

# FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS & PEMETAAN (MAPPING)

Fungsi Kompleks  
(Bab II. Fungsi-Fungsi Analitik)  
Dra. Retno Marsitin, M.Pd

# FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Jika setiap himpunan bilangan kompleks dengan variabel  $z$  terdapat satu atau lebih nilai dari variabel  $w$  maka  $w$  disebut fungsi dari variabel kompleks  $z$  yang dituliskan:

$$w = f(z)$$

Sebuah fungsi dikatakan mempunyai nilai tunggal jika untuk setiap nilai  $z$  terdapat satu nilai  $w$  dan selain itu maka fungsi tersebut dikatakan mempunyai nilai rangkap atau bernilai banyak. Secara umum dituliskan:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

*u dan v merupakan fungsi real dari x dan y*

# Lanjutan Fungsi Variabel Kompleks

Suatu fungsi adalah berharga satu pada himpunan  $S$  bila tiap satu nilai  $z$  mendapatkan satu  $w$ , sehingga istilah fungsi hanya dikenakan pada fungsi berharga satu.

Apabila fungsi  $w = f(z) = z^2$  atau  $w = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$ , dengan:

$$u = x^2 - y^2 \text{ dan } v = 2xy$$

Hal ini berarti bahwa tiap fungsi kompleks  $w = f(z)$  berkorespondensi dengan dua fungsi nyata  $u(x, y)$  dan  $v(x, y)$  atau ditulis:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Apabila variabel  $z = (x, y)$  dinyatakan dalam bentuk kutub  $x = (r, \theta)$ ,  $y = (r, \theta)$  maka  $w = f(z)$  dapat dinyatakan:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

# Contoh & Penyelesaian

Contoh:

1. Tentukan domain dari:

a.  $f(z) = z^2$       b.  $f(z) = z^3 + 2iz - 3$       c.  $f(z) = \frac{1}{z}$       d.  $f(z) = |z|$

2. Tentukan bentuk kutub dari  $w = f(z) = z^2$

Penyelesaian:

1. Domain:

- a.  $f(z) = z^2$ , domain definisi seluruh bidang  $z$
- b.  $f(z) = z^3 + 2iz - 3$ , domain definisi seluruh bidang  $z$
- c.  $f(z) = \frac{1}{z}$ , domain definisi seluruh bidang  $z$  kecuali  $z = 0$
- d.  $f(z) = |z|$ , domain definisinya seluruh bidang  $z$

2. Bentuk kutub dari  $w = f(z) = z^2$  atau  $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2$ , yaitu:

$$w = r^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta$$

dengan:

$$u = r^2 \cos 2\theta \quad \text{dan} \quad v = r^2 \sin 2\theta$$

Apabila dari  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $\text{Im}(f(z)) = 0$  atau  $v(x, y) = 0$  maka diperoleh fungsi real, misalnya  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

# Pemetaan (Mapping)

Dua pengertian yang memiliki hubungan sangat erat antara fungsi dan pemetaan. Fungsi lebih menitik beratkan pada hubungan antara dua variabel atau lebih yang dinyatakan dalam persamaan-persamaan aljabar. Pemetaan memiliki hubungan antar variabel yang diilustrasikan lewat grafik dalam sumbu koordinat yang umumnya disebut grafik fungsi.

Fungsi variabel kompleks  $w = f(z)$  dengan dua variabel, misalnya  $z$  dan  $w$ , kadang kala tidak dapat digambarkan dengan mudah karena memerlukan dua bidang koordinat yaitu bidang  $z$  dengan sumbu  $x$  dan  $y$  dan bidang  $w$  dengan sumbu  $u$  dan  $v$ .

Fungsi  $f$  memetakan tiap  $z$  di bidang  $xy$  ke titik  $w$  di bidang  $uv$  ditulis:

$$f: z \rightarrow w = f(z)$$

sehingga pengertian transformasi yang kita kenal seperti refleksi, translasi dan rotasi menjadi sering digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat sebuah pemetaan.

# Contoh & Penyelesaian

## Contoh:

1. Tunjukkan pada bidang  $z$  dan  $w$  dalam satu sistem koordinat bahwa:
  - a.  $w = \bar{z}$  dengan refleksi
  - b.  $w = iz$  dengan rotasi
  - c.  $w = z + 2 - i$  dengan tranlasi
2. Tunjukkan bahwa  $w = \frac{1+z}{1-z}$  pada bidang  $z$  dan  $w$

## Penyelesaian:

1. Bidang  $z$  dan  $w$  dalam satu sistem koordinat
  - a.  $w = \bar{z}$  adalah sebuah *refleksi* (pencerminan) terhadap sumbu  $x$
  - b.  $w = iz$  *rotasi* (perputaran) titik  $z$  sudut sebesar  $\frac{1}{2}\pi$  arah positif
  - c.  $w = z + 2 - i$  *translasi* (pergeseran) titik  $z$  sejauh **dua unit ke kanan** dan **satu unit ke bawah**

# Lanjutan Contoh & Penyelesaian

2. Perhatikan fungsi  $w = \frac{1+z}{1-z}$

Apabila diambil empat titik pada bidang  $z$  yaitu  $z = 0, -1, i$  dan  $-i$  maka diperoleh bayangan pada bidang  $w$  sebagai berikut:

$$z = 0 \longrightarrow w = 1$$

$$z = -1 \longrightarrow w = 0$$

$$z = i \longrightarrow w = i$$

$$z = -i \longrightarrow w = -i$$

Untuk  $z = 1$  tidak mempunyai harga  $w$ , namun dapat dikatakan:

$$z = 1 \longrightarrow w = \infty$$

# Soal-Soal Latihan

1. Nyatakan setiap fungsi berikut dalam bentuk  $u = u(x, y) + iv(x, y)$ , dimana  $u$  dan  $v$  real:
  - a.  $z^3$
  - b.  $\frac{1}{(1-z)}$
  - c.  $e^{3z}$
2. Diberikan  $f(z) = z^2 + z - 3$ , nyatakan fungsi  $f$  dalam bentuk:
  - a.  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
  - b.  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$
3. Tentukan nilai fungsi  $f(2i)$  jika  $f(z) = z^2 - 2z - 1$
4. Tentukan nilai fungsi pada tiap titik yang ditunjukkan:
  - a.  $f(z) = 3z^2 - i\bar{z}$  pada  $2 - i$
  - b.  $f(z) = z^2 - [Re(z)]^2$  pada  $-4 - 4i$