

INTEGRAL: INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI, INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI, & INTEGRAL PARSIAL

Integral Fungsi Trigonometri

Kita telah mempelajari turunan fungsi trigonometri yang secara ringkas dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x$$

$$\tan x \rightarrow \sec^2 x$$

$$\cot x \rightarrow -\operatorname{cosec}^2 x$$

→ artinya turunan.

Karena integral adalah invers dari turunan maka :

$$\text{Dari } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \text{ diperoleh } \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\text{Dari } \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \text{ diperoleh } \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\text{Dari } \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \text{ diperoleh } \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

Contoh: Tentukan :

$$a. \int (5 \sin x + 2 \cos x) \, dx$$

$$b. \int (-2 \cos x - 4 \sin x + 3) \, dx$$

Penyelesaian :

$$a. \int (5 \sin x + 2 \cos x) \, dx = -5 \cos x + 2 \sin x + c$$

$$b. \int (-2 \cos x - 4 \sin x + 3) \, dx = -2 \sin x + 4 \cos x + 3x + c$$

Integral dengan Substitusi

Cara menentukan integral dengan menggunakan cara substitusi, yaitu dengan mengubah bentuk integral tersebut ke bentuk lain dengan notasi lain yang lebih sederhana sehingga mudah menyelesaikannya. Cara ini digunakan jika bagian yang satu ada kaitan turunan dari bagian yang lain.

Contoh 1 : Tentukan integral dari

$$a. \int 2x(4x^2 - 1)^{10} dx$$

$$b. \int 2\sin^5 x \cos x dx$$

Penyelesaian :

a. Misal : $u = 4x^2 - 1$

Maka:

$$\frac{du}{dx} = 8x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

Sehingga :

$$\int 2x(4x^2 - 1)^{10} dx = \int 2x.u^{10} \cdot \frac{du}{8x} = \int \frac{1}{4} u^{10} du = \frac{1}{4 \cdot 11} u^{11} + c = \frac{1}{44} (4x^2 - 1)^{11} + c$$

b. Misal $u = \sin x$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

Sehingga :

$$\int 2\sin^5 x \cos x dx = \int 2u^5 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int 2u^5 du = \frac{2}{6} u^6 + c = \frac{1}{3} \sin^6 x + c$$

Integral Parsial

Bagaimana jika dua bagian pada suatu integral tidak ada kaitan turunan antara bagian yang satu dengan bagian lainnya? Untuk itu perlu ada cara lain untuk menyelesaikannya yaitu dengan integral parsial.

Seperti telah kita ketahui pada turunan jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$.

Jika kita integralkan kedua ruas, maka akan didapat :

$$\int y' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \Leftrightarrow \int uv' dx = y - \int u'v dx = uv - \int u'v dx$$

Rumus di atas sering disingkat dengan :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Contoh 1 : Tentukan :

a. $\int 2x(5x+1)^6 dx$

b. $\int x \sin x dx$

Penyelesaian : a. Misal $2x = u$ maka $2 dx = du$

$$\text{Misal } dv = (5x+1)^6 dx \rightarrow v = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (5x+1)^7 = \frac{1}{35} (5x+1)^7$$

$$\begin{aligned} \int 2x(5x+1)^6 dx &= 2x \cdot \frac{1}{35} (5x+1)^7 - \int \frac{1}{35} (5x+1)^7 \cdot 2 dx \\ &= \frac{2x}{35} (5x+1)^7 - \frac{2}{35} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} (5x+1)^8 + c \\ &= \frac{2x}{35} (5x+1)^7 - \frac{1}{700} (5x+1)^8 + c \end{aligned}$$

b. Misal $x = u$ maka $dx = du$

$$\text{Misal } dv = \sin x dx \text{ maka } v = -\cos x$$

$$\int x \sin x dx = x \cdot -\cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$