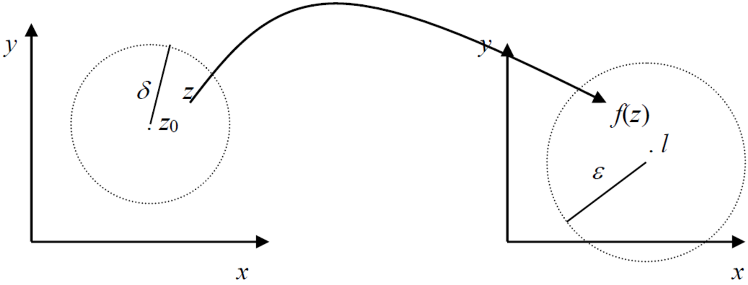
Limit dan Kekontinuan

Secara esensi, pengertian limit dan kekontinuan suatu fungsi kompleks sama dengan pengertian limit dan kekontinuan fungsi real yang telah kita pelajari pada kalkulus diferensial.



Definition 9

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai limit l untuk z mendekati z_0 jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ terdapat bilangan positif δ sehingga untuk $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - l| < \epsilon$ dan ditulis sebagai

$$\lim_{x \to z_0} f(x) = l$$

Catatan:

1. Titik z_0 adalah titik limit domain fungsi f
2. Titik z menuju z_0 melalui sebarang lengkungan K, artinya z menuju z_0 dari segala arah.
3. Apabila z menuju z_0 melalui dua lengkungan yang berbeda, mengakibatkan $f(z)$ menuju dua nilai yang berbeda, maka limit fungsi f tersebut tidak ada untuk z mendekati z_0.

Example 10

Buktikan bahwa

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3z - 2}{z - 2} = 5$$

Penyelesaian Dalam menyelesaikan permasalahan ini, akan dibagi menjadi dua tahap yang meliputi penjabaran secara teknis dan bukti formal. Misalkan diberikan $\epsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ sehingga memenuhi

$$0 < |z - 2| < \delta \Rightarrow |\frac{2x^2 - 3z - 2}{z - 2} - 5| < \epsilon,$$

untuk $z \neq 2$.

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{2x^2-3z-2}{z-2}-5\right|<\epsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{z-2}-5\right|<\epsilon\\
&\Leftrightarrow |2z+1-5|<\epsilon\\
&\Leftrightarrow |2z-4|<\epsilon\\
\left|\frac{2x^2-3z-2}{z-2}-5\right|<\epsilon &\Leftrightarrow |z-2|<\frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\delta=\frac{\epsilon}{2}$ dapat digunakan. Kemudian dilanjutkan dengan pembuktian secara formal pada slide selanjutnya.

Bukti Formal:

Jika diberikan $\epsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ sehingga untuk $z \neq 2$, diperoleh

$$\begin{aligned} 0 < |z-2| < \delta &\Leftrightarrow \quad |\tfrac{2x^2-3z-2}{z-2} - 5| \\ &\Leftrightarrow \quad |\tfrac{(2z+1)(z-2)}{z-2} - 5| \\ 0 < |z-2| < \delta &\Leftrightarrow \quad |2(z-2)| < 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

Jadi $|\frac{(2z+1)(z-2)}{z-2} - 5| < \epsilon$ jika $0 < |z-2| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$. Oleh sebab itu terbukti bahwa

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3z - 2}{z - 2} = 5$$

Theorem 11

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_0, maka nilai limitnya tunggal.

Bukti

Misalkan diketahui fungsi f mempunyai limit ganda untuk z menuju z_0, katakan w_0 dan w_1. Oleh sebab itu diperoleh

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \text{ ketika } 0 < |z - z_0| < \delta_0$$

dan

$$|f(z) - w_1| < \epsilon \text{ ketika } 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

Karena,

$$w_1 - w_0 \leq |f(z) - w_0| + |w_1 - f(z)| = |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1|,$$

maka berdasarkan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$|w_1 - w_0| \leq |f(z) - w_0| + |w_1 - f(z)| = |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1|.$$

Oleh sebab itu, jika $0 < |z - z_0| < \delta$ dengan δ merupakan sebarang bilangan positif sehingga kurang dari δ_0 dan δ_1, maka

$$|w_1 - w_0| < \epsilon + \epsilon \Leftrightarrow |w_1 - w_0| < 2\epsilon$$

Akan tetapi karena $|w_1 - w_0|$ nonnegatif, dan ϵ dapat dipilih sangat kecil mendekati nol, maka diperoleh

$$w_1 - w_0 = 0, \ \text{atau} \ w_1 = w_0.$$

Theorem 12

Misalkan $z = x + iy$ *dan* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *dengan domain* D*. Titik* $z_0 = x_0 + iy_0$ *di dalam* D *atau batas* D*, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.*

1. $\lim_{x \to z_0} f(z) = x_0 + iy_0$
2. $\lim_{z \to z_0} u(x, y) = x_0$ *dan* $\lim_{z \to z_0} v(x, y) = y_0$.

Misalkan fungsi f dan g limitnya ada, dengan $\lim f(z) = a$ dan $\lim g(z) = b$, maka

1. $\lim(f(z) + g(z)) = a + b$ (untuk $z \to z_0$)
2. $\lim(f(z).g(z)) = ab$(untuk $z \to z_0$)
3. $\lim \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a}{b}$ (untuk $z \to z_0$)

Example 13

Hitunglah!

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i}$$

Penyelesaian

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z\to i} \frac{(z+1)(z-1)}{z-i} = \lim_{z\to i}(z+i) = 2i$$

Example 14

Buktikan bahwa

$$f(z) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + i\frac{x^2}{y+1}$$

tidak ada!

Penyelesaian

Perhatikan z menuju 0 di sepanjang garis $y = 0$, maka

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,0) \to (0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0} x^2 i = 0,$$

Selanjutnya, perhatikan untuk z menuju 0 di sepanjang garis $y = x$ diperoleh

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0} (1 + i\frac{x^2}{x+1}) = 1.$$

Karena dari dua arah yang nilainya berbeda, maka dapat dipastikan bahwa

$$\lim_{z \to 0} f(z)$$

tidak ada.