Penyajian Bilangan Kompleks Secara geometri

Secara geometri, bilangan kompleks dapat disajikan dalam sebuah bidang. Bidang ini disebut bidang kompleks, yang mengacu pada koordinat cartesius, yang terdiri dari sumbu real (sumbu X) dan sumbu imajiner (sumbu Y).

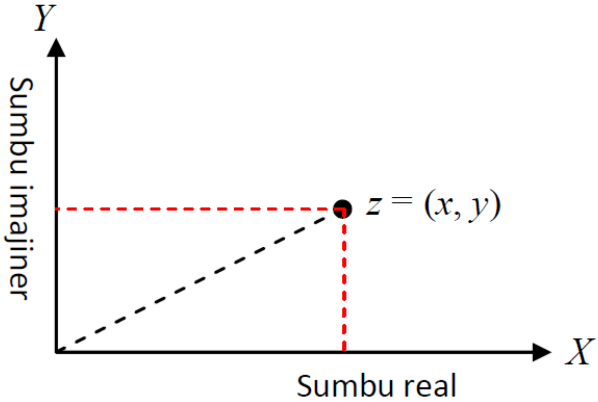

Figure : Penyajian Bilangan Kompeks pada Bidang Cartesius

Secara geometri, terdapat korespondensi satu-satu antara hasil penjumlahan dua bilangan kompleks $z_1 + z_2$ dengan diagonal segiempat yang dibentuk oleh z_1 dan z_2 seperti terlihat pada Gambar berikut ini.

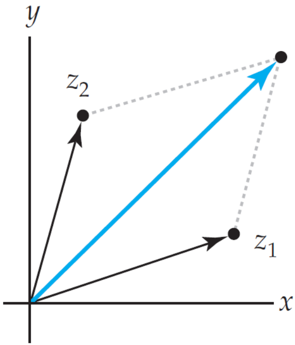

Figure : Penjumlahan Bilangan Kompleks

Ingat kembali definisi moduli dari suatu bilangan kompleks pada pertemuan sebelumnya, yaitu untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$, diperoleh moduli $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka diperoleh

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Latihan

Diketahui z dan w merupakan bilangan kompleks dengan $z \neq 0$. Buktikan kebenaran persamaan berikut ini!

1. $|wz| = |w||z|$
2. $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

Konjugat (sekawan) dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks yang diperoleh dari pencerminan z terhadap sumbu real, dan dinotasikan dengan $\overline{z} = x - iy$

Buktikan sifat-sifat berikut ini!

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
3. $z\overline{z} = |z|^2$
4. $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ dan $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, diperoleh **Ketidaksamaan Segitiga** sebagai berikut:

Theorem 2

Untuk setiap bilangan kompleks z dan w diperoleh

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

Proof.

Gunakan $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})$ $\square$

Bilangan kompleks dapat juga dinyatakan dalam peubah polar, yaitu r dan θ

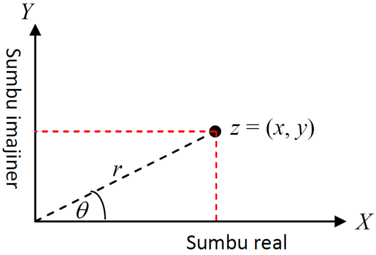

Figure : Koordinat Kutub

sehingga untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Notasi r merupakan moduli dari bilangan kompleks z, sedangkan θ merupakan sudut yang dibentuk oleh z dengan sumbu real positif yang disebut **argumen** dari z, dan dinotasikan dengan

$$\arg z = \text{arc tg}(\frac{y}{x})$$

Dengan demikian setiap bilangan kompleks mempunyai tak berhingga argumen, yang masing-masing selisihnya 2π. Nilai argumen yang terletak pada interval $(-\pi, \pi]$ disebut sebagai **argumen utama/ principal argument** dinamakan argumen utama dari z.

Tentukan bentuk kutub dari $z = 1 - i$.

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $r = \sqrt{2}$ dan $\theta = \text{arc tg}(\frac{-1}{1})$ sehingga $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, dengan $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Oleh sebab itu diperoleh:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos(-\tfrac{7\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{7\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos(-\tfrac{399\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{399\pi}{4}))$$

Bilangan $-\frac{\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$ merupakan argumen dari $z = 1 - i$ dan argumen utamanya adalah $-\frac{\pi}{4}$.