

Persamaan Diferensial Pertemuan III

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

February 21, 2019

1 PD Separable

2 PD Homogen

Definition

Suatu persamaan diferensial dalam bentuk

$$F(x)G(y) dx + f(x)g(y) dy = 0$$

disebut persamaan diferensial separable.

Jadi, M dan N dapat dinyatakan sebagai perkalian fungsi atas masing-masing variabel. Sebagai contoh,

$$(x - 4)y^4 dx - x^3(y^2 - 3) dy = 0.$$

Tentukan apakah PD berikut merupakan PD separable atau bukan.

- 1 $4xy \, dx + (x^2 + 1) \, dy = 0.$
- 2 $(xy + 2x + y + 2) \, dx + (x^2 + 2x) \, dy = 0.$
- 3 $2r(s^2 + 1) \, dr + (r^4 + 1) \, ds = 0.$
- 4 $\csc y \, dx + \sec x \, dy = 0.$
- 5 $\tan e \, dr + 2r \, de = 0.$
- 6 $(e^v + 1) \cos u \, du + e^v(\sin u + 1) \, dv = 0.$
- 7 $(x + 4)(y^2 + 1) \, dx + y(x^2 + 3x + 2) \, dy = 0.$
- 8 $(x + y) \, dx - x \, dy = 0.$
- 9 $(2xy + 3y^2) \, dx - (2xy + x^2) \, dy = 0.$
- 10 $v^3 \, du + (u^3 - uv^2) \, dv = 0.$

Perhatikan bahwa $\frac{1}{f(x)G(y)}$ adalah faktor integrasi dari PD separable, dimana $G(y) \neq 0$.

$$\frac{F(x)}{f(x)} dx + \frac{g(y)}{G(y)} dy = 0. \quad (1)$$

Karena

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{F(x)}{f(x)} \right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{g(y)}{G(y)} \right]$$

maka Persamaan (1) merupakan PD Eksak. Selanjutnya, solusi PD separable adalah

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx + \int \frac{g(y)}{G(y)} dy = c.$$

Contoh 1

Example

Tentukan solusi dari persamaan

$$(x - 4)y^4 dx - x^3(y^2 - 3) dy = 0.$$

Jawab :

Persamaan tersebut merupakan PD separable dengan faktor integrasi

$$\frac{1}{y^4 x^3}.$$

dengan solusi $y \neq 0$. Kalikan pada PD maka akan diperoleh

$$\frac{x - 4}{x^3} dx - \frac{y^2 - 3}{y^4} dy = 0$$

atau

$$(x^{-2} - 4x^{-3}) dx - (y^{-2} - 3y^{-4}) dy = 0.$$

Integralkan kedua ruas, maka diperoleh solusi

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c.$$

Selanjutnya, identifikasi apakah $y = 0$ merupakan solusi yang hilang karena proses separasi. Perhatikan bahwa PD dapat dinyatakan dalam bentuk derivatif sebagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}$$

Untuk $y = 0$, berlaku $\frac{dy}{dx} = 0$. Jadi, $y = 0$ juga merupakan solusi dari PD.

Contoh 2

Example

Tentukan masalah nilai awal berikut

$$x \sin y \, dx + (x^2 + 1) \cos y \, dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Jawab:

PD pada Contoh 2 merupakan PD Separable. Didefinisikan faktor integral

$$\frac{1}{(x^2 + 1) \sin y},$$

dengan $\sin y \neq 0$. Bagi kedua ruas PD dengan faktor integral maka diperoleh

$$\frac{x}{x^2 + 1} \, dx + \frac{\cos y}{\sin y} \, dy = 0.$$

Contoh 2 - lanjutan

Integralkan kedua ruas, sehingga didapatkan

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln |\sin y| = c_1.$$

atau

$$(x^2 + 1) \sin^2 y = c.$$

Perhatikan bahwa untuk $c = 0$, maka berlaku $\sin y = 0$. Akibatnya solusi $\sin y = 0$ tidak hilang karena proses separasi. Selanjutnya, nilai awal $y(1) = \frac{\pi}{2}$ dipenuhi untuk nilai $c = 2$. Jadi, solusi khusus persamaan diferensial Contoh 2 adalah

$$(x^2 + 1) \sin^2 y = 2.$$

1 Tentukan solusi PD separable berikut.

1 $4xy \, dx + (x^2 + 1) \, dy = 0.$

2 $(xy + 2x + y + 2) \, dx + (x^2 + 2x) \, dy = 0.$

3 $2r(s^2 + 1) \, dr + (r^4 + 1) \, ds = 0.$

4 $\csc y \, dx + \sec x \, dy = 0.$

5 $\tan e \, dr + 2r \, de = 0.$

6 $(e^v + 1) \cos u \, du + e^v(\sin u + 1) \, dv = 0.$

7 $(x + 4)(y^2 + 1) \, dx + y(x^2 + 3x + 2) \, dy = 0.$

2 Tentukan solusi khusus dari PD berikut.

• $(y + 2) \, dx + y(x + 4) \, dy = 0, \quad y(-3) = -1.$

• $8 \cos^2 y \, dx + \csc^2 x \, dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Definition (PD Homogen)

Persamaan diferensial orde satu $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ dikatakan homogen jika dinyatakan dalam bentuk derivatif $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ maka terdapat suatu fungsi g sedemikian sehingga $f(x, y)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Sebagai contoh,

$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$ adalah PD homogen karena dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y/x}\right).$$

$(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0$ adalah PD homogen karena dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Definition (Homogen derajat n)

Suatu fungsi F atas dua variabel x dan y dikatakan homogen berderajat n jika memenuhi

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y).$$

Sebagai contoh $F(x, y) = x^2 + y^2$ merupakan fungsi homogen berderajat dua. Akibatnya, untuk persamaan diferensial order satu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

jika M dan N merupakan fungsi homogen pada derajat yang sama, maka PD tersebut merupakan PD Homogen.

Fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi homogen berderajat- n . Tentukan nilai n yang bersesuaian kemudian buatlah kesimpulannya.

- $F(x, y) = x + y$
- $F(x, y) = 2xy + y^2$
- $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $F(u, v) = v^3$
- $F(u, v) = u^3 - uv^2$
- $F(u, v) = u^2v^2 + uv^3$

Theorem

Jika

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

merupakan PD homogen, maka perubahan variable $y = vx$ dapat mentransformasi PD homogen menjadi PD separable dalam variabel x dan v .

Contoh 3

Example

Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut:

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Jawab :

Misal $y = vx$, maka diperoleh $dy = vdx + xdv$. Akibatnya, persamaan menjadi

$$(x^2(1 - v^2)) dx + 2vx^3 dv = 0.$$

Definisikan faktor integrasi

$$\frac{1}{x^3(1 - v^2)}.$$

Bagi kedua ruas dengan faktor integral, diperoleh

$$\frac{1}{x} dx + \frac{2v}{1 - v^2} dv = 0$$

Contoh 3 - lanjutan

Integralkan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\ln |x| - \ln |1 - v^2| &= c \\ |cx| &= |1 - v^2|\end{aligned}$$

Substitusikan kembali, maka diperoleh

$$|cx| = \left| 1 - \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right|$$

Khusus untuk $y \geq x \geq 0$ diperoleh

$$y^2 - x^2 = cx^3.$$

Contoh 4

Example

Tentukan solusi khusus dari masalah nilai awal berikut:

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

Jawab :

Fungsi M dan N merupakan fungsi homogen berderajat-1, jadi PD merupakan PD homogen. Didefinisikan transformasi $y = vx$, sehingga $dy = vdx + xdv$. Substitusikan pada PD diperoleh

$$\left(vx + \sqrt{x^2 + (vx)^2} \right) dx - x(vdx + xdv) = 0.$$

atau

$$x\sqrt{1 + v^2} dx - x^2 dv = 0.$$

Contoh 4 - lanjutan

Gunakan faktor integrasi

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+v^2}}$$

Kalikan faktor integrasi pada PD diperoleh

$$\frac{1}{x} dx - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = 0$$

Integralkan kedua ruas sehingga didapatkan

$$\ln|x| - \ln|v + \sqrt{v^2 + 1}| = c_1$$

atau dalam bentuk sederhana ekuivalen dengan

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2.$$

Nilai awal yang diketahui adalah $y(1) = 0$. Substitusikan pada solusi umum, maka dipenuhi untuk nilai $c = 1$. Jadi, solusi khusus PD adalah

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

- 1 Tentukan solusi umum dari PD homogen berikut.
 - $(x + y) dx - x dy = 0$.
 - $(2xy + 3y^2) dx - (2xy + x^2) dy = 0$.
 - $v^3 du + (u^3 - uv^2) dv = 0$.
- 2 Tentukan solusi khusus dari PD berikut.
 - $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0, \quad y(2) = 6$.
 - $(2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0, \quad y(1) = 4$.
- 3 Tunjukkan bahwa PD homogen berikut eksak jika dan hanya jika $B = C$.

$$(Ax + By) dx + (Cx + Dy) dy = 0$$

The End