

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 25 : Deret dan Transformasi
Fourier (Bagian III)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : November 2018

Tujuan Perkuliahan

- 1 Mempelajari tentang Fungsi Periodik (Bagian I)
- 2 Mempelajari Deret Fourier Fungsi Periodik (Bagian II)
- 3 Mempelajari tentang Transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya (Bagian III)
- 4 Transformasi Fourier mempelajari tentang inverse transformasi Fourier (Bagian IV)

Daftar Isi

1 Transformasi Fourier

2 Transformasi Fourier

Fungsi-fungsi dasar

Transformasi Fourier adalah salah satu **transformasi terpenting** pada **teknik Telekomunikasi**.

- 1 **Transformasi Fourier** memindahkan fungsi atau sinyal pada **ranah waktu** ke ranah **frekuensi**
- 2 Hasil transformasi pada ranah frekuensi **dapat dikembalikan** ke ranah waktu dengan **invers Transformasi Fourier**
- 3 Hasil transformasi pada ranah frekuensi menyatakan **gambaran komponen frekuensi** (**rendah, sedang, dan tinggi**) dari fungsi ranah waktu.
- 4 Transformasi Fourier dipakai pada kuliah-kuliah lanjut seperti **Pengolahan Sinyal, Sistem Komunikasi**, dan sebagainya.
- 5 Sebelum Transformasi Fourier dipelajari, perlu direview beberapa **fungsi dasar**.

Fungsi dasar

Beberapa fungsi dasar:

No	Nama Fungsi	Notasi
1	Fungsi Impulse (Delta Dirac)	$f(t) = \delta(t)$
2	Fungsi unit step	$f(t) = u(t)$
3	Fungsi ramp	$f(t) = t$
4	Fungsi eksponen	$f(t) = e^{at}$
5	Fungsi sinus	$f(t) = \sin at$
6	Fungsi kosinus	$f(t) = \cos at$

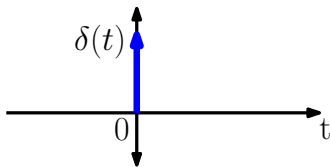
Fungsi Dasar

1). Fungsi **Impulse** (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t \neq 0 \\ \infty & \text{untuk } t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Gambar :



Fungsi Dasar

1). Fungsi Impulse (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Secara konsep dapat dipahami bahwa:

- 1 Fungsi $\delta(t)$ adalah fungsi impulse yang terjadi pada $t = 0$
- 2 Tingginya sangat tinggi (secara teori ∞)
- 3 Luasnya 1 satuan.

Dengan demikian, dapat digeneralisasi bahwa fungsi:

$$f(t) = 2\delta(t)$$

adalah

- 1 sinyal impulse yang terjadi pada $t=0$
- 2 tingginya $2\infty = \infty$
- 3 luasnya 2 satuan.

Fungsi Dasar

1). Fungsi Impulse (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Secara konsep dapat dipahami bahwa:

- 1 Fungsi $\delta(t)$ adalah fungsi impulse yang terjadi pada $t = 0$
- 2 Tingginya sangat tinggi (secara teori ∞)
- 3 Luasnya 1 satuan.

Dengan demikian, dapat digeneralisasi bahwa fungsi:

$$f(t) = 2\delta(t)$$

adalah

- 1 sinyal impulse yang terjadi pada $t=0$
- 2 tingginya $2\infty = \infty$
- 3 luasnya 2 satuan.

Fungsi dasar

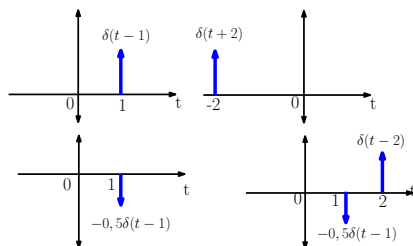
Bentuk impulse yang lebih umum dinyatakan dengan:

$$f(t) = k\delta(t - t_0)$$

$k\delta(t - t_0)$ menyatakan:

- 1 Sinyal impulse yang terjadi di $t = t_0$
- 2 Tingginya $k\infty$
- 3 Luasnya : k satuan

Beberapa contoh:

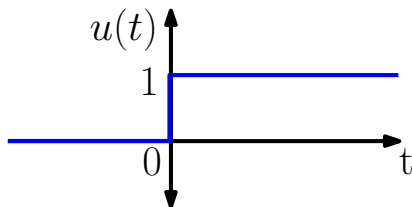


Fungsi dasar

2). Fungsi unit step $f(t) = u(t)$

Fungsi unit step didefinisikan sebagai:

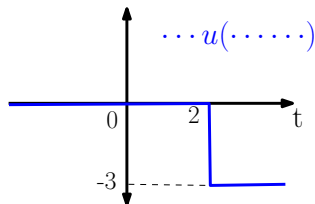
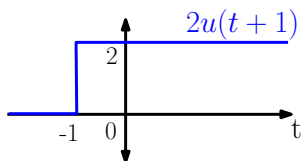
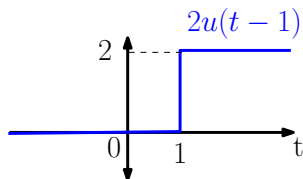
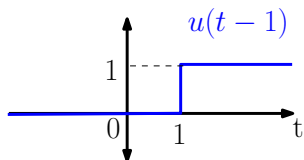
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } t < 0 \end{cases}$$



Fungsi dasar

2). Fungsi unit step

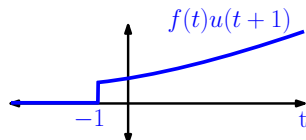
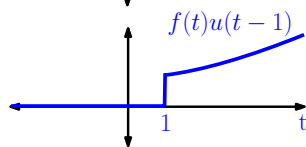
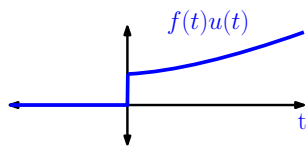
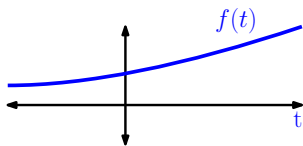
Beberapa ilustrasi:



Fungsi dasar

2). Fungsi unit step

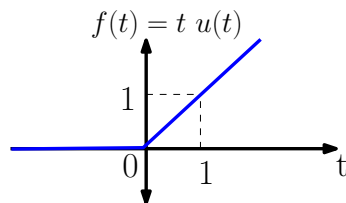
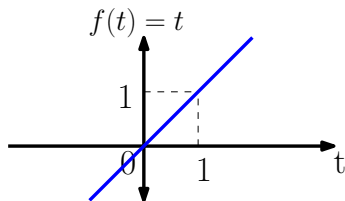
Fungsi unit step sering digunakan untuk menyatakan kapan suatu sinyal 'switched on'. (Disebut juga fungsi terpotong)



Fungsi dasar

3). Fungsi ramp

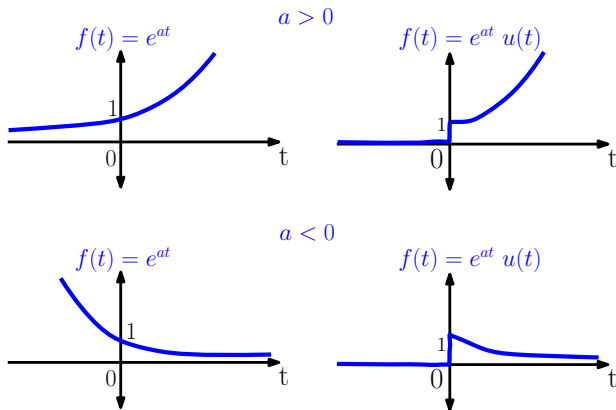
Fungsi Ramp: $f(t) = t u(t)$ adalah fungsi terpotong dari $f(t) = t$



Fungsi dasar

4). Fungsi eksponen

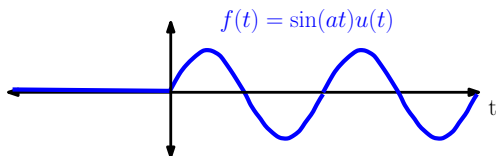
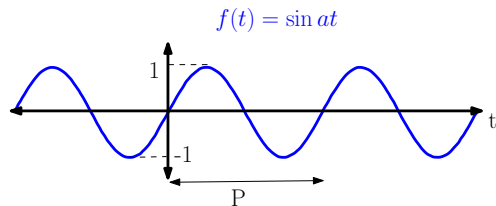
$f(t) = e^{at}$ dan bentuk terpotongnya: $f(t) = e^{at} u(t)$



Fungsi dasar

5). Fungsi Sinus dan bentuk terpotongnya

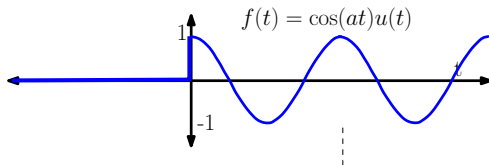
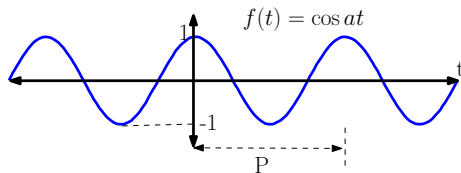
$$f(t) = \sin(at) \text{ dan } f(t) = \sin(at)u(t)$$



Fungsi dasar

6). Fungsi Kosinus dan bentuk terpotongnya

$$f(t) = \cos(at) \text{ dan } f(t) = \cos(at)u(t)$$



Transformasi Fourier

Transformasi Fourier dari fungsi $f(t)$ dinotasikan sebagai $F(iw)$ dengan: ¹

$$F(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} dt$$

Dengan diagram panah:

$$f(t) \xrightarrow{\text{Transformasi Fourier}} F(iw)$$

Ranah waktu

Ranah frekuensi

Transformasi Fourier mentransformasikan fungsi pada ranah waktu (t) ke ranah frekuensi w . ($i = \sqrt{-1}$)

¹Notasi lain dari transformasi Fourier adalah $F(is)$, $F(i\Omega)$, $F(w)$ dan sebagainya.

Transformasi Fourier

Contoh 1: Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t)$

Jawab:

$$F(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{iw0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1$$

Jadi : $f(t) = \delta(t) \rightarrow F(iw) = 1$

Fungsi dasar yang lain dapat dihitung transformasinya dan hasil-hasilnya ditabelkan seperti slide selanjutnya.

Transformasi Fourier

Tabel Transformasi Fourier beberapa fungsi dasar:

No	Nama Fungsi	$f(t)$	$F(iw)$
1	Impulse	$\delta(t)$	1
2a	Satuan	1	$2\pi\delta(w)$
2b	Unit step	$u(t)$	$\frac{1}{iw} + \pi\delta(iw)$
3	Ramp	$t u(t)$	$-\frac{1}{w^2} + \pi\delta'(w)$
4	Eksponen terpotong	$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{iw-a}$
5a	sinus	$\sin at$	$i\pi [\delta(w+a) - \delta(w-a)]$
5b	sinus terpotong	$\sin at u(t)$	$\frac{a}{(iw)^2+a^2}$
6a	kosinus	$\cos at$	$\pi [\delta(w+a) + \delta(w-a)]$
6b	kosinus terpotong	$\cos at u(t)$	$\frac{iw}{(iw)^2+a^2}$

Transformasi Fourier

Contoh 1: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \sin \pi t$$

adalah

$$F(i\omega) = i\pi [\delta(\omega - \pi) - \delta(\omega + \pi)]$$

(Tabel, No 5a)

Contoh 2: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{-4t}u(t)$$

adalah

$$F(i\omega) = \frac{1}{i\omega - (-4)} = \frac{1}{i\omega + 4}$$

(Tabel, No 4)

Transformasi Fourier

Contoh 3: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \sin 20\pi t u(t)$$

adalah

$$F(iw) = \dots\dots\dots$$

Contoh 4: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \cos 20\pi t u(t)$$

adalah

$$F(iw) = \dots\dots\dots$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Diketahui : $f_1(t) \rightarrow F_1(iw)$ dan $f_2(t) \rightarrow F_2(iw)$, maka berlaku

No	Nama Sifat	$f(t)$	$F(iw)$
1	Linier	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(w) + b F_2(w)$
2	Penskalaan waktu	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{iw}{a}\right)$
3	Pergeseran waktu	$f(t - t_0)$	$F(iw - t_0)$
4	Pergeseran frekuensi	$e^{at} f(t)$	$F(iw - a)$
5	Perkalian dengan t	$t f(t)$	$j \frac{dF(iw)}{dw}$
6	Turunan waktu	$\frac{df(t)}{dt}$	$(iw) F(iw)$
7	Modulasi	$f(t) \cos at$	$\frac{1}{2} [F(iw + a) + F(iw - a)]$
8	Konvolusi ²	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(iw) F_2(iw)$

²Topik konvolusi akan dibahas tersendiri pada MK Pengolahan Sinyal

Transformasi Fourier

Contoh 5: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{2t} \sin \pi t u(t)$$

Jawab: Diketahui:

$$\sin \pi t u(t) \rightarrow \frac{\pi}{(iw)^2 + \pi^2}$$

Dengan menggunakan Sifat 4 diperoleh:

$$e^{2t} \sin \pi t u(t) \rightarrow \frac{\pi}{(iw - 2)^2 + \pi^2}$$

Transformasi Fourier

Contoh 6: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{2t} \cos \pi t u(t)$$

Jawab: Diketahui:

$$\cos \pi t u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Dengan menggunakan Sifat 4 diperoleh:

$$e^{2t} \cos \pi t u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Transformasi Fourier

Contoh 7: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = t e^{2t} u(t)$$

Jawab:

Diketahui:

$$e^{2t} u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Dengan menggunakan Sifat diperoleh:

$$t e^{2t} u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Transformasi Fourier

Contoh 8: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = t \sin 5t u(t)$$

Jawab:

Diketahui:

$$\sin 5t u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Dengan menggunakan Sifat diperoleh:

$$t \sin 5t u(t) \rightarrow \dots\dots\dots$$

Latihan

Dengan menggunakan tabel dan sifat-sifat transformasi, tentukan Transformasi Fourier dari fungsi-fungsi berikut:

1 $f(t) = u(t - 2)$

2 $f(t) = u(t) - u(t - 2)$

3 $f(t) = (1 + t)u(t)$

4 $f(t) = 5 \sin 2t u(t)$

5 $f(t) = 5 \cos \sqrt{2}t u(t)$

6 $f(t) = 3 \sin \sqrt{2}t u(t) + 4 \cos \sqrt{2}t u(t)$

7 $f(t) = e^{-t} \cos 2t u(t)$

8 $f(t) = e^{-t} \sin 2t u(t)$

9 $f(t) = t e^{-t} \sin 2t u(t)$

10 $f(t) = t e^{-t} \cos 2t u(t)$