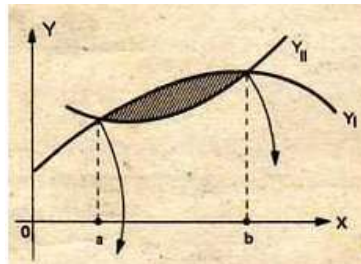
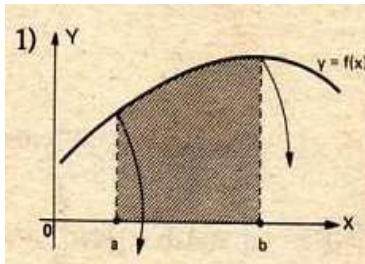


PENGGUNAAN INTEGRAL: VOLUME BENDA PUTAR

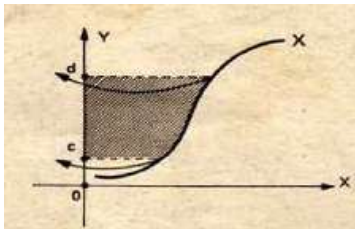
Volume Benda Putar

a. Pemutaran mengelilingi sumbu X

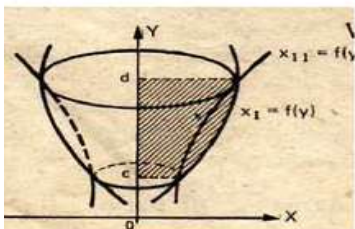


b. Pemutaran mengelilingi sumbu Y

$$1. V = \pi \int_c^d x^2 dy$$



$$2. V = \pi \int_c^d (x_1^2 - x_2^2) dy$$



Benda putar yang sederhana dapat kita ambil contoh adalah tabung dengan besar volume adalah hasilkali luas alas (luas lingkaran) dan tinggi tabung. Volume dari benda putar secara umum dapat dihitung dari hasilkali antara luas alas dan tinggi. Bila luas alas dinyatakan dengan $A(x)$ dan tinggi benda putar adalah

panjang selang $[a, b]$ maka volume benda putar dapat dihitung menggunakan integral tentu sebagai berikut :

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Untuk mendapatkan volume benda putar yang terjadi karena suatu daerah diputar terhadap suatu sumbu, dilakukan dengan menggunakan dua buah metode yaitu metode cakram dan kulit tabung.

a. Metode Cakram

Misal daerah dibatasi oleh $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, dan $x = b$ diputar dengan sumbu putar sumbu x . Volume benda pejal/padat yang terjadi dapat dihitung dengan memandang bahwa volume benda padat tersebut merupakan jumlah tak berhingga cakram yang berpusat di titik-titik pada selang $[a, b]$. Misal pusat cakram $(x_0, 0)$ dan jari-jari $r = f(x_0)$.

Maka luas cakram dinyatakan : $A(x_0) = \pi f^2(x_0)$

Oleh karena itu, volume benda putar : $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$

Sedang bila grafik fungsi dinyatakan dengan $x = g(y)$, $x = 0$, $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y maka volume benda putar :

$$V = \int_c^d \pi (g(y))^2 dy$$

Bila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) \geq 0$, $y = g(x) \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, $x = a$ dan $x = b$ diputar dengan sumbu putar sumbu X maka volume:

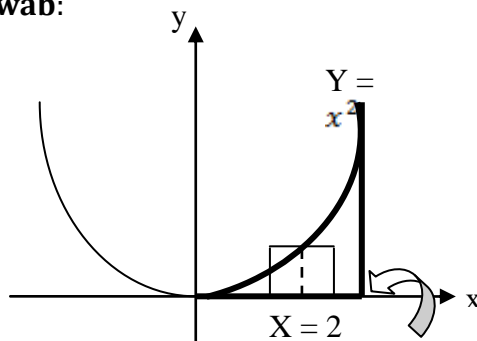
$$V = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Bila daerah yang dibatasi oleh $x = f(y) \geq 0$, $x = g(y) \geq 0$, $f(y) \geq g(y)$ untuk setiap $y \in [c, d]$, $y = c$ dan $y = d$ diputar dengan sumbu putar sumbu Y maka volume :

$$V = \int_c^d \pi (f^2(y) - g^2(y)) dy$$

Contoh 1:

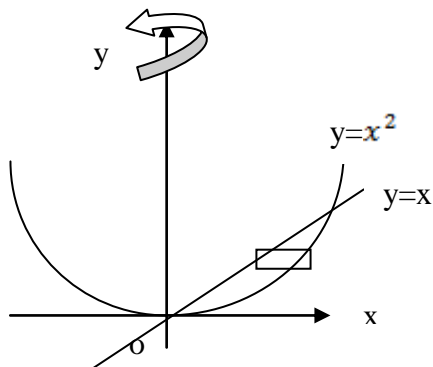
Hitung volume benda yang terjadi jika daerah pada kuadran 1 yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x.

Jawab:

Daerah pada kuadran 1 yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan garis $x = 2$

Hitung volume dengan menggunakan persamaan:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \\
 &= \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^2 x^4 dx \\
 &= \frac{1}{5} \pi (2^5 - 0) \\
 &= \frac{32}{5} \pi
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Gambar daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = x$

Hitung volume benda putar dari daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = x$ jika diputar pada sumbu y .

Jawab:

Tentukan titik potong kedua kurva tersebut:

$$\begin{array}{l}
 y = x^2 \\
 y = x
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 x^2 = x \\
 x^2 - x = 0 \\
 x(x - 1) = 0 \\
 x = 0 \vee x = 1 \\
 y = 0 \quad y = 1
 \end{array}$$

Jadi titik potongnya adalah $(0,0)$ dan $(1,1)$

Hitung volume dengan persamaan:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - (y)^2 \right) dy \\
 &= \pi \int_0^1 (y - y^2) dy \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right)_0^1 \\
 &= \pi \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{6} \pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

b. Metode Kulit Tabung

Metode kulit tabung sebagai alternatif lain dalam perhitungan volume benda putar yang mungkin lebih mudah diterapkan bila kita bandingkan dengan metode cakram. Benda putar yang terjadi dapat dipandang sebagai tabung dengan jari-jari kulit luar dan dalamnya berbeda, maka volume yang akan dihitung adalah volume dari kulit tabung. Untuk lebih memperjelas kita lihat uraian berikut.

Pandang tabung dengan jari-jari kulit dalam dan kulit luar berturut-turut r_1 dan r_2 , tinggi tabung h . Maka volume kulit tabung adalah :

$$\Delta V = (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h = 2\pi r h \Delta r$$

dengan : $\frac{r_2 - r_1}{2} = r$ (rata-rata, jari-jari), $r_2 - r_1 = \Delta r$

Bila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y maka kita dapat memandang bahwa jari-jari $r = x$ dan $\Delta r = \Delta x$ dan tinggi tabung $h = f(x)$. Oleh karena itu volume benda putar yang terjadi adalah

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Misal daerah dibatasi oleh

kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a, b]$, $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y. Maka volume benda putar

$$V = \int_a^b 2\pi x (f(x) - g(x)) dx$$

Bila daerah dibatasi oleh grafik yang dinyatakan dengan

$x = f(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ diputar mengelilingi sumbu X, maka volume =

$$V = \int_c^d 2\pi y (f(y)) dy$$

Sedang untuk daerah yang dibatasi oleh

$x = f(y)$, $x = g(y)$, $f(y) \geq g(y)$, $y \in [c, d]$, dan $y = c$ dan $y = d$ diputar mengelilingi sumbu X. Maka volume benda putar yang didapat dinyatakan dengan

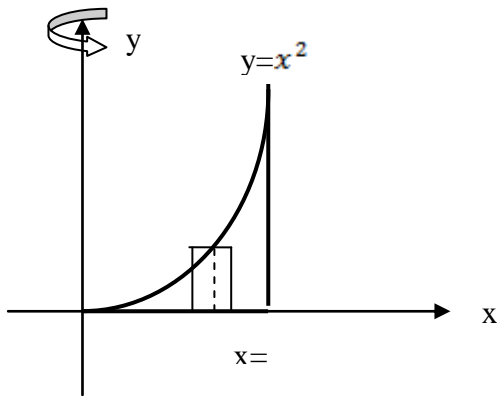
$$V = \int_c^d 2\pi y (f(y) - g(y)) dy$$

Contoh 1:

Hitung volume benda jika daerahnya dibatasi dengan $y=x^2$ dan $x=2$ dan diputar mengelilingi sumbu y .

Jawab:

Daerah yang dibatasi $y = x^2$, sumbu x dan garis $x = 2$



Hitung volume dengan menggunakan persamaan:

$$V = \int_0^2 2\pi x x^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x^3 dx$$

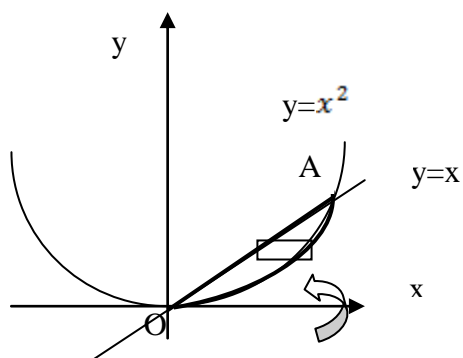
$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi (2^4 - 0)$$

$$= 8\pi \text{ satuan volume}$$

Contoh 2:

Hitunglah volume benda putar pada gambar dibawah ini jika diputar mengelilingi sumbu x .

Jawab:

Hitung volume dengan menggunakan persamaan:

$$V = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^2) dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{1}{3} y^3 \right)_0^1$$

$$= 2\pi \left(\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) - 0 \right)$$

$$= \frac{2}{15} \pi \text{ satuan volume}$$

Daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = x$