Faktor Integrasi dan Transformasi Khusus

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

Overview

Pengantar

Pada Pertemuan-II telah dibahas mengenai faktor integrasi yaitu fungsi yang mengubah PD non-eksak menjadi PD eksak. Meskipun demikian, rumus umum faktor integrasi sejauh ini belum dapat ditentukan.

Pada Pertemuan ini akan dibahas mengenai faktor-faktor integrasi khusus yaitu faktor integrasi atas satu variabel independen saja, x atau y serta ciri-ciri Persamaan diferensial yang memiliki faktor integrasi tersebut.
Misalkan diberikan persamaan diferensial eksak dengan faktor integrasi $\mu(x, y)$ sebagai berikut

$$\mu(x, y)M(x, y)\;dx + \mu(x, y)N(x, y)\;dy = 0.$$

Syarat PD Eksak

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\mu N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Kasus I, $\mu(x)$

Akan dicari ciri PD sedemikian sehingga faktor integrasinya merupakan fungsi atas x saja.
Misalkan μ fungsi atas x saja, maka

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\mu N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N\mu'(x). \\ \mu'(x) &= \left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right] \mu. \end{aligned}$$

Jadi, jika $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ merupakan fungsi atas x saja, maka faktor integrasinya μ juga merupakan fungsi atas x saja yaitu

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

Kasus II, $\mu(y)$

Ekuivalen dengan Kasus I, akan dicari ciri PD sedemikian sehingga faktor integrasinya merupakan fungsi atas y saja.
Misalkan μ fungsi atas y saja, maka

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\mu N}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\mu'(y) &= \mu\frac{\partial N}{\partial x}. \\ \mu'(y) &= \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right]\mu. \end{aligned}$$

Jadi, jika $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ merupakan fungsi atas y saja, maka faktor integrasinya μ juga merupakan fungsi atas y saja yaitu

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$$

Example

Tentukan solusi PD berikut :

$$(2x^2 + y)\, dx + (x^2y - x)\, dy = O.$$

Jawab : Perhatikan bahwa PD pada Contoh 1 merupakan PD yang tidak eksak, tidak separable, tidak homogen, tidak linear dan tidak Bernoulli. Misalkan

$$M(x,y) = 2x^2 + y, \quad N(x,y) = x^2y - x$$

maka

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1, \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2xy - 1$$

Akibatnya

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)} = \frac{2 - 2xy}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}$$

Darisini kemudian didefinisikan faktor integral

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = x^{-2}.$$

Kalikan persamaan dengan faktor integrasi tersebut maka diperoleh PD baru yaitu

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)\, dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)\, dy = 0$$

yang merupakan PD eksak. Kemudian dengan tehnik yang telah dipelajari di PD Eksak, diperoleh solusi

$$2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Contoh 2

Example

Tentukan solusi umum dari

$$[2xy^2 + y]\,dx + [2y^3 - x]\,dy = 0$$

Jawab. Dimisalkan

$$M(x,y) = 2xy^2 + y \quad \text{dan} \quad N(x,y) = 2y^3 - x,$$

maka

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4xy + 1 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -1.$$

Sehingga

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = \frac{-2 - 4xy}{2xy^2 + y} = \frac{-2(1+2xy)}{y(2xy+1)} = -\frac{2}{y}$$

hanya merupakan fungsi atas y saja.

lanjutan

Darisini kemudian didefinisikan faktor integrasi

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}\, dy} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2}.$$

Kalikan faktor integrasi pada persamaan maka akan diperoleh persamaan diferensial eksak

$$[2x + y^{-1}]\, dx + [2y - xy^{-2}]\, dy = 0$$

Dengan menggunakan solusi PD eksak diperoleh solusi

$$x^2 + y^{-1}x + y^2 = c.$$

Transformasi Khusus

Pada bahasan sebelumnya, menyelesaikan PD Homogen dapat dilakukan dengan mentransformasi PD homogen menjadi PD separable menggunakan transformasi $y = vx$ dan menyelesaikan PD Bernoulli dilakukan dengan mentransformasi PD Bernoulli menjadi PD Linear menggunakan transformasi $v = y^{1-n}$.
Kali ini akan dibahas transformasi untuk PD dalam bentuk

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0,$$

dengan $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ bernilai konstan.

Kasus I, $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$

Untuk kasus $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$, PD ditransformasi menjadi PD Homogen dengan transformasi

$$x = X + h$$
$$y = Y + k$$

dengan (h, k) merupakan solusi dari sistem

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0,$$
$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0.$$

PD homogen yang terbentuk adalah

$$(a_1 X + b_1 Y)\, dX + (a_2 X + b_2 Y)\, dY = 0.$$

Selanjutnya, PD dapat diselesaikan menggunakan tehnik PD homogen.

Kasus II, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$

Untuk kasus $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = k$, PD ditransformasi menjadi PD separable dengan transformasi

$$z = a_1 x + b_1 y$$

PD separable yang terbentuk adalah

$$(z + c_1)\, dx + (kz + c_2) \left(\frac{dz - a_1 dx}{b_1} \right) = 0,$$

atau

$$\left[\left(1 - \frac{a_1}{b_1} k \right) z + c_1 - \frac{c_1 a_1}{b_1} \right] \, dx + \left[\frac{kz + c_2}{b_1} \right] \, dz = 0.$$

Selanjutnya, PD dapat diselesaikan menggunakan tehnik PD separable.

Contoh 3

Example

Tentukan solusi dari PD berikut:

$$(x - 2y + 1)\, dx + (4x - 3y - 6)\, dy = 0.$$

jawab :
Misalkan $a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 1, a_2 = 4, b_2 = -3, c_3 = -6$. Darisini diketahui bahwa

$$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}.$$

Misalkan (h, k) adalah solusi dari

$$h - 2k + 1 = 0$$
$$4h - 3k - 6 = 0,$$

yaitu $h = 3$ dan $k = 2$. Transformasi yang digunakan adalah

lanjutan

Dengan transformasi ini maka diperoleh PD yang baru yaitu

$$(X - 2Y)\, dX + (4X - 3Y)\, dY = 0.$$

Misalkan $Y = vX$, maka diperoleh

$$(X - 2vX)\, dX + (4X - 3vX)\, (vdX + Xdv) = 0$$

atau

$$X(1 + 2v - 3v^2)\, dX + X^2(4 - 3v)\, dv = 0.$$

Dengan faktor integrasi $\frac{1}{(X^2)(1+2v-3v^2)}$, diperoleh

$$\frac{1}{X}\, dX + \frac{4 - 3v}{1 + 2v - 3v^2}\, dv = 0.$$

Integralkan kedua ruas, maka diperoleh

$$\ln|X| + \frac{1}{2}\ln|3c^2 - 2v - 1| - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{3v-3}{3v+1}\right| = c_1$$

Selanjutnya, dengan mentransformasi kembali $Y = vX$, kemudian $x = X + 3$ dan $y = Y + 2$, diperoleh solusi PD yaitu

$$|x + 3y - 9|^5 = c|y - x + 1|$$

dengan $c = c_1^4$.

Contoh 4

Example

Tentukan solusi dari Persamaan Diferensial

$$(x + 2y + 3)\ dx + (2x + 4y - 1)\ dy = 0.$$

Jawab :
Misalkan $a_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = 2, b_2 = 4$, maka didapatkan $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = 2$.
Darisini kemudian didefinisikan transformasi

$$z = x + 2y.$$

Akibatnya, PD dapat ditransformasi menjadi

$$(z + 3)\ (dz - 2dy) + (2z - 1)(dy) = 0,$$

atau

$$(z + 3)\ dz - 8dy = 0$$

lanjutan

Solusi dari PD separable tersebut adalah

$$\frac{1}{2}z^2 + 3z - 8y = c_1.$$

Transformasikan kembali $z = x + 2y$ maka diperoleh solusi PD sebagai berikut

$$(x + 2y)^2 + 6(x + 2y) - 16y = c,$$

dengan $c = 2c_1$.

Latihan

1. Tentukan solusi dari PD berikut :
   1. $[y^2(x+1)+y]\,dx+[2xy+1]\,dy=0.$
   2. $(2xy^2+y)\,dx+(2y^3-1)\,dy=0.$
   3. $(5x+2y+1)\,dx+(2x+y+1)\,dy=0.$
   4. $(3x-y+1)\,dx-(6x-2y-3)\,dy=0.$
2. Pengayaan. Tunjukkan bahwa jika $\mu(x,y)$ dan $\nu(x,y)$ adalah faktor integrasi dari

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

sedemikian sehingga $\frac{\mu}{\nu}$ bukanlah suatu konstanta, maka

$$\mu(x,y)=c\nu(x,y)$$

merupakan solusi persamaan untuk setiap nilai c.

The End