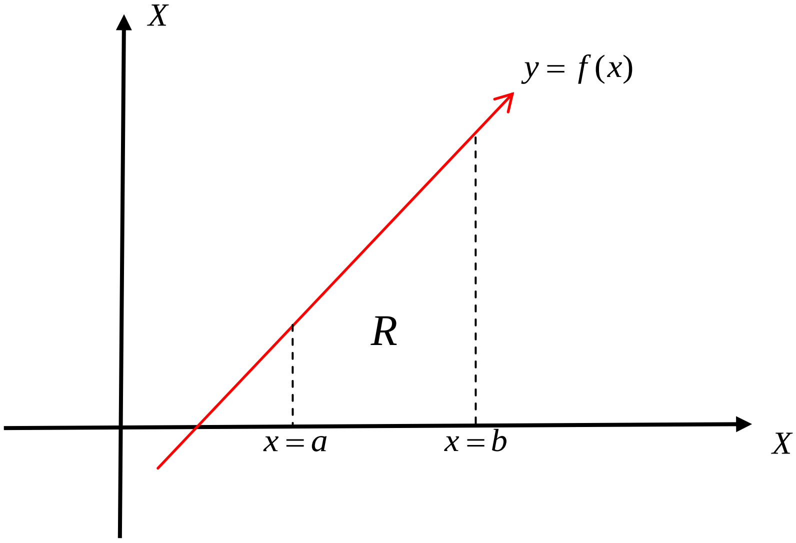
INTEGRAL: LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

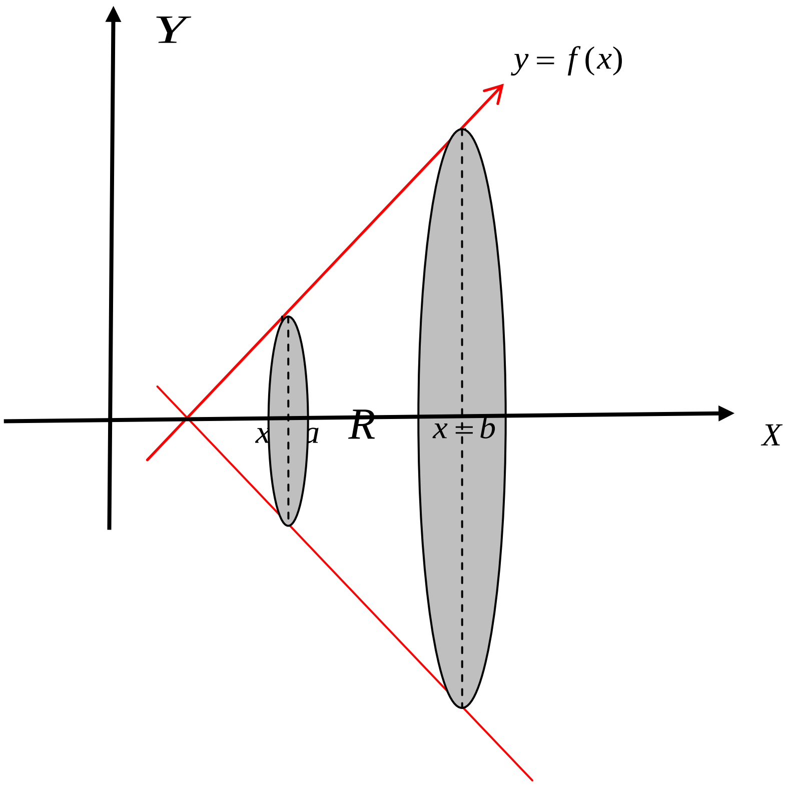
Luas Permukaan Benda Putar

Jika sebuah luasan R yang terbatas bidang XOY mengelilingi salah satu sumbu pada bidangnya maka lintasan kurva tersebut membentuk benda pejal yang permukaannya dapat ditentukan luasnya dengan menggunakan integral tertentu Perhatikan gambar berikut.

R adalah suatu luasan yang dibatasai oleh kurva $y = f(x), x = a, x = b$ diputar mengelilingi sumbu x



Selanjutnya R sebagaimana gambar di atas diputar mengelilingi sumbu X sehingga terbentuk benda pejal.



Gambar di atas berupa kerucut terpancung yang mempunyai jari-jari alas r_1 dan r_2 Dengan tinggi t. Luas permukaan kerucut terpancung tersebut adalah

$$A = 2\pi\ (rerata\ \ jari - jari)(tinggi)$$

atau

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)t$$

Selanjutnya andaikan $y = f(x), a \le x \le b$ dengan cara membuat partisi [a,b] menjadi n bagian dengan menggunakan $a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Dengan demikian kurva yang terbagi terdiri atas n bagian. Andaikan Δs_i menyatakan panjang potongan $ke-i$ dan andaikan y_i adalah sebuah titik pada potongan Δs_i. Karena pita potongan diputar mengelilingi sumbu x maka luas pita tersebut dapat dihampiri oleh $A_i = 2\pi y_i \Delta s_i$. Apabila luas semua potongan pita dijumlahkan dengan $\Delta x_i \to 0$ diperoleh luas permukaan benda pejal dan ditunjukkan dengan limit partisi sebagai berikut:

$$A = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \Delta s_i$$

$$A = \int_a^b 2\pi y ds$$
$$= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Dengan cara yang sama jika luasan diputar mengelilingi sumbu Y dalam batasan garis $y = c$ dan $y = d$ maka luas permukaannya dinyatakan dengan

$$A = \int_c^d 2\pi x ds$$
$$= 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

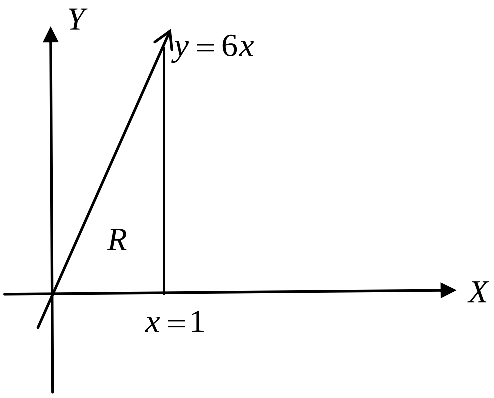
Jika persamaan kurva dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik $x = f(t), y = g(t)$ dengan $a \le t \le b$ maka luas permukaan benda pejal dinyatakan oleh rumus

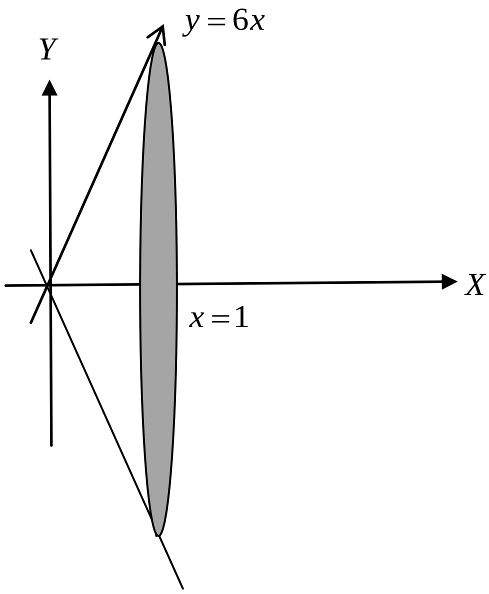
$$A = \int_a^b 2\pi y ds$$
$$= 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

Contoh 1:

Luasan R dibatasi oleh kurva $y = 6x, x = 0, x = 1$ diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan luas permukaannya dengan terlebih dahulu menggambar benda putarnya!

Jawab:





Karena $y = 6x$ maka $\frac{dy}{dx} = 6$

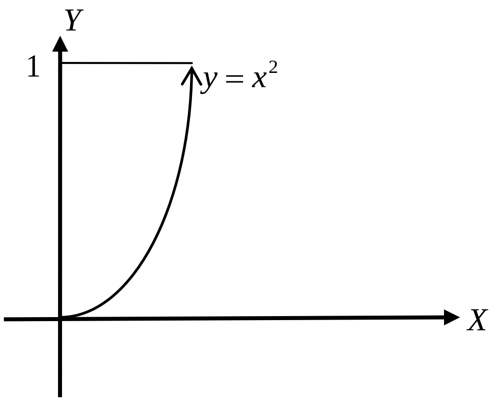
Luas permukaan benda putar di atas dapat ditentukan dengan rumus:

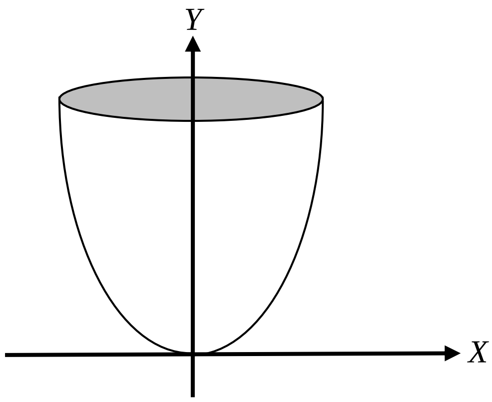
$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b 2\pi y ds \\
&= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_0^1 6x \sqrt{1 + (6)^2} dx \\
&= 2\pi \int_0^1 6x \sqrt{37} dx \\
&= 12\sqrt{37}\pi \left(\frac{1}{2} x^2\right)_0^1 \\
&= 12\sqrt{37}\pi \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 6\sqrt{37}\pi
\end{aligned}$$

Contoh 2:

Luasan R dibatasi oleh kurva $y = x^2, y = 0, y = 1$ diputar mengelilingi sumbu y. Sketsa gambar benda putarnya dan kemudian tentukan luas permukaannya!

Jawab:





Karena $y = x^2$ maka $x = \sqrt{y}$ sehingga $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Dengan menggunakan integral integral tertentu, luas permukaan benda putar di atas dapat ditentukan dengan rumus:

$$A = \int_a^b 2\pi x ds$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{y}}\, dy$$

$$\Leftrightarrow \pi\int_0^1 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{4}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\right)_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$