



**Telkom**  
University

# **Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3**

**Pertemuan 04 : Proses Moving Average  
(MA)**

**Oleh : Koredianto Usman**

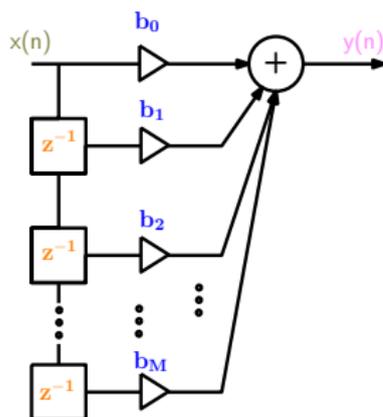
**Versi : Juni 2020**

# Proses Moving Average

- 1 Yang dimaksud dengan proses moving average adalah proses melewatkan sinyal stokastik ke filter Moving Average
- 2 Filter Moving Average adalah Filter Finite Impulse Response (FIR)
- 3 Hanya ada struktur forward dalam filter MA, tidak ada struktur feedback.
- 4 Proses MA ini adalah proses yang paling sederhana dari bentuk lainnya yaitu Autoregressive (AR), dan proses Autoregressive Moving Average (ARMA)

## Struktur FILTER MA

- 1 Struktur Filter MA orde M ditunjukkan pada Gambar berikut:



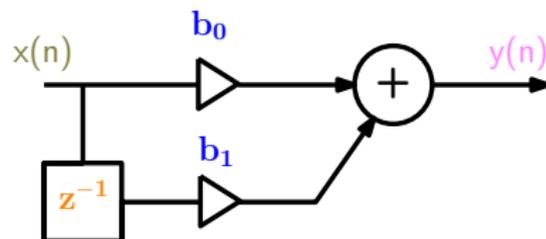
- 2 Terdapat  $M+1$  koefisien filter yaitu  $b_0$  sampai  $b_M$
- 3 Input dari filter ini adalah sinyal acak  $\mathbf{x(n)}$
- 4 Pada banyak kasus, sinyal input ini adalah sinyal acak Gaussian dengan mean 0 dan variansi 1.
- 5 Input ini dinotasikan dengan  $\mathbf{N(0,1)}$

# Proses MA

- 1 Oleh karena input adalah Gaussian  $\mathbf{N}(0,1)$
- 2 Maka fungsi autokorelasi  $r_{xx}(0) = 1$ , dan  $r_{xx}(k) = 0$  untuk  $k \neq 0$
- 3 Jika input Gaussian  $\mathbf{N}(0,1)$  dimasukkan ke filter MA, pertanyaannya adalah bagaimana fungsi autokorelasi dari keluarannya ( $r_{yy}(k)$ ), untuk setiap  $k$ ?
- 4 Untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita dapat telusuri dari persamaan yang menghubungkan antara input dan output filter

## Proses MA

- 1 Tinjau proses MA orde 1 dengan struktur berikut:



- 2 Persamaan yang menghubungkan input dengan output adalah:  $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$
- 3 Korelasikan ruas kiri dan kanan dengan  $y(n)$ , diperoleh:

$$COR(y(n), y(n)) = COR(y(n)[b_0x(n) + b_1x(n - 1)])$$

- 4 Ruas kiri memberikan  $r_{yy}(0)$ , sedangkan ruas kanan perlu disederhanakan dengan mensubstitusi  $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1)$

## Proses MA

1  $COR(y(n), y(n)) =$   
 $COR([b_0x(n) + b_1x(n-1)][b_0x(n) + b_1x(n-1)])$

2 Setelah disederhanakan diperoleh:

$$r_{yy}(0) = b_0^2 + b_1^2$$

3 Proses yang sama dapat kita lakukan untuk menghitung  $r_{yy}(1)$ , yaitu mengkorelasikan  $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$  dengan  $y(n-1)$  Dengan pendekatan ini diperoleh:

$$r_{yy}(1) = b_0b_1$$

4 Tentu saja berlaku sifat simetri yaitu:

$$r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = b_0b_1$$

5 Nilai  $r_{yy}(2) = r_{yy}(3) = \dots = 0$

## Proses MA

- 1 Proses menghitung nilai autokorelasi  $r_{yy}(0)$ ,  $r_{yy}(1)$  dst ini dapat ditabelkan sebagai berikut:

- 2 Menghitung  $r_{yy}(0)$  :

<b>Koef</b>	$b_0$	$b_1$	0	0
<b>Koef</b>	$b_0$	$b_1$	0	0
Perkalian	$b_0^2$	$b_1^2$	0	0
JUMLAH	$b_0^2 + b_1^2$			

- 3 Menghitung  $r_{yy}(1)$  (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

<b>Koef</b>	$b_0$	$b_1$	0	0
<b>Koef</b>	0	$b_0$	$b_1$	0
Perkalian	0	$b_0 b_1$	0	0
JUMLAH	$b_0 b_1$			

## Contoh 1

- ❶ Sinyal Gaussian  $N(0,1)$  diinputkan ke filter MA(1) dengan koefisien filter  $b_0 = 1$  dan  $b_1 = 2$ , tentukan fungsi autokorelasi keluaran  $r_{yy}(0)$ ,  $r_{yy}(1)$ !

- ❷ **Jawab:** Menghitung  $r_{yy}(0)$  :

<b>Koef</b>	1	2	0	0
<b>Koef</b>	1	2	0	0
Perkalian	1	4	0	0
JUMLAH	1+4=5			

- ❸ Menghitung  $r_{yy}(1)$  (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

<b>Koef</b>	1	2	0	0
<b>Koef</b>	0	1	2	0
Perkalian	0	2	0	0
JUMLAH	2			

- ❹ Dengan demikian:  $r_{yy}(0) = 5$  dan  $r_{yy}(1) = 2$

## Contoh 2

- ❶ Sinyal Gaussian  $N(0,1)$  diinputkan ke filter MA(2) dengan koefisien filter  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$  dan  $b_2 = 5$ , tentukan fungsi autokorelasi keluaran  $r_{yy}(0)$ ,  $r_{yy}(1)$ , dan  $r_{yy}(2)$ !

- ❷ **Jawab:** Menghitung  $r_{yy}(0)$  :

<b>Koef</b>	1	2	5	0
<b>Koef</b>	1	2	5	0
Perkalian	1	4	25	0
JUMLAH	1+4+25=30			

- ❸ Menghitung  $r_{yy}(1)$  (koefisien baris 2 digeser 1 ke kanan):

<b>Koef</b>	1	2	5	0
<b>Koef</b>	0	1	2	5
Perkalian	0	2	10	0
JUMLAH	12			

- ❹ Dengan demikian:  $r_{yy}(0) = 5$  dan  $r_{yy}(1) = 2$

## Contoh 2 - lanjutan

- 1 Menghitung  $r_{yy}(2)$  : (koefisien baris 2 digeser 2 ke kanan):

<b>Koef</b>	1	2	5	0
<b>Koef</b>	0	0	1	2
Perkalian	0	0	5	0
JUMLAH	5			

- 2 Dengan demikian:  $r_{yy}(0) = 30$  dan  $r_{yy}(1) = 12$  dan  $r_{yy}(2) = 5$
- 3 Meski tidak ditanyakan, maka nilai  $r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = 12$  dan  $r_{yy}(-2) = r_{yy}(2) = 5$

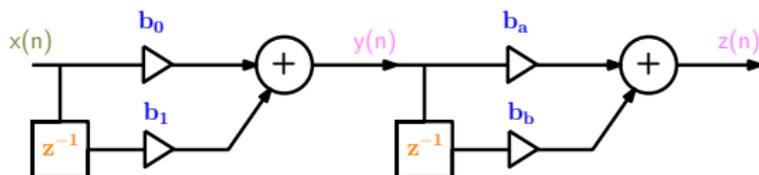
## Latihan 01

- 1 Sinyal Gaussian  $N(0,1)$ , Dilewatkan pada filter MA(3) dengan koefisien  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2$  dan  $b_3 = -1$
- 2 Hitung  $r_{yy}(0)$ ,  $r_{yy}(1)$ ,  $r_{yy}(2)$  dan  $r_{yy}(3)$ !

**Jawab:**

## Susunan Cascade

- 1 Susunan Cascade adalah filter MA disusun serial dengan filter MA lainnya.
- 2 Contoh struktur cascade adalah sebagai berikut:



- 3 Input  $\mathbf{x(n)}$  adalah Gaussian  $N(0,1)$
- 4 Berapakah nilai autokorelasi dari  $r_{yy}$  dan  $r_{zz}$ ?
- 5 Nilai  $r_{yy}$  dapat dihitung dengan mudah menggunakan teknik tabulasi seperti sebelumnya. Untuk orde 1, proses MA sebelah kiri (Stage I) maka kita peroleh:  $r_{yy}(0) = b_0^2 + b_1^2$  dan  $r_{yy}(-1) = r_{yy}(1) = b_0 b_1$

## Susunan Cascade

- 1 Nilai  $r_{zz}$  dapat dihitung bertahap sebagai berikut:
- 2 Misalkan masukannya filter MA sebelah kanan (Stage II) adalah Gaussian  $N(0,1)$ . maka kita peroleh:  $r_{zz}(0) = b_a^2 + b_b^2$  dan  $r_{zz}(-1) = r_{zz}(1) = b_a b_b$
- 3 Selanjutnya baru kita tinjau jika masukan  $\mathbf{y}(\mathbf{n})$ , maka kita peroleh  $r_{zz}(0)$  dengan tabulasi:

<b>Korelasi input</b>	$b_0 b_1$	$b_0^2 + b_1^2$	$b_0 b_1$
<b>Korelasi filter</b>	$b_a b_b$	$b_a^2 + b_b^2$	$b_a b_b$
Perkalian	...	...	... ..
JUMLAH	...		

## Latihan Soal

- 1 Sinyal Gaussian  $N(0,1)$ , Dilewatkan pada filter MA(1) yang dicascade dengan MA(2). Untuk filter MA(1) koefisien filter adalah  $b_0 = 1$  dan  $b_1 = 1$ , sedangkan untuk filter MA(2) koefisien filter adalah  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 1$  dan  $b_2 = -1$
- 2 Hitung  $r_{yy}(0)$ ,  $r_{yy}(1)$ ,  $r_{zz}(0)$  dan  $r_{zz}(1)$ !

**Jawab:**