

1.5 NILAI MUTLAK & SIFAT-SIFAT NILAI MUTLAK

Misal x suatu bilangan real, nilai mutlak x dinotasikan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai panjang atau jarak bilangan tersebut dari bilangan 0.

Definisi

Misal x real maka:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

Bentuk lain dari definisi di atas adalah: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Contoh:

$$|8| = 8, \quad \left| \frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}, \quad |3| = 3, \quad |-2| = -(-2) = 2, \quad \left| -\frac{2}{7} \right| = -\left(-\frac{2}{7} \right) = \frac{2}{7} \text{ dst.}$$

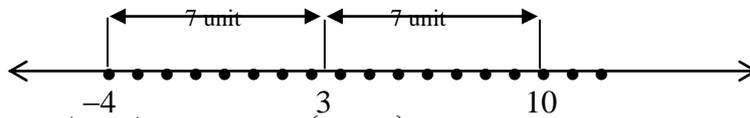
Selanjutnya, sifat-sifat nilai mutlak diterangkan sebagai berikut.

SIFAT-SIFAT NILAI MUTLAK

Sifat 1. Jika $x, y \in R$ maka:

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, asal $y \neq 0$
- e) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Ketaksamaan segitiga)
- f) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Secara geometris, nilai mutlak $|x - a|$ dapat diartikan sebagai jarak dari a ke x . Sebagai contoh, jika $|x - 3| = 7$ maka artinya x berjarak 7 unit di sebelah kanan atau di sebelah kiri 3, seperti gambar di bawah.



Jadi penyelesaian $|x - 3| = 7$ adalah $\{-4, 10\}$.

Dengan mengingat nilai mutlak sebelumnya kiranya mudah dipahami sifat berikut:

Sifat 2. Jika $a \geq 0$, maka: $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$.

Contoh:

$|x| = 4$ berarti $x = 4$ atau $x = -4$

$$|3x| = 5 \Leftrightarrow 3x = 5 \text{ atau } 3x = -5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ atau } x = -\frac{5}{3}$$

Dengan cara yang sama

$$|2x - 3| = 7 \text{ berarti } 2x - 3 = 7 \text{ atau } 2x - 3 = -7$$

$$\Leftrightarrow 2x = 10 \text{ atau } 2x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ atau } x = -2$$

Sifat 3. Jika $a \geq 0$, maka:

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ atau $x \geq a$.

Contoh:

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak: $|2x - 3| \geq 7$.

Jawab:

$$|2x - 3| \geq 7 \Leftrightarrow (2x - 3) \leq -7 \text{ atau } (2x - 3) \geq 7$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq -4 \text{ atau } 2x \geq 10$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ atau } x \geq 5$$

Jadi penyelesaian pertidaksamaan adalah $x \leq -2$ atau $x \geq 5$

Sifat 4:

$$|x| < |y| \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x-1| < 2|x-3|$

Jawab:

Menurut sifat 4 di atas, maka:

$$|x-1| < 2|x-3|$$

$$\Leftrightarrow |x-1| < |2x-6|$$

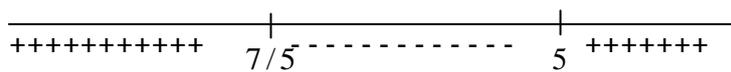
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 < (2x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 4x^2 - 24x + 36$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 22x + 35 > 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-7)(x-5) > 0$$

Titik kritis pertidaksamaan adalah $x = 7/3$ dan $x = 5$ sehingga gambar garis bilangan



Gambar 1.5

Jadi penyelesaian pertidaksamaan $|x-1| < 2|x-3|$ adalah $(-\infty, 7/3) \cup (5, \infty)$