Bab 2. INTERPOLASI POLINOMIAL (Pertemuan 6 dan 7)

Tim Dosen:
Julan HERNADI, Puguh, Burhan, Siti

Prodi Pendidikan Matematika
FKIP UAD Yogyakarta

Perhatikan tabel berikut menyajikan data kecepatan angin yang diukur pada setiap jam:

Pukul	06.00	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00	12.00	13.00
Kec	8	8	10	9	13	12	16	14

1. Kapan angin mempunyai kecepatan 14 knot?
2. Berapa kecepatan angin pada pk. 10.00?
3. Berapa kecepatan angin pada pk. 12.45?
4. Kapan angin mempunyai kecepatan 11 knot?
5. Kapan angin mencapai kecepatan di atas 15 knot?

Dua pertanyaan pertama mudah dijawab melalui data tabel.
Bagaimana dengan pertanyaan 3 - 5?

IDE SOLUSI: METODE INTERPOLASI

- Metode interpolasi merupakan suatu teknik untuk menentukan nilai yang tidak diketahui di antara beberapa nilai yang diketahui. Nilai yang tidak diketahui diprediksi melalui nilai polinomial yang melewati pasangan titik yang diketahui.
- Polinomial atau fungsi suku banyak sering digunakan sebagai interpolatornya. Interpolasi linear, interpolasi kuadratik dan interpolasi kubik berkenaan dengan derajat polinomial yang digunakan.

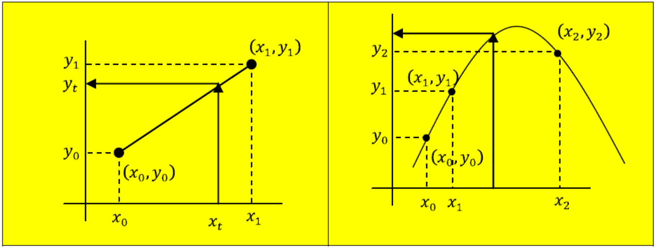

Figure: Interpolasi linear (kiri) dan kuadratik (kanan)

FORMALISASI MASALAH

Diperhatikan fakta berikut:

- Melalui dua titik dengan absis berbeda selalu dapat dibuat sebuah garis lurus, yaitu polinomial derajat 1.
- Melalui tiga titik dengan absis berbeda selalu dapat dibuat kurva parabola, yaitu polinomial derajat 2 atau fungsi kuadrat.
- Secara umum, melalui $n+1$ pasangan titik berlainan $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ dalam arti $x_i \neq x_j$ untuk $i \neq j$, selalu dapat didefinisikan $P_n(x)$ polinomial derajat n yang melalui titik-titik tersebut, yaitu
$$P_n(x_k) = y_k \text{ untuk setiap } k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$
- Polinomial P_n yang memenuhi (1) disebut polinomial interpolasi untuk pasangan titik $(x_k, y_k), k = 0, 1, \cdots, n$.

Permasalahan:

- Bagaimana cara membangun polinomial interpolasi P_n ini?

Metode Interpolasi Lagrange

Misalkan diketahui dua titik berlainan (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Biasanya ada 3 cara yang dapat digunakan untuk menyusun pers garis melalui kedua titik ini. Kali ini digunakan cara yang berbeda dari ketiganya.

- Definisikan dua fungsi linear (garis lurus berikut):

$$L_0(x) : = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ dan } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0.} \tag{2}$$

- Diperoleh sifat $L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0$ dan $L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$. Coba diverifikasi!
- Definisikan polinomial $P(x)$ sebagai kombinasi linear kedua polinomial tsb,

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \tag{3}$$

- Diperoleh sifat $P(x_0) = y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 = y_0$ dan dapat diverifikasi sendiri $P(x_1) = y_1$.

Ternyata P merupakan polinomial interpolasi untuk titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinomial $L_0(x)$ dan $L_1(x)$ disebut polinomial Lagrange derajat 1 untuk pasangan titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1).
PERMASALAHAN: Bagaimanakah bentuk polinomial Lagrange secara umum, dan apakah kombinasi linearnya masih dapat menghasilkan polinomial interpolasi?

VISUAL GRAFIK POLINOMIAL LAGRANGE DAN POLINOMIAL INTERPOLASI SEDERHANA

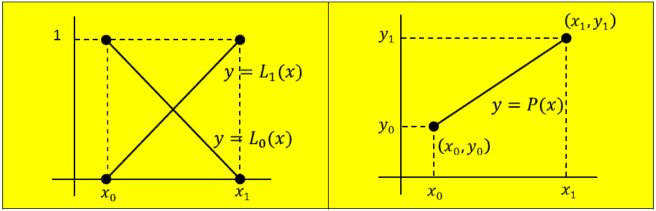

Figure: Polinomial Lagrange derajat 1 (kiri) dan interpolasinya (kanan)

Sifat penting polinomial Lagrange: $L_0(x_0) = y_0, L_0(x_1) = 0$ dan $L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$. Ditulis dengan notasi kronecker delta:

$$L_j(x_k) = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{jika } j = k \\ 0 & \text{jika } j \neq k. \end{cases}$$

Sifat ini disebut sifat interpolasi.

Bentuk Umum Polinomial Lagrange

Definisi: Diketahui $n+1$ bilangan $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dengan $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Titik-titik ini biasanya disebut simpul atau node. Untuk setiap $k = 0, 1, \cdots$, didefinisikan polinomial $L_{n,k}(x)$ sebagai

$$
\begin{aligned}
L_{n,k}(x) : &= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \\
&= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Masing-masing $L_{n,k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ disebut polinomial Lagrange untuk $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Amati pendefinisian ini, kemudian jawablah pertanyaan berikut:

- Berapa banyak dan berapa derajat polinomial Lagrange untuk node $x_0, x_1, \cdots, x_n$.
- Apakah polinomial $L_{n,k}$ yang didefinisikan pada (4) memenuhi sifat interpolasi, jelaskan.

Pertama, definisikan polinomial $P_n(x)$ sebagai berikut

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x) \tag{5}$$

dengan $L_{n,k}$ polinomial Lagrange. Karena berlaku sifat interpolasi maka untuk setiap $k = 0, 1, \cdots, n$ diperoleh

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= \underbrace{y_0 L_{n,0}(x_k) + \cdots + y_{k-1} L_{n,k-1}(x_k)}_{=0} + y_k L_{n,k}(x_k) + \\ &\quad + \underbrace{y_{k+1} L_{n,k+1}(x_k) + \cdots + y_n L_{n,n}(x_k)}_{=0} = y_k L_{n,k}(x_k) = y_k. \end{aligned}$$

Ternyata, polinomial yang dibangun dari kombinasi linear polinomial Lagrange membentuk polinomial interpolasi, biasanya disebut polinomial interpolasi Lagrange. Secara formal, lihat Teorema 3.1.

Misalkan diketahui pasangan data $(x_k, y_k), k = 0, 1, \cdots, n$. Diinginkan memprediksi nilai yang tidak diketahui y_t yang bersesuaian dengan x_t (diberikan).

1. Pilih node-node yang absisnya memuat x_t. Minimal 2 node dan maksimal $n + 1$ node. Misalkan kita gunakan semua titik. Berarti kita akan mendefinisikan polinomial berderajat n.
2. Bangun polinomial Lagrange $L_{n,k}(x), k = 0, 1, \cdots, n$ untuk node-node yang diambil tersebut.
3. Definisikan kombinasi linear seperti (5), yaitu $P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)$.
4. Nilai prediksinya adalah $y_t = P_n(x_t)$.