INTEGRAL TAK TENTU & INTEGRAL CAUCHY

FUNGSI KOMPLEKS

(BAB IV. INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS)

DRA. RETNO MARSITIN, M.PD

INTEGRAL TAK TENTU

- Karena teorema Cauchy – Goursat berlaku untuk sembarang kontur tertutup dalam domain terhubung tunggal maka diperoleh bahwa:

$\int_{C_1} f(s)ds - \int_{C_2} f(s)ds = 0$, dimana s menyatakan titik-titik pada C_1 *dan* C_2

- Integral dari z_0 *ke* z yaitu $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ ini tidak tergantung pada pemilihan dan sepanjang kontur C dalam D. Integral ini akan menentukan sebuah fungsi $F(z)$ pada domain terhubung tunggal D dan ditulis:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

- sehingga derivative $F(z)$ yaitu $F'(z)$ ini ada dan sama dengan f(z)

$$F'(z) = f(z) \qquad F(z) = \int f(z)dz$$

LANJUTAN INTEGRAL TAK TENTU

- seperti integral pada kalkulus real, harga integral tertentu dapat di hitung dengan memasukkan nilai pada integral tak tentu yaitu:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = \int_{z_0}^{\beta} f(z)dz - \int_{z_0}^{\alpha} f(z)dz$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

- Hal ini jelas lintasan integrasi dalam domain terhubung tunggal dimana fungsi analitik *f(z)* berada dan perlu dicatat bahwa apabila *G(z)* merupakan fungsi analitik lain selain *F(z)* sedemikian hingga $G'(z) = f(z)$ maka derivative dari $H(z) = F(z) - G(z)$ adalah nol.
- Dengan demikian bila $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ maka $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$ yang berarti $u_x(x, y)$ dan $v_x(x, y)$ kedua-duanya adalah nol di seluruh domain dimana fungsi $F\ dan\ G$ analitik.
- Apabila dikaitkan dengan persamaan Cauchy – Riemann maka $u_y(x, y)$ dan $v_y(x, y)$ juga nol, yang berarti baik $u_x(x, y)$ dan $v_x(x, y)$ adalah fungsi-fungsi konstan. $H(z)$ adalah fungsi konstan, sehingga dua integral tak tentu $F(z)\ dan\ G(z)$ hanya berbeda pada konstanta kompleks

CONTOH

- Contoh:

1. Tentukan $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di atas sumbu* x di bidang z.
2. Tentukan $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di bawah sumbu* x di bidang z

- Penyelesaian:

1. $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz$, apabila kontur menghubungkan dua titik batas-batas integrasi yang terletak *di atas sumbu* x di bidang z
   - misal: $z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)$ maka: $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\exp\left(\frac{i\theta}{2}\right); r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$
   - Fungsi f tidak analitik khususnya pada titik dengan arah $\theta = 0$ yaitu $z = 1$.
   - Di lain pihak: $f(z) = \sqrt{r}\exp\left(\frac{i\theta}{2}\right);\ r > 0, -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{3\pi}{2}$
   - Sebagai harga lain dari fungsi $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ merupakan analitik dimanapun kecuali pada arah $\theta = -\frac{\pi}{2}$
   - Harga dari $f(z)$ yang berada di atas sumbu x sesuai dengan persamaan, sehingga integrannya dapat diganti dengan $f(z)$
   - Integran tak tentu dari $f(z)$ yaitu: $F(z) = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{i3\theta}{2}\right),\ r > 0, -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{3\pi}{2}$
   - Sehingga diperoleh:

$$\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{2}{3}\left(e^{0} - e^{\frac{i3\pi}{2}}\right) = \frac{2}{3}(1 + i)$$

LANJUTAN CONTOH

2. Untuk $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz$ yang terletak *di bawah sumbu x* dengan menganti integran yaitu:

$$g(z) = \sqrt{r}\exp\left(\frac{i\theta}{2}\right); r > 0, \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

sedangkan fungsi analitik sebagai intergral tak tentu dari $g(z)$:

$$G(z) = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i3\theta}{2}\right), \ r > 0, \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

- Sehingga diperoleh:

$$\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{2}{3}\left(e^{3\pi i} - e^{\frac{i3\pi}{2}}\right) = \frac{2}{3}(-1 + i)$$

- Jadi $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\, dz$ dengan arah positif sepanjang kontur tertutup sederhana dari dua lintasan integrasi sebagaimana telah dibahas memiliki nilai:

$$\frac{2}{3}(-1 + i) - \frac{2}{3}(1 + i) = -\frac{4}{3}$$

INTEGRAL CAUCHY

- Teorema:

➢ Bila f analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C arah positif dan bila z_0 suatu titik di dalam C maka:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \quad atau \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

- Rumus di atas mengatakan bila *f* analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana *C* maka nilai titik di dalam *C* sepenuhnya ditentukan oleh nilai dari *f* pada *C*, sehingga perubahan harga *f* dari titik di dalam *C* pasti berubahnya nilai *f* pada *C*.

CONTOH

- Contoh:

1. Hitunglah $\int_c \frac{z^2}{z-i} dz$ dengan C: $|z| = 2$ dan berorientasi positif
2. Hitunglah $\int_c \frac{dz}{z(z+\pi i)}$ dimana $C: z = -3i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

- Penyelesaian:

1. $\int_c \frac{z^2}{z-i} dz$ dengan C: $|z| = 2$ dan berorientasi positif

   Fungsi tersebut merupakan fungsi menyeluruh dan $z_0 = i$

$$\int_c \frac{z^2}{z-i} dz = 2\pi i[f)i] = -2\pi i$$

2. $\int_c \frac{dz}{z(z+\pi i)}$ dimana $C: z = -3i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

   - Integralnya analitik kecuali $z = 0$ yang berada di $Lr\ (C)$ dan pada $z = -\pi i$ yang berada di $Lr\ (C)$, sehingga diperoleh:

$$\int_c \frac{\frac{1}{z}}{z+\pi i} dz$$

   - menggunakan integral Cauchy dengan $f(z) = \frac{1}{z}\ dan\ z_0 = -\pi i$ maka:

$$\int_c \frac{dz}{z(z+\pi i)} = \int_c \frac{\frac{1}{z}}{z+\pi i} = 2\pi i[f(-\pi i)] = -2$$