GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Fungsi Kompleks
(Bab I. Bilangan Kompleks)
Dra. Retno Marsitin, M.Pd.

Koordinat Cartesius

Bilangan kompleks z dapat ditulis sebagai pasangan terurut $z = (x, y)$ maka untuk memetakan satu-satu antara himpunan bilangan kompleks dengan titik-titik di bidang xy, dengan:

sumbu x disebut sumbu real
sumbu y disebut sumbu imajiner
bidang xy disebut bidang kompleks

Contoh:

Titik $(1, -2)$ berkorespondensi dengan bilangan kompleks $z_1 = 1 - 2i$
Titik $(3,2)$ dengan $z_2 = 3 + 2i$ dan titik asal $O(0,0)$ dengan $0 = 0 + i0$.

Eratnya korespondensi maka sering tidak dibedakan menyebut bilangan dan titik, seperti mengatakan (a, b) $atau\ \ titik\ a + ib$

Vektor

Bilangan kompleks $z = x = iy$ juga dapat dipandang sebagai vektor posisi yang pangkalnya di O dan ujungnya (x, y).

Vektor $z = x + iy$ maka:

modulus z atau $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ adalah **bilangan non negatif yang menyatakan panjang vektor**

Dua vektor $z_1 = x_1 + iy_1 \ dan \ z_2 = x_2 + iy_2$ maka diperoleh masing-masing sebagai jumlah dan selisih dari dua vektor:

$$(z_1 + z_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \ dan \ (z_1 - z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Menyatakan jarak dua titik atau panjang segmen garis $z_1 z_2$ yaitu:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Sifat Modulus $|z|$

Untuk setiap $z = x + iy$, ada tiga bilangan real yang saling berhubungan yaitu modulus $|z|$, $Re(z) = x$ dan $Im(z) = y$ dengan sifat sebagai berikut:

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$|z|^2 = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$$

$$|z|^2 = |z^2| = z\bar{z} \qquad \text{atau} \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad bila\ z \neq 0$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$|z| \geq |Re(z)| \geq Re(z)$$

$$|z| \geq |Im(z)| \geq Im(z)$$

Terkait dengan sifat-sifat dalam segitiga diperoleh:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Contoh dan Penyelesaian

Contoh:

1. Hitunglah $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ secara analitik dan secara grafik serta nyatakan bilangan kompleks dalam bentuk titik koordinat cartesius

2. Tentukan persamaan lingkaran dengan jari-jari 4 yang berpusat di $(-2{,}1)$

Penyelesaian:

1. Operasi $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ dapat dikerjakan secara analitik dan secara grafik

    Secara analitik: $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2 = 2i + 5i = 4 + 3i$

    Secara grafik : $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2i + (-2 + 5i)$

2. Persamaan lingkaran dengan jari-jari 4 yang berpusat di $(-2{,}1)$

    Pusat lingkaran dapat dinyatakan dengan bilangan kompleks $-2 + i$. Jika x adalah suatu titik pada lingkaran maka jarak dari $z\ ke - 2 + i$ yaitu: $|z - (-2 + i)| = 4$, sehingga $|z - (-2 + i)| = 4$ merupakan persamaan lingkaran. Apabila dalam bentuk koordinat menjadi: $|(x + 2) + i(y - 1)| = 4$, sehingga:

    $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$

Koordinat Kutub

Bilangan kompleks $z = (x, y)$ dalam koordinat kutub dapat dinyatakan (r, θ) dengan r adalah jarak titik z ke pusat sumbu O dan θ sudut antara vektor z dengan sumbu x positif.

Hubungan koordinat kutub dengan koordinat kartesius yaitu:

$$x = rcos\theta \ , \qquad y = rsin\theta \qquad dan \qquad \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

sehingga $z = x + iy$ dalam bentuk kutub:

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta) = \ rcis\theta$$
$$r = |z| = modulus\ z$$
$$\theta = arg\ z\ (argumen\ \ z)$$

maka diperoleh:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ r adalah bilangan real non negatif

$karena\ sin\theta\ dan\ cos\theta\ adalah\ periodik$ maka $\theta = \arg z\ berharga\ banyak$ dan dalam berbagai perhitungan sering dipilih harga tunggal dari θ yang disebut ***harga utama*** yaitu dari $-\pi\ sampai\ dengan\ \pi$ dan ditulis $Arg\ z$ sehingga:

$$-\pi \le Arg\ z \le \pi \quad atau \arg z = Arg\ z + 2k\pi\ , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Lanjutan Koordinat Kutub

Pengertian terakhir yang penting terutama bila menghadapi dua bilangan kompleks yang sama yaitu:

$$r_1(cos\theta_1 + i\ sin\theta_1) = r_2(cos\theta_2 + i\ sin\theta_2)$$

$$bila\ dan\ hanya\ bila r_1 = r_2 \quad dan \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sifat-sifat argument:

$$z_1 . z_2 = r_1 r_2 \{cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2\} = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2\} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| cis(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r}(cos\theta_1 - isin\theta_2) = \frac{1}{r} cis\theta$$

$$arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$arg(z_1 . z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

$$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$$

Contoh dan Penyelesaian

Contoh:

Nyatakan bilangan kompleks $2 + 2\sqrt{3}i$ dalam bentuk kutub

Penyelesaian:

Bilangan kompleks $2 + 2\sqrt{3}i$ dalam bentuk kutub

Modulus: $r = \left|2 + 2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{4 + 12} = 4$

Argument: $\theta = sin^{-1} 2\sqrt{\frac{3}{4}} = sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}} = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ radian

sehingga:

$$2 + 2\sqrt{3}i = r(cos\theta + i\, sin\theta) = 4\left(cos60^{\circ} + i\, sin60^{\circ}\right)$$

$$2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = 4cis\frac{\pi}{3}$$

Dirubah dalam bentuk pangkat: $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\pi\frac{i}{3}}$

Jadi bentuk kutub dari $2 + 2\sqrt{3}i$ yaitu $4cis\frac{\pi}{3}$ atau $4e^{\pi\frac{i}{3}}$

Soal-Soal Latihan

1. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang ditunjukkan :

   a. $Im(2i + 3z) = 8$ b. $Re\,(i\bar{z}) = 5$ c. $-1 \leq Re(z) < 1$ d. $|z + 2i| = 3$

2. Jika $|z - 2| = 3$, tunjukkan:

   a. $|z^2 - 5z| \leq 18$ b. $|z^2 - 5z + 6| \geq 6$

3. Tentukan $z = x + iy$ sedemikian hingga $|z| = 3$ dan $arg z = \frac{3}{4}\pi$

4. Diberikan $z = \frac{i}{-3-3i}$, tentukan:

   a. $arg z$ b. $arg(\bar{z})$ c. $Arg\,(z)$ d. $Arg\,(\bar{z})$

5. Gunakan bentuk kutub untuk menunjukkan bahwa:

   $$i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2(1 + i\sqrt{3})$$