5.3.1 Formula Kuadrat Dasar

Metode midpoint

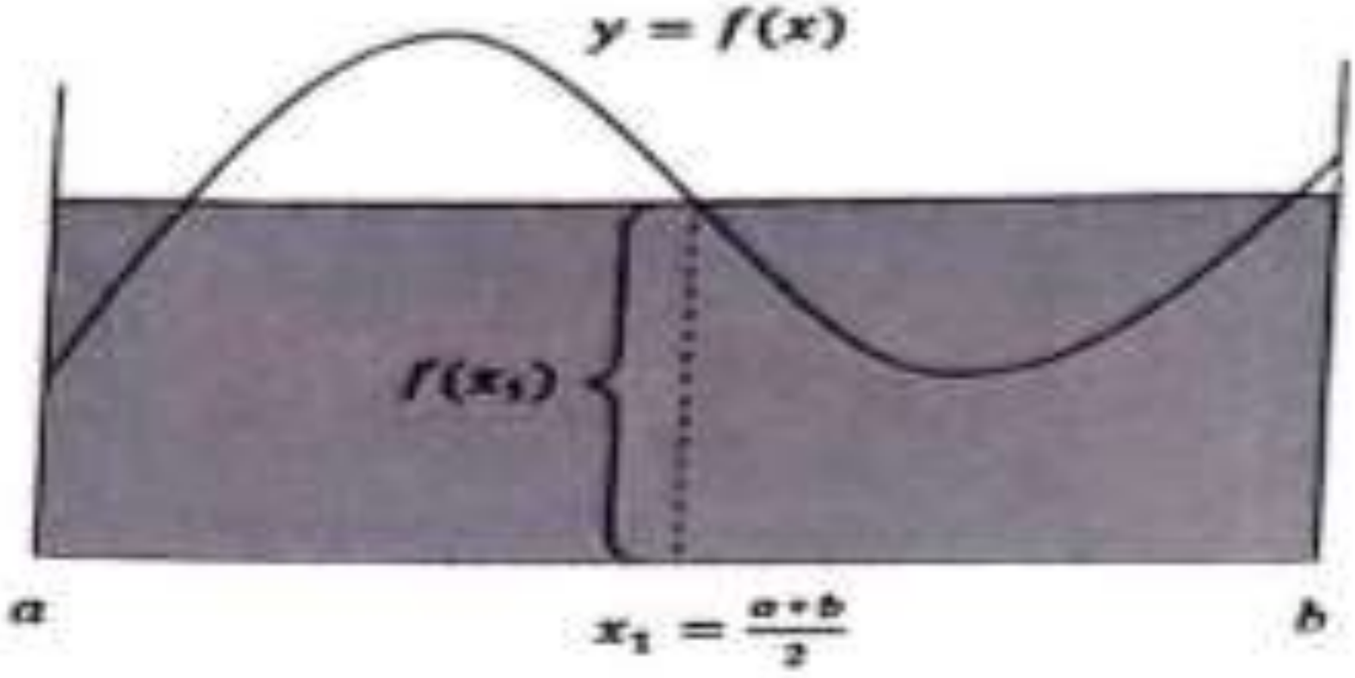
Metode ini menggunakan polinomial interpolasi derajat nol atau fungsi konstan untuk mengaproksimasi fungsi f. Hanya menggunakan 1 absis, yaitu $x_1 = \frac{a+b}{2}$ titik tengah interval $[a, b]$. Inilah yang menyebabkan pendekatan ini disebut metode midpoint. Ilustrasinya diberikan pada gambar 5.2. Karena itu digunakan aproksimasi

$$f(x) \approx P_0(x) = f(x_1) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Sehingga integralnya diaproksimasi oleh

$$I(f) \approx M(f) = \int_a^b P_0(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (5.13)$$

Ekspresi (5.13) merupakan bentuk (5.12) dengan $n = 1, x_1 = \frac{a+b}{2}, w_1 = b - a$. Secara geometris, metode midpoint ini mengatakan bahwa luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ sampai dengan $x = b$ diaproksimasi oleh luas daerah persegi dengan sisi $b - a$ dan $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



Gambar 5.2: Ilustrasi metode midpoint

Metode Trapesium

Metode ini menggunakan polinomial interpolasi derajat satu $P_1(x)$ dengan dua absis $x_0 = a$ dan $x_1 = b$. Berdasarkan bahasan yang telah diberikan pada bab sebelumnya, diperoleh

$$P_1(x) = f(x_1) + f[x_1, x_2](x - x_1) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Selanjutnya polinomial ini diintegralkan dari a sampai b, yaitu

$$\int_a^b P_0(x)dx = \left[f(a)x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,\frac{1}{2}\,(x - a)^2\right]_a^b$$

$$= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{2(b - a)}\,(b - a)^2 = \frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b))$$

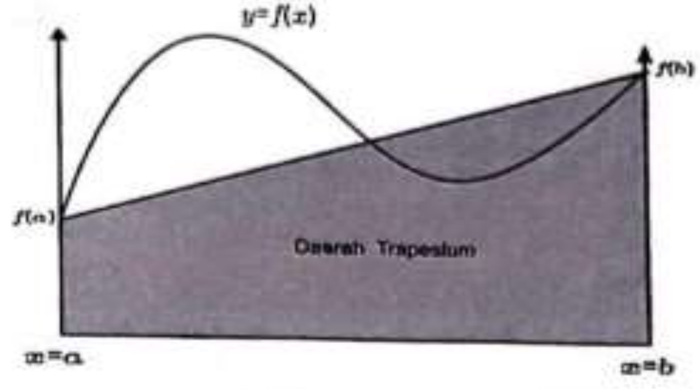
Hasil ini digunakan untuk aproksimasi integral dengan metode trapesium berikut:

$$I(f) \approx T(f) = \frac{1}{2}\,(b - a)(f(a) + f(b)) \qquad (5.14)$$

Formula (5.14) merupakan bentuk (5.12) dengan $n = 2, x_1 = a, x_2 = b, w_1 = w_2 = \frac{b-a}{2}$.

Ilustrasi metode trapesium diberikan pada gambar 5.3

Secara geometris, luas daerah trapesium dengan dua sisi sejajarnya mempunyai panjang $f(a)$ dan $f(b)$, tinggi $b-a$ digunakan untuk mengaproksimasi luas daerah dibawah kurva

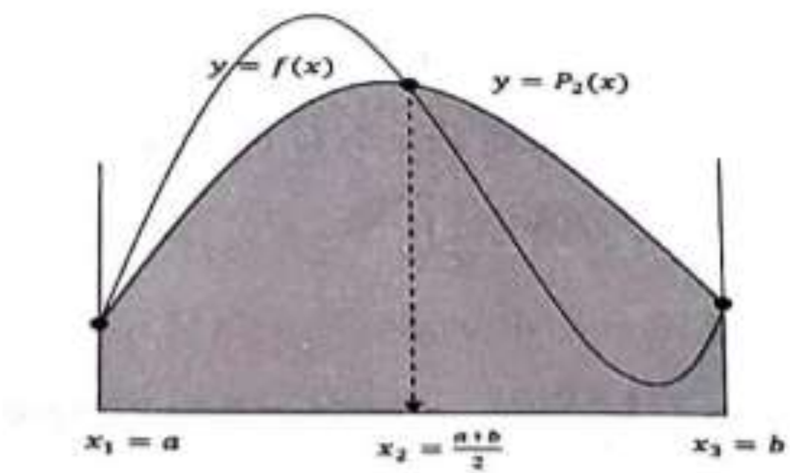


Gambar 5.3: Ilustrasi metode trapesium

$y = f(x)$ dari $x = a$ sampai $x = b$. karena itulah pendekatan ini disebut metode trapesium. Bila diterapkan langsung rumus luas trapesium yang sudah dipelajari sejak di SMP yaitu "setengah dari jumlah sisi sejajar dikali tinggi" maka akan diperoleh pada ruas kanan (5.14).

Metode Simpson

Metode ini menggunakan polinomial interpolasi derajat dua atau parabola untuk mengaproksimasi fungsi yang diintegralkan. Gambar berikut memberikan ilustrasi metode Simpson



Gambar 5.4: Ilustrasi metode Simpson

Dengan menggunakan absis $x_1 = a, x_2 = \frac{a-b}{2}, x_3 = b$ maka interpolasi $P_2(x)$ yang bersesusaian diberikan oleh

$$P_2(x) = f(a) + f\left[a, \frac{a-b}{2}\right](x-a) + f\left[a, \frac{a-b}{2}, b\right](x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

Dengan menggunakan penjabaran yang agak panjang, integral $\int_a^b P_2(x)dx$ dapat diselesaikan dan hasilnya digunakan untuk aproksimasi integral semula, yaitu

$$I(f) \approx S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a-b}{2}\right) + f(b)\right) \qquad (5.15)$$

Ini juga merupakan bentuk (5.12) dengan ketiga absis $x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$ dan bobot $w_1 = \frac{b-a}{6}\ f(a), w_2 = \frac{2}{3}\ (b-a), w_3 = \frac{b-a}{6}\ f(b)$. Secara geometris, metode simpson mengaproksimasi integral

5.3.2 Estimasi Kesalahan Metode Kuadratur Dasar

Secara intuitif, pada setiap metode berlaku bahwa semakin sempit interval integrasi $[a, b]$ hasilnya diharapkan semakin teliti. Sejauh mana pengaruh lebar interval integrasi ini terhadap kesalahan aproksimasi masing-masing metode diberikan pada beberapa teorema berikut.

Teorema 5.2. Bila $f \in C^2[a, b]$ maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga metode midpoint memberikan kesalahan sebagai berikut

$$I(f) - M(f) = \frac{f'''(\xi)}{24}\,(b-a)^3 \qquad (5.16)$$

Bukti. Lihat Faires & Burden (2003) dalam [2]

Teorema 5.3. Bila $f \in C^4\,[a, b]$ maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga metode trapesium memberikan kesalahan sebagai berikut

$$I(f) - T(f) = \frac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)^3 \qquad (5.17)$$

Bukti. Lihat Faires & Burden (2003) dalam [2]

Teorema 5.4 Bila $f \in C^4\,[a, b]$ maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sehingga metode Simpson memberikan kesalahan sebagai berikut

$$I(f) - S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}\,(b-a)^5 \qquad (5.18)$$

Bukti. Lihat Kress (1998) dalam [8]

Exercise

1. Hitunglah integral dibawah ini menggunakan aturan midpoint dan trapesium dengan satu segmen, dua segmen dan empat segmen!

$$\int_0^1 (4x - x^2)dx$$

   kemudian hitung kesalahan perhitungan dari masing-masing pendekatan!

2. Hitunglah pendekatan dari integral menggunakan metode Simpson dengan 4 segmen. Hasil eksaknya diketahui sama dengan 17.3673

$$\int_1^3 e^x\,dx$$

Link Video Materi

Link video materi Aproksimasi Derivatif dapat diakses pada:

https://www.youtube.com/watch?v=lgKyah1MAT4