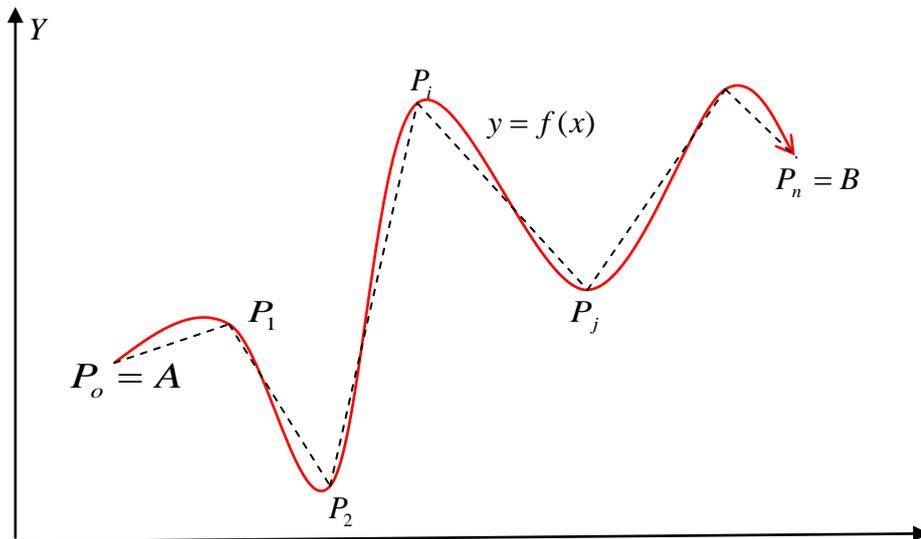


PENGGUNAAN INTEGRAL: PANJANG BUSUR

Panjang Busur



Pada gambar di atas, AB adalah suatu bagian kurva $y = f(x)$. Berdasarkan definisi, AB merupakan limit penjumlahan dari panjang sekumpulan tali busur $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-2}P_{n-1}, P_{n-1}B$ yang menghubungkan titik-titik pada busur itu. Jika banyaknya titik-titik pada kurva $y = f(x)$ banyakya menuju tak hingga maka panjang tiap tali busur tersebut menuju nol.

Selanjutnya jika $A(a, c)$ dan $B(b, d)$ sebarang dua titik pada kurva $y = f(x)$ dengan turunan $y = f(x)$ adalah $y' = f'(x)$ yang masing-masing kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ maka panjang tali busur dinyatakan oleh

$$s = \int_{AB} ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Dengan cara yang sama, jika $A(a, c)$ dan $B(b, d)$ dua titik pada kurva yang persamaannya dinyatakan dengan $x = f(y)$ dengan $x = f(y)$ turunannya adalah $x' = f'(y)$ yang masing-masing kontinu pada $c \leq y \leq d$ maka panjang busur AB dinyatakan oleh

$$s = \int_{AB} ds$$

$$= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Apabila persamaan kurva dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ dengan } t_1 \leq t \leq t_2$$

Dan jika syarat kontinuitasnya dipenuhi maka panjang tali busur AB dinyatakan oleh:

$$s = \int_{AB} ds$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Contoh 1:

Gunakan dengan teknik integral untuk menentukan panjang ruas garis $y = 2x + 3$ antara titik (1,5) dan (3,9). Bandingkan hasilnya dengan menggunakan rumus jarak.

Jawab:

Karena $y = 2x + 3$ diperoleh $\frac{dy}{dx} = 2$ sehingga

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \sqrt{1 + (2)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}x\right)_1^3 = 3\sqrt{5} - 1\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Dengan menggunakan rumus jarak yang menghubungkan dua titik

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (9-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Kedua cara memberikan hasil yang sama.

Contoh 2:

Tentukan panjang tali busur AB pada kurva $y^2 = 8x^2$ jika $A(0,0)$ dan $B(1,2)$

Jawab :

Karena $y^2 = 8x^2$ maka $2y \frac{dy}{dx} = 16x$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{16x}{\sqrt{8x^2}}$ dan berubah dari $x = 0$ dan

$x = 1$ sehingga

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{16x}{\sqrt{8x^2}}\right)^2} dx \\
 &\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + (32)} dx \\
 &= (x\sqrt{33})_0^1 \\
 &= (\sqrt{33})
 \end{aligned}$$