

# Persamaan Diferensial Pertemuan VI

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

*nikenasih@uny.ac.id*

March 13, 2019

1 Trayektori Orthogonal

2 Trayektori Oblique

# Menggambar keluarga kurva menggunakan Geogebra

Misalkan akan digambar keluarga lingkaran  $x^2 + y^2 = c^2$  dan keluarga garis  $y = kx$ .

- Nyatakan keluarga kurva dalam bentuk  $F(x, y, c) = 0$ , keluarga lingkaran  $x^2 + y^2 - c^2 = 0$  dan keluarga garis  $y - kx = 0$ .
- Pilih menu create slide untuk membentuk parameter  $c$  dan  $k$ .

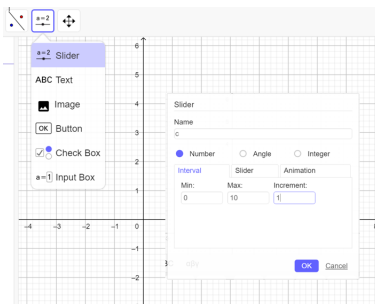
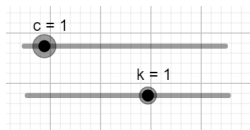


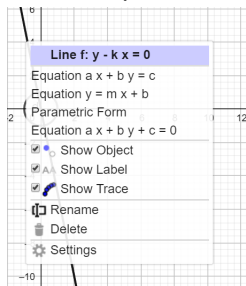
Figure: mendefinisikan parameter

# lanjutan

Sebagai contoh, disini dipilih parameter  $c$  pada interval  $[0,10]$  dengan kenaikan 1 sementara parameter  $k$  pada interval  $[-5,5]$  dengan kenaikan 1.

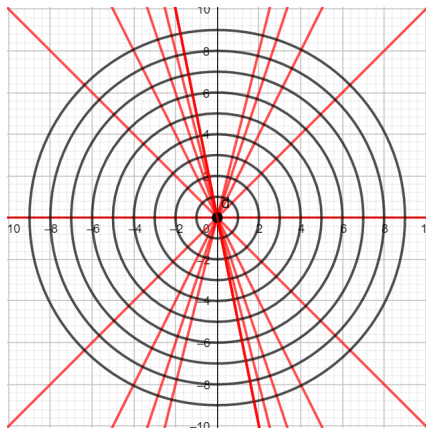


- Pada bagian input, masukkan  $x^2 + y^2 - c^2 = 0$  dan  $y - kx = 0$ . Selanjutnya, klik kanan kurva dan pilih 'show trace'.



# Hasil

Hasil yang terbentuk setelah menggerakkan kedua slider dapat dilihat pada gambar berikut.



## Definition

Diberikan suatu

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

keluarga kurva satu-parameteri pada bidang  $XY$ . Kurva yang memotong kurva 1 secara tegak lurus disebut dengan trayektori orthogonal dari keluarga kurva tersebut.

Sebagai contoh keluarga lingkaran dengan pusat  $(0, 0)$  dan jari-jari  $c$ ,

$$x^2 + y^2 = c,$$

mempunyai trayektori orthogonal keluarga garis lurus  $y = kx$ .

# Gambar Trayektori

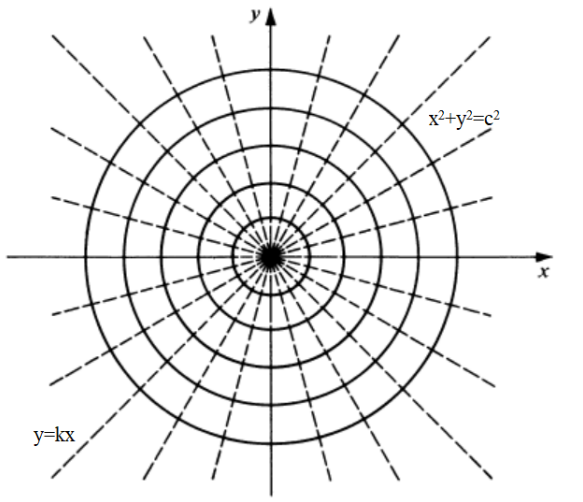


Figure: Keluarga Lingkaran dan Keluarga Garis Lurus saling tegak lurus

# Teknik mencari orthogonal trayektori

Misalkan gradien dari keluarga 1 adalah

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Ingat bahwa perkalian gradien dua keluarga kurva yang saling tegak lurus harus bernilai -1. Akibatnya, keluarga kurva yang tegak lurus dengan keluarga kurva 1 mempunyai gradien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}. \quad (2)$$

Jadi, orthogonal trayektori yang dimaksud merupakan solusi dari PD 2



# Langkah-langkah

Untuk mencari orthogonal trayektori dari suatu keluarga kurva, langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial dari persamaan gradien keluarga kurva yang diperoleh.

# Contoh 1

Tentukan orthogonal trayektori dari keluarga lingkaran  $x^2 + y^2 = c^2$

- 1 Tentukan gradien dari keluarga lingkaran. Turunkan kedua ruas terhadap  $x$  diperoleh

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

- 2 Definisikan gradien dari keluarga kurva yang orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- 3 Selesaikan PD gradien kurva orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \quad \rightarrow \quad y = kx.$$

## Contoh 2

Tentukan orthogonal trayektori dari keluarga parabola  $y = cx^2$ .

- 1 Tentukan gradien dari keluarga parabola. Turunkan kedua ruas terhadap  $x$  diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = 2cx.$$

- 2 Definisikan gradien dari keluarga kurva yang orthogonal.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2cx} = -\frac{x}{2y}$$

- 3 Selesaikan PD gradien kurva orthogonal.

$$2y \, dy = -x \, dx \quad \rightarrow \quad 2y^2 + x^2 = k^2.$$

# Gambar keluarga Ellipse

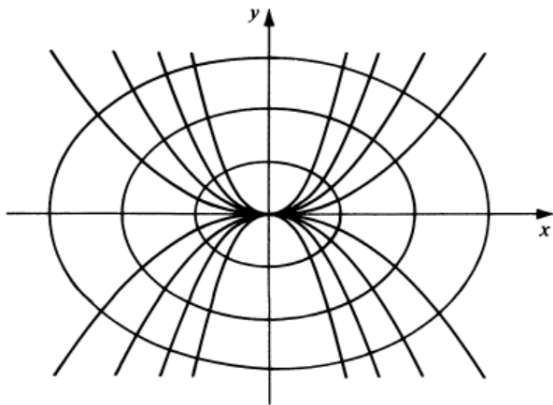


Figure: Keluarga Parabola dan Keluarga Ellipse Lurus saling tegak lurus

# Latihan 1

Tentukan dan gambarlah keluarga kurva serta trayektori orthogonal untuk keluarga-keluarga kurva berikut.

①  $y = cx^3$

②  $y^2 = cx$

③  $cx^2 + y^2 = 1$

④  $y = e^{cx}$

⑤  $x - y = cx^2$

## Definition

Diberikan keluarga kurva

$$F(x, y, c) = 0.$$

Kurva yang memotong keluarga kurva dengan sudut potong  $\alpha \neq 90^0$  disebut trayektori oblique dari keluarga kurva tersebut.

Sebagai contoh, trayektori oblique yang memotong keluarga garis lurus  $y = cx$  dengan sudut potong  $45^0$  adalah

$$\ln c^2(x^2 + y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

# Gambar keluarga Ellipse

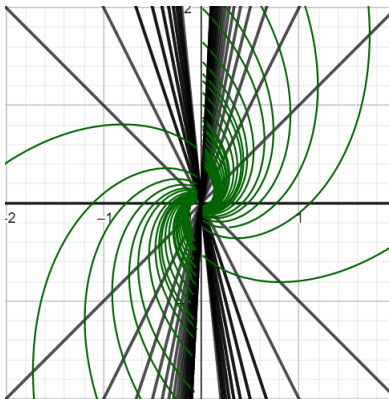


Figure: Trayektori Oblique keluarga garis dengan sudut  $45^0$

# Teknik mencari trayektori oblique

Misalkan gradien sudut yang dibentuk keluarga kurva 1 adalah  $\beta$ , maka

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\beta) = f(x, y)$$

Akibatnya, keluarga kurva yang memotong keluarga kurva 1 dengan sudut  $\alpha$  mempunyai gradien sudut

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \tan(\beta + \alpha) &= \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\beta)\tan(\alpha)} \\ &= \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y)\tan(\alpha)}\end{aligned}\quad (3)$$

Jadi, trayektori oblique yang dimaksud merupakan solusi dari PD. 3



# Langkah-langkah

Untuk mencari trayektori oblique dari suatu keluarga kurva dengan sudut potong  $\alpha$ , langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y) \tan(\alpha)}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial dari persamaan gradien keluarga kurva yang diperoleh.

## Contoh 3

Tentukan keluarga kurva yang memotong keluarga garis  $y = cx$  dengan sudut potong  $45^\circ$ .

- 1 Tentukan gradien dari keluarga kurva, misalkan

$$\frac{dy}{dx} = c = \frac{y}{x}.$$

- 2 Definisikan gradien keluarga kurva yang orthogonal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan(\alpha)}{1 - f(x, y) \tan(\alpha)} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{y + x}{x - y}.$$

- 3 Selesaikan persamaan diferensial homogen tersebut menggunakan transformasi  $y = vx$ . Diperoleh

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v}.$$

Persamaan ekuivalen dengan bentuk

$$\frac{v-1}{v^2+1} dv = -\frac{1}{x} dx$$

Integralkan kedua ruas maka diperoleh

$$\frac{1}{2} \ln(v^2+1) - \arctan v = -\ln|x| - \ln|c|$$

Jadi, solusinya adalah

$$\ln c^2(x^2+y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

Tentukan dan gambarlah keluarga kurva serta trayektori orthogonal untuk keluarga-keluarga kurva berikut.

- 1 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga lingkaran  $x^2 + y^2 = c^2$  dengan sudut potong  $45^\circ$ .
- 2 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga parabola  $y^2 = cx$  dengan sudut potong  $60^\circ$ .
- 3 Tentukan keluarga trayektori oblique untuk keluarga kurva  $x + y = cx^2$  dengan sudut potong  $\alpha$  yang memenuhi  $\tan \alpha = 2$ .

- 1 Find the orthogonal trajectories of the family of ellipses having center at the origin, a focus at the point  $(c, 0)$ , and semimajor axis of length  $2c$ .
- 2 Find the orthogonal trajectories of the family of circles which are tangent to the  $y$  axis at the origin.
- 3 Find the value of  $K$  such that the parabolas  $y = c_1x^2 + K$  are the orthogonal trajectories of the family of ellipses  $x^2 + 2y^2 - y = c_2$ .
- 4 A given family of curves is said to be self-orthogonal if its family of orthogonal trajectories is the same as the given family. Show that the family of parabolas  $y^2 = 2cx + c^2$  is self-orthogonal.

# The End