Persamaan Diferensial

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

1. Definisi dan Klasifikasi
2. Solusi
3. Nilai awal

Definisi

Definition

Suatu persamaan yang memuat turunan atas satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independen disebut dengan persamaan diferensial.

Sebagai contoh :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 0, \\
\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x &= \sin t, \\
\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} &= v, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Klasifikasi - banyaknya variabel independen I

Berdasarkan banyaknya variabel independen, persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis yaitu :

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Definition

Suatu persamaan yang memuat turunan atas satu atau lebih variabel dependen terhadap **satu** variabel independen disebut dengan persamaan diferensial biasa.

Notasi turunan yang digunakan yaitu d. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x &= \sin t, \end{aligned}$$

Klasifikasi - banyaknya variabel independen II

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Definition

Suatu persamaan yang memuat turunan atas satu atau lebih variabel dependen terhadap **lebih dari satu** variabel independen disebut dengan persamaan diferensial parsial.

Notasi turunan yang digunakan yaitu ∂. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} &= v, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Pada perkuliahan ini, persamaan diferensial yang dibahas hanyalah persamaan diferensial biasa. Selanjutnya akan dibahas klasifikasi PDB berdasarkan orde dan linearitasnya.

Klasifikasi PDB - Orde I

Definition

Orde persamaan differential adalah tingkatan turunan tertinggi pada suatu persamaan diferensial.

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 0, \quad \text{orde } 2\\
\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x &= \sin t, \quad \text{orde } 4\\
m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k\frac{dy}{dt} &= 0, \quad \text{orde } 1
\end{aligned}$$

Klasifikasi PDB - Orde II

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde-n dengan y variabel dependen dan x variabel independen adalah

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0.$$

Berdasarkan orde dari suatu persamaan diferensial, PDB dibagi menjadi dua jenis yaitu

1. PDB Orde Satu
   yaitu PDB dengan orde (turunan tingkat tertinggi) yang muncul pada persamaan adalah satu.
2. PDB Orde Tinggi
   yaitu PDB dengan orde (turunan tingkat tertinggi) yang muncul pada persamaan lebih dari satu.

Klasifikasi - Linearitas I

Definition

Persamaan diferensial biasa orde-n dengan y variabel dependen dan x variabel independen disebut **linear** jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x),$$

dengan $a_0(x) \neq 0$.

Selanjutnya, persamaan diferensial biasa yang tidak linear disebut dengan persamaan diferensial nonlinear, yaitu ketika muncul perkalian atas variabel dependen dengan dirinya sendiri maupun turunannya atau muncul fungsi transenden atas variabel dependen.

Klasifikasi - Linearitas II

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} &= 0, \quad \textit{nonlinear} \\
\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x &= \sin t, \quad \textit{linear} \\
m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k\frac{dy}{dt} &= 0, \quad \textit{nonlinear} \\
\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y &= 0. \quad \textit{nonlinear}
\end{aligned}$$

Jika dilihat dari koefisien-koefisiennya, PD linear dapat dibagi menjadi dua jenis yaitu koefisien konstan dan koefisien variabel.

Latihan 1.1

Tentukan jenis-jenis dari persamaan-persamaan diferensial berikut :

1. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$
2. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = \sin x$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y \sin x = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} + x \sin y = 0$

Selanjutnya akan dibahas mengenai solusi PDB.

Ilustrasi

Perhatikan bahwa pada persamaan berikut

$$y = e^{0.1x^2}$$

jika diturunkan maka berlaku

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xe^{0.1x^2} = 0.2xy.$$

Jadi, $y = e^{0.1x^2}$ memenuhi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 0.2xy$.
Selanjutnya, $y = e^{0.1x^2}$ disebut solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 0.2xy$.

Definisi solusi

Definition

Diberikan persamaan diferensial orde-n sebagai berikut

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0, \tag{1}$$

serta fungsi f fungsi real yang terdefinisi di setiap x pada interval I dan mempunyai turunan hingga ke-n. Persamaan $y = f(x)$ disebut solusi dari Persamaan (1) jika memenuhi dua syarat berikut

1. $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ terdefinisi di setiap $x \in I$
2. $F\left[x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$ untuk setiap $x \in I$.

Contoh 1.1

Example

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x, fungsi

$$f(x) = 2\sin x + 3\cos x$$

merupakan memenuhi persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Karena

$$f'(x) = 2\cos x - 3\sin x \to f''(x) = -2\sin x - 3\cos x$$

diperoleh

$$f''(x) + f(x) = (-2\sin x - 3\cos x) + (2\sin x + 3\cos x) = 0.$$

Jadi, f memenuhi persamaan atau $y = 2\sin x + 3\cos x$ merupakan solusi.

Contoh 1.2

Pada dua persamaan sebelumnya, hubungan x-y dinyatakan sebagai eksplisit y sebagai fungsi atas x. Perhatikan persamaan berikut :

$$x^2 + y^2 = 4, \quad [-2, 2]$$

Turunan dari persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) &= \frac{d}{dx}4 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ y\frac{dy}{dx} &= -x. \end{aligned}$$

Jadi, $x^2 + y^2 = 4$ adalah solusi dari $y\dfrac{dy}{dx} = -x$.

Solusi eksplisit dan Implisit

Dilihat dari cara menyatakan hubungan antara variabel dependen dan independen, solusi dibagi menjadi dua jenis yaitu

1. **solusi eksplisit**, yaitu solusi dimana variabel dependen dapat dinyatakan hanya atas variabel independen dan konstanta saja, $y = f(x)$. Contoh solusi persamaan 1 dan 2.
2. **solusi implisit** yaitu solusi persamaan (1) yang dinyatakan dalam bentuk persamaan $g(x, y) = 0$. Contoh solusi persamaan 3.

Jika solusi yang diperoleh merupakan solusi implisit, dapatkah solusi implisit dinyatakan dalam bentuk solusi eksplisit?. Perhatikan persamaan berikut :

$$y = \left(4 - x^2\right)^{1/2}$$

Turunannya adalah

$$\frac{dy}{dx} = -x\left(4 - x^2\right)^{-1/2} = -xy^{-1/2} \leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = -x.$$

Jadi,

$$y = \left(4 - x^2\right)^{1/2}$$

merupakan solusi eksplisit dari Persamaan

$$y\frac{dy}{dx} = -x.$$

Sementara itu, sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $x^2 + y^2 = 4$ merupakan solusi implisit dari persamaan yang sama. Dalam merubah solusi implisit ke dalam bentuk eksplisit, agar domain yang berlaku tetap sama, maka perlu kehati-hatian.

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = \pm\left(4 - x^2\right)^{1/2}$$

Grafik solusi implisit

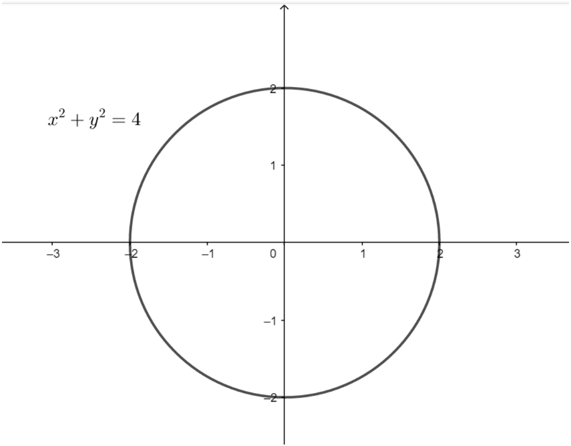

Figure: Solusi implisit PD $y\frac{dy}{dx} = -x, \quad (-2, 2)$

Grafik solusi eksplisit

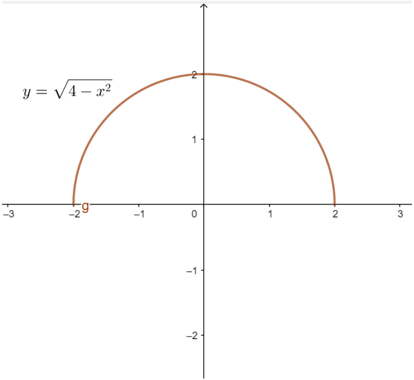

Figure: Solusi eksplisit

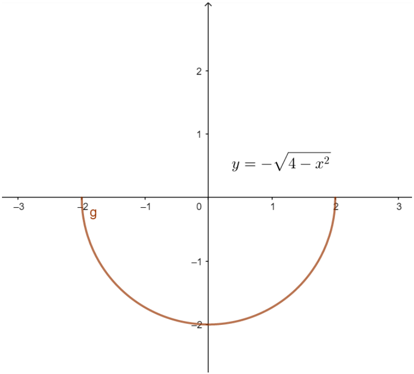

Figure: Solusi eksplisit

Solusi umum dan khusus

Perhatikan bahwa pada PD berikut

$$\frac{dy}{dx} = y + 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

fungsi $f_1(x) = e^x - 1, f_2(x) = 5e^x - 1$ dan $f_3(x) = -3e^x - 1$ ketiganya memenuhi persamaan 2. Akibatnya ketiga fungsi tersebut merupakan solusinya. Secara umum, solusi dari persamaan 2 adalah $f(x) = ce^x - 1$ untuk semua c bilangan real.

1. Solusi yang memuat semua kemungkinan solusinya disebut dengan **solusi umum**. Contoh $f(x) = ce^x - 1$.
2. Solusi yang merujuk pada salah satu solusi umumnya disebut **solusi khusus**. Contoh $f(x) = e^x - 1, f_2(x) = 5e^x - 1$ atau $f_3(x) = -3e^x - 1$.

Ilustrasi Solusi umum dan khusus

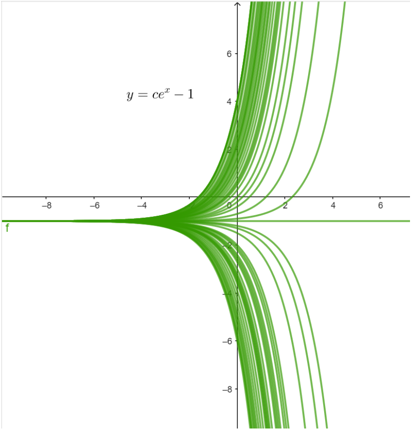

Figure: Solusi umum

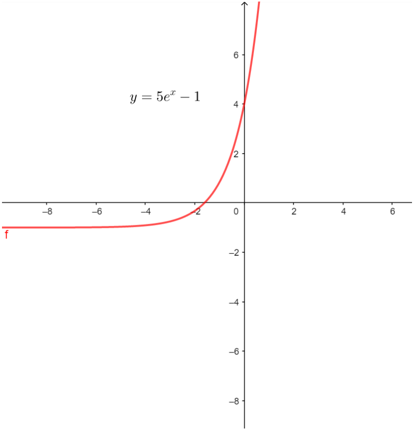

Figure: Solusi khusus, $y(0) = 4$

Latihan 1.2

1. Buktikan bahwa fungsi $f(x) = x + 3e^{-x}$ merupakan solusi eksplisti dari PD $\frac{dy}{dx} + y = x + 1$.
2. Buktikan bahwa persamaan $x^3 + 3xy^2 = 1$ merupakan solusi implisit dari PD $2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$ pada interval $0 < x < 1$.
3. Buktikan bahwa untuk sebarang konstanta real c maka

$$f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$$

adalah solusi umum dari persamaan

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

Nilai awal

Pada pembahasan sebelumnya dijelaskan bahwa solusi khusus PD merujuk pada salah satu solusinya saja, artinya pada solusi khusus tidak terdapat parameter. Untuk mencari parameter yang berelasi dengan solusi khusus diperlukan informasi terkait nilai solusi di salah satu atau beberapa titik. Informasi ini yang disebut dengan nilai awal atau syarat batas.

Perhatikan contoh sebelumnya, nilai awal pada solusi khusus persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = y + 1$ adalah $y(0) = 4$. Secara umum solusi khusus diperoleh dengan mencari nilai parameter yang bersesuaian dengan nilai awal.

$$\begin{aligned} y &= ce^x - 1, \quad y(0) = 4 \\ 4 &= ce^0 - 1 \rightarrow c = 5. \\ y &= 5e^x - 1. \end{aligned}$$

Contoh 1.2

Tunjukkan bahwa $y = ce^x$ merupakan solusi dari PD

$$\frac{dy}{dx} = y$$

selanjutnya, tentukan solusi khusus dari PD yang melewati titik $(0, 3)$ kemudian tentukan pula solusi khusus yang memenuhi $y(1) = -2$.
Jawab : Karena

$$y = ce^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = ce^x = y,$$

akibatnya jelas bahwa $y = ce^x$ merupakan solusi dari PD. Selanjutnya,

$$(0, 3) \rightarrow 3 = ce^0 \rightarrow c = 3 \rightarrow y = 3e^x$$
$$y(1) = -2 \rightarrow -2 = ce^1 \rightarrow c = -2e^{-1} \rightarrow y = -2e^{x-1}$$

Grafik solusi khusus

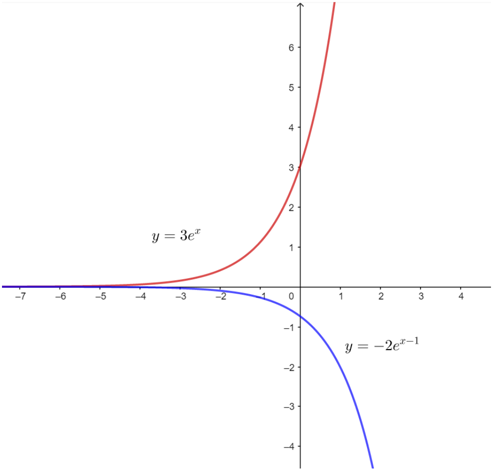

Figure: Solusi khusus untuk $y(0) = 3$ dan $y(1) = -2$

Contoh 1.3

Diberikan $x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ merupakan solusi umum dari PD

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0.$$

Jika diketahui $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ dan $\frac{dx}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, tentukan solusi khususnya.
Jawab :

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \rightarrow c_1 \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = -2 \rightarrow c_1 = -2.$$

Turunan dari x adalah $x'(t) = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$.

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 8 \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) + 4c_2 \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow c_2 = \frac{1}{4}.$$

Jadi, solusi khususnya adalah $x(t) = -2\cos 4t + \frac{1}{4}\sin 4t$.

Latihan 1.3

Diberikan PD dengan solusi umum $y = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}}$ yaitu

$$\frac{dy}{dx} = y - y^2.$$

Tentukan solusi khusus yang memenuhi masing-masing nilai awal berikut :

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$.
2. $y(-1) = 2$.

Referensi :

Ross, S.L, *Differential Equations*, 1984, J. Willey, New York
Dennis Zill, *A First Course in Differential Equations with modelling Applications*, 2013.