LIMIT FUNGSI

Limit Fungsi

Untuk memahami limit secara intuisi, mari kita perhatikan contoh berikut. Misalkan fungsi f didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= 2x + 3 \qquad (x \neq 1)$$

$f(x)$ terdefinisi untuk setiap x kecuali x = 1. Kita akan menyelidiki nilai fungsi bilamana x dekat dengan 1 tetapi tidak sama dengan 1.

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	....	1	....	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	4,8	4,98	4,998	4,9998	...	?	....	5,0002	5,002	5,02	5,2

Dari tabel di atas nampak bahwa bila x bergerak semakin dekat dengan 1, baik dari kiri (x < 1) maupun dari kanan (x > 1), $f(x)$ bergerak semakin dekat ke 5.

Dalam lambang matematis ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 \; atau \; \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$$

Definisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to a} f(x) = L$, berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari a, maka $f(x)$ dekat ke L.

Teorema Limit

Misal n bilangan bulat positip, k bilangan real, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di titik $x = c$, maka:

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to c} (f(x)\ \ g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, $asalkan \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$

9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

Teorema di atas, dapat diaplikasikan dalam banyak hal pada penyelesaian soal-soal tentang limit.

Contoh:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 = 3 \lim\limits_{x \to 2} x^2$ ....(3)

   $= 3\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2$ ....(8)

   $= 3(2)^2$ ....(2)

   $= 12$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x \to 2}}$ ....(7)

   $= \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 3}{\lim\limits_{x \to 2} x}$ ....(5)

   $= \dfrac{2-3}{2}$

   $= -\dfrac{1}{2}$

3. Jika $\lim_{x \to a} f(x) = 3 \; dan \; \lim_{x \to a} g(x) = -1$

Tentukan:

a. $\lim_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \ldots$

Jawab

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a}\{ f^2(x) + g^2(x)} \quad \text{........(9)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to a} f^2(x) + \lim_{x \to a} g^2(x)} \quad \text{.....(4)}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^2 + \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)^2} \quad \text{.....(8)}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$