PENGGUNAAN TURUNAN: MAKSIMUM & MINIMUM

7.1 Maksimum dan Minimum.

Definisi 7.1.1. (nilai maksimum dan minimum)

Misalkan S daerah asal f dan S memuat titik c, kita katakan bahwa :

1. $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) > f(x)$, untuk setiap $x \in S$.
2. $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) < f(x)$, untuk setiap $x \in S$.
3. $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada S jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Tidak semua fungsi mempunyai nilai maksimum atau minimum. Fungsi yang tidak mempunyai nilai maksimum atau minimum dapat mempunyai maksimum atau minimum dengan membatasi daerah asalnya.

Teorema 7.1. (eksistensi ekstrim)

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka f mempunyai maksimum dan minimum.

Biasanya fungsi yang ingin kita maksimum dan minimumkan akan mempunyai suatu interval I sebagai daerah asalnya. Beberapa dari interval ini mempunyai titik ujung. Jika sebuah titik dimana $f'(c) = 0$, maka c disebut titik stasioner. Jika c adalah titik dalam dari I dimana $f'(c)$ tidak ada, maka c disebut titik singular. Sebarang titik dalam daerah asal f yang termasuk salah satu dari ketiga titik yang dikemukakan di atas disebut tittik kritis dari f.

Definisi 7.1.2. (titik kritis)

Misalkan fungsi f kontinu pada interval terbuka I yang memuat c, titik $(c, f(c))$ dinamakan titik kritis dari f jika $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

<u>Catatan</u> : titik kritis tidak selalu merupakan tittik ekstrim.

Teorema 7.1.2. (titik kritis terhadap nilai ekstrim)

Misalkan f punya turunan pada interval I yang memuat titik c . Jika f (c) adalah nilai ekstrim maka c haruslah suatu titik kritis yaitu c berupa salah satu dari :

1. Titik ujung dari I
2. Titik stasioner dari f atau titik c dimana $f'(c) = 0$.
3. Titik singular dari f atau titik c dimana $f'(c)$ tidak ada.

Contoh 7.1.

Carilah nilai ekstrim dari fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, pada $I = [-\frac{1}{2}, 2]$

Penyelesaian:

$f(x) = -2x^3 + 3x^2$, pada $[-\frac{1}{2}, 2]$. Sebelum mencari nilai ekstrim maka akan di cari titik-titik kritis yaitu :

1. Titik ujung : karena I merupakan interval tertutup maka $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 2$ merupakan titik-titik ujung dari f pada I.
2. Titik stasioner : $f(x) = -2x^3 + 3x^2 \rightarrow f'(x) = -6x^2 + 6x$, untuk menentukan titik stasioner, misalkan $f'(x) = 0$ sehingga $-6x^2 + 6x = 0$ atau $-6x(x-1) = 0$ sehingga $x = 0$ atau $x = 1$ merupakan titik stasioner dari f pada I.
3. Titik singular : karena $f'(x)$ terdefinisi pada seluruh bilangan riil maka titik singular tidak ada.

Jadi titik kritis dari fungsi f adalah : $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$ dan $x = 2$.

Untuk menentukan nilai ekstrim dari f, gantilah nilai x pada $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ dengan titik-titik kritis, maka

$f(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2 = 1$,

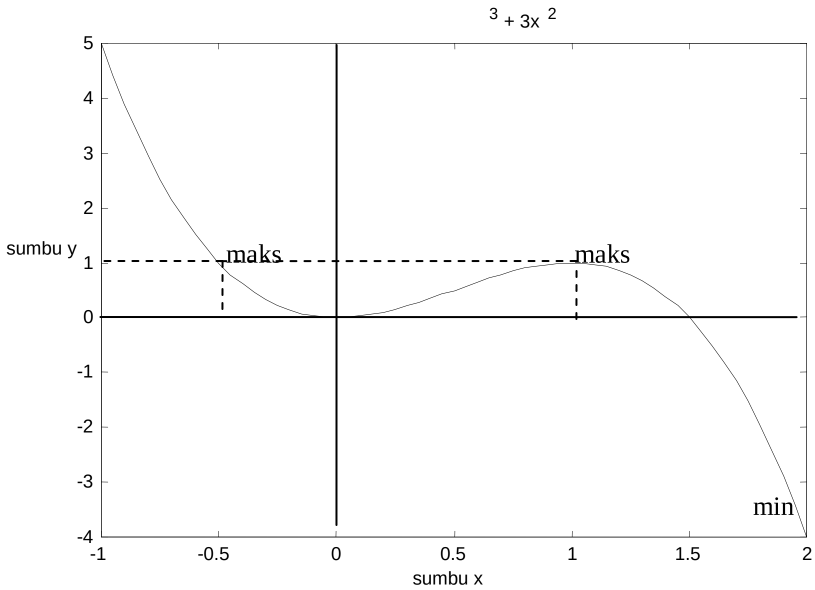
$f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = 0$,

$f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = 1$, dan

$f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 = -4$.

Dari nilai-nilai tersebut maka nilai ekstrim dari f adalah : nilai maksimum (f_{maks}) = 1 dicapai pada $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$, dan nilai minimum (f_{min}) = - 4 dicapai pada $x = 2$.

Grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4.1. Grafik f (x) = - $2x^3 + 3x^2$