh

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow u = -\int \frac{y_2 r(x)}{W} dx \quad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \Rightarrow v = \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$$

Keterangan: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Contoh

1. $y'' + y = \tan x$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 + 1 = 0 \quad \# \quad r = \pm i$$

Jadi solusi homogenya adalah $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Untuk y_p dipilih $y_p = u y_1 + v y_2$ dengan

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x \\ y'_1 = -\sin x \quad y'_2 = \cos x \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2 \\ = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{array}$$

Sehingga diperoleh

$$u = - \int \frac{\sin x \tan x}{1} dx = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = - \int (\sec x - \cos x) dx$$

Contoh (Lanjutan)

$$= -\int \sec x \, dx + \int \cos x \, dx = -\ln|\sec x + \tan x| + \sin x$$

Sedangkan,

$$v = \int \frac{\cos x \tan x}{1} \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

Jadi solusi non homogen didapat

$$\begin{aligned} y_p &= -(\ln|\sec x + \tan x|)\cos x + \sin x \cos x - \sin x \cos x \\ &= -(\ln|\sec x + \tan x|)\cos x \end{aligned}$$

Jadi solusi umum dari persamaan diferensial di atas

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (\ln|\sec x + \tan x|)\cos x$$

Contoh

$$2. y'' + 9y = \sec^2 3x$$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 + 9 = 0 \quad \# \quad r = \pm 3i$$

Jadi solusi homogenya adalah $y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

Untuk y_p dipilih $y_p = u y_1 + v y_2$ dengan

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \cos 3x \quad y_2 = \sin 3x \\ y'_1 = -3 \sin 3x \quad y'_2 = 3 \cos 3x \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2 \\ = 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3 \end{array}$$

Sehingga diperoleh

$$u = -\int \frac{\sin 3x \sec^2 3x}{3} dx = -\frac{1}{3} \int \tan^2 3x dx = -\frac{1}{3} \int (\sec^2 3x - 1) dx$$

Contoh (Lanjutan)

$$= \frac{1}{3} \int dx - \frac{1}{3} \int \sec^2 3x dx = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \tan 3x$$

Sedangkan,

$$v = \int \frac{\cos 3x \sec^2 3x}{3} dx = \frac{1}{3} \int \sec 3x dx = \frac{1}{9} \ln \sec 3x + \tan 3x$$

Jadi solusi non homogen didapat

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \tan 3x \cos 3x + \frac{1}{9} (\ln \sec 3x + \tan 3x) \sin 3x \\ &= \frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{9} (\ln \sec 3x + \tan 3x) \sin 3x \end{aligned}$$

Jadi solusi umum dari persamaan diferensial di atas

$$y = C_1 \cos 3x + \left(C_2 - \frac{1}{9} \right) \sin 3x + \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} (\ln \sec 3x + \tan 3x) \sin 3x$$

Latihan

1. $y'' + y = \operatorname{cosec} x \cot x$

2. $y'' + y = \cot x$

3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$

5. $y'' + 4y = 3 \operatorname{cosec} 2x$

6. $y'' + 4y = 3 \operatorname{cosec} x$

7. $4y'' + y = 2 \sec(x/2)$

8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

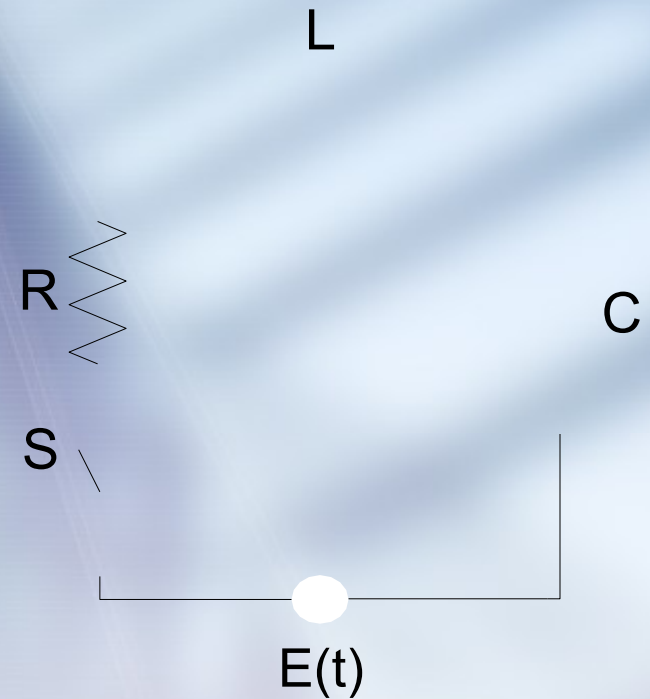
The background features a blurred, low-angle view of a modern building with a glass facade. A prominent white horizontal band runs across the middle of the image, serving as a backdrop for the title text. The overall color palette is dominated by various shades of blue and white.

Aplikasi PD Orde II

Penerapan dalam Rangkaian Listrik

Perhatikan suatu rangkaian (gambar samping) dengan sebuah tahanan (R ohm), dan sebuah kumparan (L Henry) dan sebuah kapasitor (C farad) dalam rangkaian seri dengan sumber gaya elektromotif yang menyediakan suatu voltase $E(t)$ volt pada saat t . Hukum Kirchhoff untuk kasus ini, muatan Q pada kapasitor, diukur dalam coulomb, memenuhi

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$



(Lanjutan)

Arus $I = \frac{dQ}{dt}$, diukur dalam ampere, memenuhi

persamaan yang diperoleh dengan pendiferensialan persamaan di atas terhadap t , yaitu

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t)$$

Contoh

Tentukan muatan Q dan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangkaian RLC dengan $R = 16 \text{ ohm}$, $L = 0,02$ henry, $C = 2 \times 10^{-4}$ farad dan $E = 12$ Volt dengan diasumsikan saat awal arus dan muatannya adalah nol (pada waktu saklar S ditutup)

Jawab

Dari hukum kirchhoff, tentang rangkaian RLC didapat

$$0,02 Q'' + 16 Q' + 5000 Q = 12$$

Atau bisa disederhanakan

$$Q'' + 800 Q' + 250000 Q = 600$$

Contoh

Persamaan karakteristiknya adalah

$$r^2 + 800r + 250000 = 0$$

Diperoleh akar – akar persamaannya :

$$r = -400 \pm 300i$$

Solusi homogen :

$$Q_h = e^{-400t} \left(C_1 \cos 300t \pm \frac{C_2 \sin 300t}{2} \right)$$

Dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, dengan mengambil $Q_p = A$, di dapat

$$Q_p = 2,4 \times 10^{-3}$$

Jadi solusi khususnya adalah

$$Q = 2,4 \times 10^{-3} + e^{-400t} \left(C_1 \cos 300t \pm \frac{C_2 \sin 300t}{2} \right)$$

Rangkaian RLC

Dengan memasukkan syarat awal $Q(0) = 0$ dan $I(0) = 0$ maka diperoleh

$$C_1 = -2,4 \times 10^{-3} \quad \text{dan} \quad C_2 = -3,2 \times 10^{-3}$$

Jadi solusi khususnya adalah

$$Q = 10^{-3} \left[2,4 - e^{-400t} (2,4 \cos 300t + 3,2 \sin 300t) \right]$$

Dengan pendiferensialan diperoleh

$$I(t) = Q'(t) = 2e^{-400t} \sin 300t$$

Latihan

1. Hitunglah kuat arus yang mengalir dalam suatu rangkaian RLC dengan nilai $R = 100 \text{ ohm}$, $L = 0,1 \text{ henry}$, $C = 10^{-3} \text{ farad}$ yang dihubungkan dengan sumber tegangan $E(t) = 155 \sin 377 t$ dengan diasumsikan pada saat awal arus dan muatannya adalah nol.
2. Tentukan muatan Q sebagai fungsi dari waktu t yang mengalir dalam suatu rangkaian RC dengan $R = 10^6 \text{ ohm}$, $C = 10^{-6} \text{ farad}$ dan sumber tegangannya konstan dengan $E = 1 \text{ Volt}$ dan diasumsikan saat awal muatannya adalah nol.

Latihan

3. Hitunglah muatan dan kuat arus I yang mengalir dalam suatu rangkaian RLC dengan nilai $R = 1000$ ohm, $L = 3,5$ henry, $C = 2 \times 10^{-6}$ farad yang dihubungkan dengan sumber tegangan $E(t) = 120 \sin 377t$ dengan diasumsikan pada saat awal arus dan muatannya adalah nol.
4. Tentukan kuat arus I sebagai fungsi dari waktu t yang mengalir dalam suatu rangkaian LC dengan $L = 10^{-2}$ Henry, $C = 10^{-7}$ farad dan sumber tegangannya konstan dengan $E = 20$ Volt dan diasumsikan saat awal muatan dan arusnya adalah nol.