Persamaan Diferensial Eksak dan Faktor Integrasi

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

Bentuk Umum

Persamaan Diferensial Orde Satu dapat dinyatakan dalam bentuk derivative maupun bentuk differensial.

Bentuk Derivative

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Bentuk Differensial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Sebagai contoh:
Persamaan diferensial orde satu dalam bentuk derivative

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, \quad x \neq y.$$

dapat dinyatakan dalam bentuk diferensial sebagai berikut:

$$(x^2 + y^2)dx + (y - x)dy = 0$$

Bentuk Persamaan Diferensial Orde Satu yang akan dibahas adalah

1. PD Eksak dan Faktor Integrasi
2. PD Separable dan PD terreduksi
3. PD linear dan PD Bernoulli
4. Faktor Integrasi khusus dan Transformasi

Pada pertemuan kedua ini akan dibahas mengenai '**PD Eksak dan Faktor Integrasi**'.

1. Apa itu PD Eksak
2. Bagaimana mengidentifikasi PD Eksak
3. Bagaimana mencari solusinya
4. Apa itu Faktor Integrasi

PD Eksak

Definition (Diferensial Total)

Diberikan f fungsi bernilai real atas dua variabel x dan y yang mempunyai turunan partial pertama kontinu pada domain D. Diferensial total dF fungsi F didefinisikan sebagai berikut :

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

untuk semua $(x,y) \in D$.

Contoh : Diberikan fungsi $F(x,y) = xy^2 + 2x^3y$. Darisini diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 6x^2y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 2x^3$$

sehingga differensial total fungsi F tersebut adalah

$$dF(x,y) = (y^2 + 6x^2y)dx + (2xy + 2x^3)dy$$

untuk setiap pasang bilangan real (x,y).

Eksak

Contoh lain untuk $F(x, y) = c$, dengan c sebarang bilangan real.
Diferensial total dari fungsi F tersebut adalah

$$dF(x, y) = 0.$$

Dari definisi diferensial total kemudian dapat didefinisikan diferensial eksak sebagai berikut :

Definition (Diferensial Eksak)

Bentuk

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

disebut diferensial eksak jika terdapat fungsi F atas dua variabel x dan y sedemikian sehingga bentuk tersebut sama dengan diferensial total dari fungsi tersebut.

Definisi PD Eksak I

Selanjutnya, jika $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ merupakan diferensial eksak, maka persamaan diferensial dalam bentuk diferensial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

disebut dengan **Persamaan Diferensial Eksak**.

Example

Tunjukkan bahwa persamaan diferensial

$$y^2\ dx + 2xy\ dy = 0$$

merupakan PD eksak.

Untuk menunjukkan suatu PD merupakan PD eksak, ekuivalen dengan menunjukkan bahwa ruas kiri PD merupakan diferensial eksak, artinya

Definisi PD Eksak II

terdapat F sedemikian sehingga ruas kiri merupakan diferensial total dari fungsi F. Jadi, terdapat F sedemikian sehingga

$$y^2\, dx + 2xy\, dy = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy.$$

Diambil $F(x, y) = xy^2$. Akibatnya diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$$

sehingga

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = y^2\, dx + 2xy\, dy.$$

Jadi, PD tersebut merupakan PD Eksak.

Ciri Eksak I

Pada contoh sebelumnya, kita harus mencari fungsi F yang memenuhi keeksakan suatu PD. Apakah kita dapat mengidentifikasi suatu PD merupakan PD eksak atau bukan, tanpa harus mencari fungsi F yang memenuhi keeksakannya? Perhatikan contoh berikut.

Example

Apakah PD berikut merupakan PD eksak

$$y\ dx + 2x\ dy = 0\ ?$$

Ingat, persamaan diferensial dalam bentuk diferensial dinyatakan PD eksak jika ruas kiri PD tersebut merupakan diferensial total suatu fungsi F.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}\ dx + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Dengan kata lain, suatu persamaan diferensial biasa disebut PD Eksak jika

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \quad \text{dan} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Sementara itu perhatikan bahwa

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Karena

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

maka suatu PD dikatakan eksak jika memenuhi hubungan

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Contoh

Contoh :
Apakah PD berikut merupakan PD eksak

$$y\ dx + 2x\ dy = 0\ ?$$

Jawab :
Dimisalkan $M(x, y) = y$ dan $N(x, y) = 2x$. PD tersebut eksak jika memenuhi hubungan

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

.
Karena $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$ dan $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2$, maka PD tersebut tidak eksak.

Theorem

Diberikan persamaan diferensial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

dimana M dan N mempunyai turunan pertama parsial yang kontinu untuk setiap (x, y) pada domain D.

1. *Jika PD 1 eksak pada D, maka berlaku*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

   untuk setiap $(x, y) \in D$

2. *Jika berlaku*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

   untuk setiap $(x, y) \in D$ maka PD 1 merupakan PD eksak.

Contoh.
Tentukan apakah persamaan diferensial berikut eksak atau noneksak.

$$(2x \sin y + y^3 e^x)dx + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x)dy = 0.$$

Jawab :
Misalkan $M(x,y) = 2x \sin y + y^3 e^x$ dan $N(x,y) = x^2 \cos y + 3y^2 e^x$. Dari sini diperoleh bahwa

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \cos y + 3y^2 e^x$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x \cos y + 3y^2 e^x$$

Karena $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ maka PD tersebut eksak.

Solusi PD Eksak

Setelah diketahui suatu PD merupakan PD eksak atau noneksak, berikutnya akan dijelaskan mengenai tehnik mencari solusi PD Eksak. Diberikan PD eksak

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Jika diketahui bahwa F adalah fungsi yang memenuhi keeksakannya, maka solusi PD eksak tersebut adalah

$$F(x, y) = c.$$

Bukti :
Diketahui

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Karena eksak, maka berlaku $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y)$.
Jadi

$$dF(x, y) = 0$$

yang berakibat jika diintegralkan kedua ruas diperoleh $F(x, y) = c$.

Contoh I

Contoh :
Tentukan solusi dari persamaan diferensial

$$y^2\ dx + 2xy\ dy = 0.$$

Jawab:
Misalkan $M(x,y) = y^2$ dan $N(x,y) = 2xy$. Darisini diperoleh bahwa

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$$

Karena $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ maka diperoleh bahwa persamaan merupakan PD Eksak. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $F(x,y) = xy^2$ memenuhi keeksakannya.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y^2 = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy = N(x,y)$$

Contoh II

Jadi, terbukti bahwa $F(x, y) = x^2 y$ memenuhi keeksakan PD. Akibatnya, solusi dari PD tersebut adalah

$$xy^2 = c.$$

Pada contoh ini, telah ditunjukkan cara mencari solusi PD jika telah diketahui fungsi F yang memenuhi keeksakan pada persamaan. Bagaimana jika fungsi F tersebut belum diketahui? Pada contoh berikutnya akan ditunjukkan cara mencari solusi PD eksak dengan mencari fungsi F yang memenuhi terlebih dahulu.

Contoh I

Contoh.
Tentukan solusi dari

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0.$$

Jawab.
Karena belum diketahui apakah PD tersebut eksak atau tidak, maka langkah pertama adalah mengidentifikasi keeksakannya.
Dimisalkan $M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ dan $N(x, y) = 2x^2 + 2y$. Darisini diperoleh

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x$$

Jadi, PD tersebut eksak.

Contoh II

Selanjutnya, karena eksak maka terdapat $F(x,y)$ sedemikian sehingga

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 4xy$$

Integralkan kedua ruas secara parsial terhadap x maka diperoleh fungsi F sebagai berikut :

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2y + \phi(y).$$

Perhatikan bahwa pada fungsi F masih memuat $\phi(y)$ yang belum diketahui. Untuk mencarinya, substitusikan pada syarat kedua yaitu $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

Karena

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + \phi'(y) = 2x^2 + 2y \rightarrow \phi'(y) = 2y$$

Contoh III

sehingga $\phi(y) = y^2 + c_0$. Akibatnya, diperoleh

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0$$

sehingga solusi PD yaitu

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0 = c \to x^3 + 2x^2y + y^2 = C.$$

Secara umum, jika Persamaan Diferensial 1 merupakan PD eksak, maka fungsi F yang memenuhi adalah

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \partial x \right] dy.$$

Latihan

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Tentukan keeksakan PD berikut.
   1. $(3x + 2y)\ dx + (2x + y)\ dy = 0$
   2. $(y^2 + 3)\ dx + (2xy - 4)\ dy = 0$
   3. $(3x^2y + 2)\ dx - (x^3 + y)\ dy = 0$
   4. $(ye^x + 2e^x + y^2)\ dx + (e^x + 2xy)\ dy = 0$
   5. $(2y \sin x \cos x + y^2 \sin x)\ dx + (\sin^2 x - 2y \cos y) dy = 0$
2. Tentukan solusi umum dari PD yang merupakan PD eksak diatas.

Latihan Pengayaan.

Tentukan nilai A, $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ sedemikian sehingga PD berikut merupakan PD eksak.

1. $(Ax^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 4xy)dy = O.$
2. $M(x, y)\ dx + (2x^2y^3 + x^4y)\ dy = 0$
3. $(x^3 + xy^2)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$

Faktor Integrasi

Perhatikan bahwa PD berikut tidak eksak.

$$y\ dx + 2x\ dy = 0.$$

akan tetapi perkalian terhadap y pada kedua sisi

$$y^2\ dx + 2xy\ dy = 0$$

menghasilkan PD eksak.
Darisini, karena y dapat mengubah PD tidak eksak menjadi PD eksak, maka y disebut sebagai **faktor integrasi**.

Definisi Faktor Integrasi

Definition (Faktor Integrasi)

Jika persamaan diferensial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

tidak eksak pada domain D akan tetapi persamaan diferensial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

merupakan PD eksak, maka $\mu(x,y)$ disebut faktor integrasi dari persamaan diferensial.

Contoh I

Perhatikan PD berikut.

$$(4x + 3y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$$

1. Tunjukkan bahwa PD tersebut tidak eksak.
2. Tentukan faktor integrasi dalam bentuk x^n, untuk n suatu bilangan bulat positif.
3. Kalikan PD dengan faktor integrasi kemudian carilah solusinya.

Jawab :

1. Misalkan $M(x, y) = 4x + 3y^2$ dan $N(x, y) = 2xy$, maka

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2x$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ maka terbukti PD tidak eksak.

Contoh II

2. Dibentuk PD yang baru dengan mengalikan x^n dikedua ruas sebagai berikut

$$\left(4x^{n+1} + 3y^2x^n\right)\ dx + 2x^{n+1}y\ dy = 0$$

Agar x^n faktor integrasi maka PD yang terbentuk haruslah PD parsial, yaitu memenuhi hubungan

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(4x^{n+1} + 3y^2x^n\right)}{\partial y} &= \frac{\partial\left(2x^{n+1}y\right)}{\partial x} \\ 6yx^n &= 2(n+1)x^n y \\ n &= 2. \end{aligned}$$

Contoh III

3. Akan dicari solusi PD

$$\left(4x^3 + 3y^2x^2\right)\ dx + 2x^3y\ dy = 0$$

Misalkan F adalah fungsi yang memenuhi keeksakan dari PD, maka berlaku

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 3y^2x^2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x^3y.$$

Integralkan secara partial terhadap x pada persamaan pertama maka diperoleh

$$F(x, y) = x^4 + y^2x^3 + \phi(y)$$

Contoh IV

Selanjutnya, untuk mencari fungsi ϕ yang memenuhi, substitusikan pada persamaan kedua.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2yx^3 \\ 2yx^3 + \phi'(y) &= 2yx^3 \\ \phi'(y) &= 0 \\ \phi(y) &= c \end{aligned}$$

Jadi, fungsi yang memenuhi adalah

$$F(x,y) = x^4 + y^2x^3 + c$$

Akibatnya, solusi dari PD adalah

$$x^4 + y^2x^3 + c = c_1 \rightarrow x^4 + y^2x^3 = C$$

Latihan Pengayaan.
Perhatikan PD berikut.

$$(y^2 + 2xy)\, dx - x^2\, dy = 0$$

1. Tunjukkan bahwa PD tersebut tidak eksak.
2. Tentukan faktor integrasi dalam bentuk y^n, untuk n suatu bilangan bulat positif.
3. Kalikan PD dengan faktor integrasi kemudian carilah solusinya.

Referensi :

Ross, S.L, Differential Equations, 1984, J. Willey, New York