

# Fungsi Peubah Kompleks

Puguh Wahyu Prasetyo (Universitas Ahmad Dahlan)

March 2, 2020

Sebelum mendefinisikan bilangan kompleks, pembaca diingatkan kembali pada permasalahan dalam sistem bilangan yang telah dikenal sebelumnya. Yang pertama adalah bilangan bulat.

Diberikan masalah sebagai berikut:

- 1 Berapa nilai bilangan  $a$  sehingga  $2a = 6$ ?
- 2 Berapa nilai bilangan  $a$  sehingga  $2a = 7$ , maka tidak ada bilangan bulat yang memenuhi persamaan tersebut.
- 3 Selanjutnya perhatikan bahwa  $2(3) = 6$  dan  $2(4) = 8$ , dan 7 terletak diantara dua bilangan bulat 6 dan 8. Dengan demikian kita perlu mengenalkan bentuk “pecahan”.

Bentuk “pecahan” atau bilangan rasional didefinisikan sebagai pasangan terurut dari bilangan bulat, misalnya  $(7, 2)$  (notasi lain  $\frac{7}{2}$ ) adalah bilangan rasional. Bilangan rasional  $(m, n)$  dan  $(p, q)$  dikatakan sama jika bilangan yang seletak dalam pasangan itu bernilai sama, yaitu  $m = p$  dan  $n = q$  atau  $mq = np$ . Jumlah dan hasil kali dua bilangan rasional tersebut adalah

$$(m, n) + (p, q) = (mq + np, nq) \text{ dan } (m, n)(p, q) = (mp, nq)$$

Menggunakan notasi bilangan rasional, maka bilangan bulat  $n$  dapat dinyatakan dengan  $(n, 1)$ . Jadi semua bilangan rasional dengan koordinat keduanya satu merupakan bilangan bulat. Pada permasalahan di atas,  $2a = 7$  dapat dituliskan sebagai  $(2, 1)(m, n) = (7, 1)$ , dan penyelesaiannya adalah  $a = (m, n) = (7, 2)$ .

Paradigma seperti di atas selanjutnya akan digunakan untuk mengkonstruksi bilangan kompleks. Euclid menunjukkan bahwa **tidak ada** bilangan rasional yang memenuhi persamaan  $x^2 = 2$ . Dengan demikian perlu didefinisikan bilangan baru, yaitu bilangan real, yang termasuk didalamnya bilangan rasional.

Pada tingkatan selanjutnya, dihadapkan pada permasalahan, berapa nilai  $x$  yang memenuhi  $x^2 = -1$ . Ternyata tidak ada bilangan real yang memenuhi persamaan tersebut, sehingga didefinisikan bilangan baru, yaitu bilangan kompleks

### Definition 1

Bilangan kompleks merupakan pasangan terurut bilangan real  $(x, y)$ , seperti halnya bilangan rasional yang merupakan pasangan bilangan bulat. Dua bilangan kompleks  $(x, y)$  dan  $(u, v)$  dikatakan sama jika  $x = u$  dan  $y = v$ . Penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks, didefinisikan sebagai berikut:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \text{ dan } (x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Secara umum, setiap bilangan kompleks dinotasikan dengan  $z = (x, y)$  dan dapat dinyatakan dengan

$$z = x + iy$$

dengan  $i^2 = -1$ ,  $x$  disebut bagian real dari  $z$ , ditulis  $Re(z)$ , dan  $y$  disebut bagian imajiner dari  $z$ , ditulis  $Im(z)$ .

## Permasalahan

Jika diketahui  $z = x + iy$  dan  $w = u + iv$  keduanya merupakan bilangan kompleks, tentukan  $\frac{z}{w}$ !

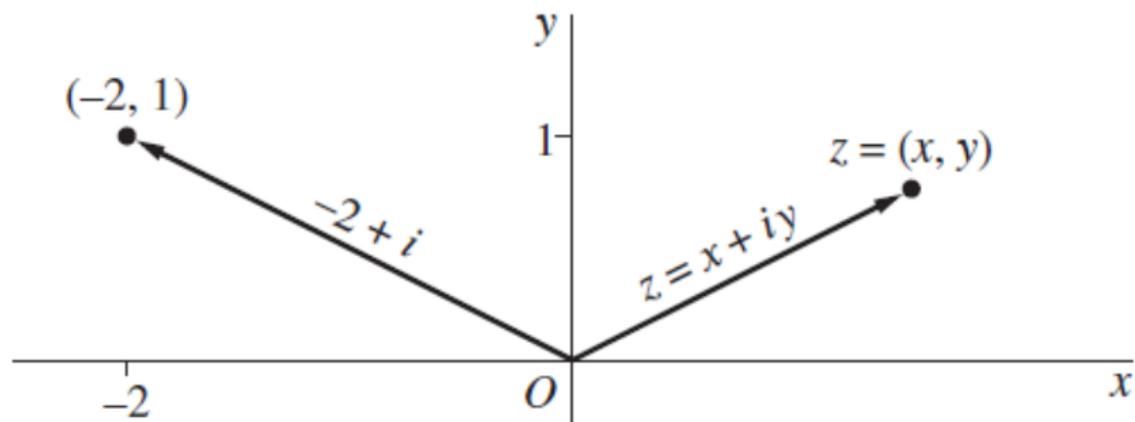


Figure : Bilangan Kompleks Secara Geometri

Moduli dari suatu bilangan kompleks  $z = x + iy$  didefinisikan sebagai *magnitude* atau panjang vektor  $(x, y)$ , yaitu

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Latihan

- 1 Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk  $x + iy$ 
  - a.  $(2 - 5i)(3 + i)$
  - b.  $\frac{2+3i}{5-i}$
  - c.  $(1 + i)^3$
- 2 Tunjukkan bahwa jika  $wz = 0$ , maka  $w = 0$  atau  $z = 0$ .
- 3 Buktikan bahwa
  - a.  $Re(iz) = -Im(z)$ ,
  - b.  $Im(iz) = Re(z)$ .
- 4 Tunjukkan bahwa  $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$
- 5 Buktikan bahwa dua bilangan kompleks  $z = 1 \pm i$  memenuhi persamaan  $z^2 - 2z + 2 = 0$