



**Telkom**  
University

# **Pengolahan Sinyal Digital Lanjut dan Aplikasi (PSDLA) : TTH5I3**

**Pertemuan 07 : Iterasi Levinson Durbin**  
**Oleh : Koredianto Usman**

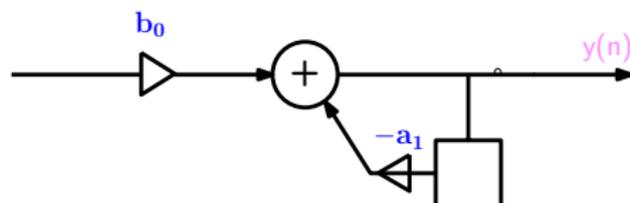
**Versi : Juni 2020**

## Iterasi Levinson-Durbin

- 1 Iterasi Levinson-Durbin adalah salah satu iterasi penting pada proses AR (Slide 5)
- 2 Pada persamaan Yule-Walker dari proses AR(N) dengan  $N > 1$ , dan khususnya untuk kasus Sintesis, maka kita perlu menghitung inverse matriks Toeplitz untuk memperoleh koefisien filter.
- 3 Jika orde dari AR yaitu N ini besar, misalnya lebih dari 10, maka proses menghitung inverse matriks akan menjadi berat.
- 4 Secara Teori, komputasi untuk menghitung matriks orde N adalah  $O(N^3)$
- 5 Metode Iterasi Levinson-Durbin adalah metode untuk menghitung inverse matriks dengan kompleksitas yang lebih kecil
- 6 Slide 7 ini membahas tentang Teknik Iterasi Levinson-Durbin tersebut.

# Matriks Toeplitz

- 1 Tinjau proses AR orde 1 dengan struktur berikut:



- 2 Persamaan Yule-Walker biasanya ditulis secukupnya. Untuk AR(1) maka persamaan ditulis dalam 2 baris menjadi:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Matriks Toeplitz

- 1 Jika sebagai contoh  $r_{yy}(0) = 4$  dan  $r_{yy}(1) = 1$
- 2 Maka persamaan Yule-Walker ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 3 Jika kita perhatikan, matriks pengali sebelah kiri:  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  adalah matriks Toeplitz, seperti yang sudah dibahas pada **Slide 03**.
- 4 Matriks ini memiliki elemen diagonal yang sama, serta kesimetrian pada posisi segitiga atas terhadap posisi segitiga bawah.

## Matriks Toeplitz

- 1 Matriks Toeplitz memiliki keunikan yaitu jika kita kalikan suatu vektor P dengan Matriks Toeplitz menghasilkan katakan vektor A,
- 2 Kemudian jika urutan dari Vektor P itu ditukar dari atas ke bawah, maka element pada vektor A juga akan bertukar dari atas ke bawah.
- 3 Untuk memperlihatkan konsep ini, kita lihat contoh berikut:
- 4 Misal matriks Toeplitz kita adalah

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dan kita pilih sebarang vektor P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Matriks Toeplitz

- 1 Jika  $T$  dikalikan dengan  $P$  diperoleh:

$$T \times P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix}$$

- 2 Selanjutnya urutan baris pada Vektor  $P$  kita tukar (baris 1 menjadi baris 2 dan baris 2 menjadi baris 1) maka kita peroleh  $P' = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- 3 Kita kalikan  $T$  dengan  $P'$  diperoleh:

$$T \times P' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- 4 Terlihat bahwa urutan dari  $A$  juga tertukar

# Matriks Toeplitz

- 1 Sifat inilah yang dieksplotasi dalam algoritma Levinson-Durbin
- 2 Penurunan iterasi Levinson Durbin akan kita lihat melalui contoh berikut

## Contoh ilustrasi algoritma Levinson-Durbin

Kita akan selesaikan kembali persoalan Sintesis pada Slide 5 dengan iterasi Levinson Durbin.

- 1 Sinyal Gaussian  $N(0,1)$  diinputkan ke filter MA(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi  $r_{yy}(0) = 2$ ,  $r_{yy}(1) = 1$ . Tentukan koefisien filter  $b_0$ , dan  $a_1$ !
- 2 **Jawab:**
- 3 Persamaan Yule-Walker dari permasalahan ini adalah:

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) \\ r_{yy}(-1) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Contoh ilustrasi algoritma Levinson-Durbin-Lanjutan

- 1 Langkah 1: Mulai dari matriks dimensi  $1 \times 1$
- 2 Dalam dimensi  $1 \times 1$ , persamaan Yule-Walker menjadi:

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \end{bmatrix} \rightarrow b_0^2 = 2$$

- 3 Langkah 2, eksten menjadi matriks  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 4 Proses eksten ini dilakukan dengan menjadikan matriks Toeplitz menjadi  $2 \times 2$  dengan isi sebagaimana nilai koefisien korelasi  $r_{yy}$ .

## Contoh ilustrasi algoritma Levinson-Durbin-Lanjutan

- 5 Hasil eksten  $2 \times 2$ :  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 6 Di sini kita perlu membuat element kedua dari ruas kanan dari 1 menjadi 0.
- 7 Untuk melakukannya, maka kita tambahkan ruas kiri dengan suku yang sudah dibalik:
- $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
- 8 Alih-alih memperoleh nilai 0 pada element kedua dari vektor ruas kanan.
- 9 Oleh karena itu, kita harus mengalikan penambah dengan  $-\frac{1}{2}$

## Contoh ilustrasi algoritma Levinson-Durbin-Lanjutan

- 10 dengan pembobotan  $-\frac{1}{2}$  untuk suku penambah ini, kita peroleh: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 11 Yah, dengan pembobotan ini kita peroleh bentuk: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 12 Bandingkan dengan permasalahan awal yaitu: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 13 Maka kita peroleh:  $a_1 = -1/2$  dan  $b_0 = \pm\sqrt{3/2}$
- 14 Solusi ini sama dengan solusi yang kita peroleh dengan metode biasa seperti pada slide 5

## Latihan 01 : Selesaikan dengan iterasi Levinson-Durbin

- 1 Sinyal Gaussian  $N(0,1)$  diinputkan ke filter MA(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi  $r_{yy}(0) = 4$ ,  $r_{yy}(1) = 1$ . Tentukan koefisien filter  $b_0$ , dan  $a_1$  dengan Levinson-Durbin!

**Jawab:** .....

# Latihan Soal

- 1 Sinyal Gaussian  $N(0,1)$  diinputkan ke filter AR(2). Keluaran filter memiliki keluaran dengan koefisien korelasi  $r_{yy}(0) = 4$ ,  $r_{yy}(1) = 1$  dan  $r_{yy}(2) = 1/2$ . Tentukan koefisien filter  $b_0$ , dan  $a_1$ , dan  $a_2$ , dengan iterasi Levinson-Durbin!