

INTEGRAL TAK TENTU

Integral

Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial), sehingga integral disebut juga anti turunan. Terdapat dua macam integral, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral tentu yaitu integral yang nilainya tertentu, yaitu ada batas bawah dan batas atasnya yang digunakan untuk menentukan nilai integral tersebut. Sedangkan integral tak tentu, yaitu integral yang nilainya tak tentu. Integral dapat digunakan untuk menentukan luas suatu bidang, menentukan volume benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral ini diaplikasikan pada berbagai bidang ilmu selain matematika, seperti bidang ilmu ekonomi, fisika, biologi, teknik, dan bidang ilmu lainnya.

Integral Tak Tentu

Karena integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan. Turunan suatu fungsi $y = f(x)$ adalah $y' = f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$, sedangkan notasi integral dari suatu fungsi $y = f(x)$

adalah $\int y \, dx = \int f(x) \, dx$ yang dibaca “integral y terhadap x”.

Turunan suatu fungsi konstan adalah 0 atau integral 0 adalah suatu fungsi konstan, biasanya diwakili oleh notasi c.

Rumus umum integral dari $y = ax^n$ adalah $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ atau ditulis :

$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \quad \text{untuk } n \neq -1$$

Contoh: Tentukan :

- a. $\int 2x^3 \, dx$
- b. $\int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2) \, dx$
- c. $\int \frac{8}{3x^4} \, dx$
- d. $\int 2x\sqrt{x} \, dx$

Penyelesaian :

$$a. \int 2x^3 dx = \frac{2}{4}x^4 + c = \frac{1}{2}x^4 + c$$

$$b. \int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 2) dx = x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + c$$

$$c. \int \frac{8}{3x^4} dx = \int \frac{8}{3}x^{-4} dx = \frac{8}{3(-3)}x^{-3} + c = -\frac{8}{9x^3} + c$$

$$d. \int 2x\sqrt{x} dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$$

Pemakaian Integral Tak Tentu

Pada integral tak tentu terdapat nilai konstanta c yang tidak tentu nilainya. Untuk menentukan fungsi f dari suatu fungsi turunan, maka harus ada data yang lain sehingga harga c dapat diketahui.

Contoh 1: Diketahui $f'(x) = 5x - 3$ dan $f(2) = 18$. Tentukan $f(x)$!

Penyelesaian:

$$f(x) = \int (5x - 3) dx = \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$$

$$f(2) = 18 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(2)^2 + 3 \cdot 2 + c = 18$$

$$\Leftrightarrow 10 + 6 + c = 18$$

$$\Leftrightarrow 16 + c = 18 \Leftrightarrow c = 2 \quad \text{Jadi } f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$$

Contoh 2: Jika gradien garis singgung di titik (x,y) pada sebuah kurva yang melalui titik $(3,4)$ ditentukan $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$, maka tentukan persamaan kurva tersebut !

Penyelesaian :

$$f(x) = \int (3x^2 - 8x + 5) dx = x^3 - 4x^2 + 5x + c$$

$$f(3) = 4 \Leftrightarrow 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + c = 4$$

$$\Leftrightarrow 27 - 36 + 15 + c = 4$$

$$\Leftrightarrow c = -2$$

$$\text{Jadi } f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$