

Persamaan Diferensial Pertemuan VII

Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id

March 21, 2019

1 Mekanika

2 Laju

Theorem (Hukum II Newton)

Laju perubahan momentum terhadap waktu proporsional terhadap gaya yang dihasilkan serta arahnya.

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum KF.$$

dengan K adalah konstanta proporsionalitas, m massa benda, v kecepatan pergerakan benda, dan F adalah gaya yang dihasilkan.

Jika massanya bernilai konstan dan $K = 1$, maka

$$ma = \sum F.$$

Gaya-gaya yang bekerja

Gaya gravitasi (atau disebut juga weight, W)

$$F_g = m \cdot g$$

Gaya hambat udara

$$F_a = kv \quad \text{atau} \quad F_a = kv^2$$

Gaya gesek

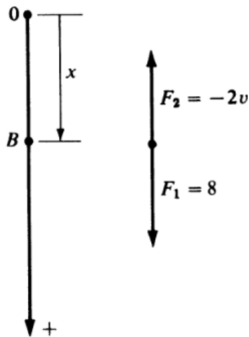
$$F_f = \mu N$$

dengan μ konstanta gesek dan N gaya normal yang bekerja.

Gerak Jatuh Bebas

Example

Benda dengan berat 8 newton dijatuhkan dari suatu ketinggian tertentu yang berawal dari keadaan diam. Jika kecepatan benda jatuh itu v , dan percepatan gravitasi bumi adalah $g = 10\text{m/s}^2$ serta gaya hambat udara adalah $-2v$. Tentukan ekspresi kecepatan v dan jarak x pada saat tertentu.



Diketahui $W = 8$, karena $W = mg$, untuk $g = 10$ maka $m = 8/10$. Menurut Hukum II Newton, berlaku

$$\begin{aligned}m \cdot a &= F_1 + F_2 \\ \frac{8}{10} \cdot \frac{dv}{dt} &= 8 - 2v\end{aligned}$$

Karena benda dalam keadaan diam, maka $v(0) = 0$ dan posisi awal $x(0) = 0$.

Jadi, masalah nilai awal yang terbentuk adalah

$$\frac{1}{8-2v} dv = \frac{5}{4} dt, \quad v(0) = 0.$$

Integralkan kedua ruas, maka diperoleh

$$-\frac{1}{2} \ln(8-2v) = \frac{5}{4}t + c \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{2} \left(8 - Ce^{-\frac{5}{2}t} \right).$$

Karena $v(0) = 0$ maka $c = 8$, jadi

$$v(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t}$$

Selanjutnya, masalah nilai awal yang akan diselesaikan yaitu

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t}, \quad x(0) = 0.$$

Integralkan terhadap t diperoleh

$$x(t) = 4t + \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}t} - \frac{8}{5}$$

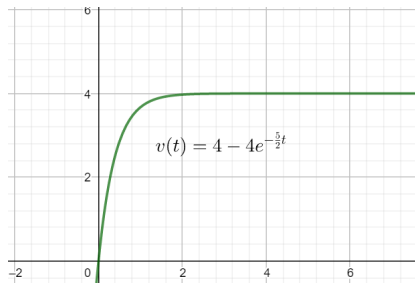


Figure: kecepatan

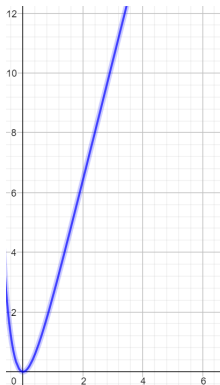


Figure: posisi

Perhatikan kurva $v(t)$.

Setelah t tertentu, nilai kecepatannya konstan. Interpretasikan nilai tersebut pada kasus.

Demikian juga dengan kurva $x(t)$.

Kurva menunjukkan bahwa untuk $t \rightarrow \infty$ maka nilai x juga menuju tak hingga.

Apakah hal ini mungkin? Jika tidak, lantas bagaimana batasannya?

Seorang penerjun payung yang dilengkapi dengan parasut dan peralatan penting lainnya jatuh dari tempat istirahat menuju bumi. Massa total penerjun payung plus perlengkapannya adalah 160 pon sebelum parasut terbuka, hambatan udara (dalam pound) secara numerik sama dengan $\frac{1}{2}v$, di mana v adalah kecepatan (dalam kaki per detik). Parasut terbuka 5 detik setelah terjun. Setelah parasut terbuka, hambatan udara (dalam pon) secara numerik sama dengan $\frac{5}{8}v^2$, di mana v adalah kecepatannya (dalam kaki per detik). Temukan kecepatan penerjun payung

- 1 sebelum parasut terbuka,
- 2 setelah parasut terbuka.

catatan :

gunakan $g = 32\text{kaki/detik}^2$.

Jika suatu benda bergerak melalui permukaan kasar, maka gaya yang berlawanan tidak hanya gaya hambat udara saja tetapi juga gaya gesek.

Example

Sebuah benda dengan $W = 48$ dilepaskan dari posisi diam di atas papan luncur dengan sudut kemiringan 30° dari arah horizontal. Hambatan udara (dalam pound) secara numerik sama dengan satu- setengah dari kecepatan (dalam kaki per detik), dan koefisien gesekan adalah seperempat.

- 1 Berapa kecepatan objek 2 detik setelah dilepaskan?
- 2 Jika papan luncur memiliki panjang 24 kaki, berapakah kecepatan saat objek mencapai dasar.

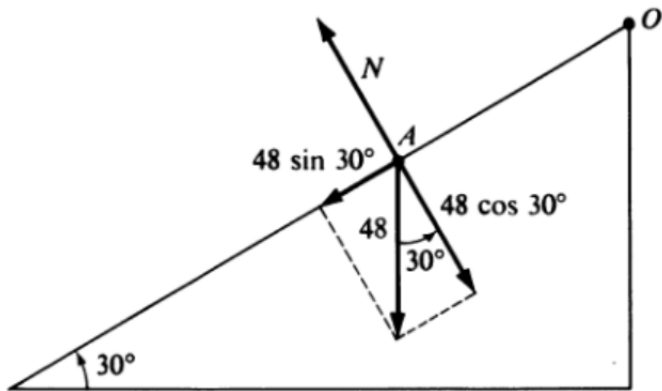


Figure: Gaya-gaya yang bekerja

Dengan menggunakan hukum Newton II, diperoleh

$$m \cdot a = F_1 + F_2 + F_3$$

dimana

F_1 adalah gaya gravitasi

F_2 adalah gaya hambat udara

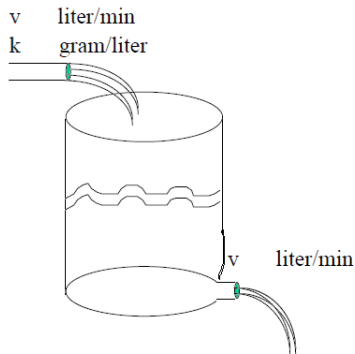
F_3 adalah gaya gesek. Dilihat dari arah pergerakan maka dapat diidentifikasi bahwa

$$m \cdot a = W \sin 30^\circ - \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}W \cos 30^\circ.$$

Jadi, karena $m = W/g = 48/32 = 3/2$ maka diperoleh

$$\frac{3}{2} \frac{dv}{dt} = 24 - 6\sqrt{3} - \frac{1}{2}v.$$

Masalah Pencampuran



Mula-mula terdapat 50 liter air murni dalam wadah. Jika wadah kemudian dialiri air garam yang mengalir dengan densitas 2 gram/liter dan kecepatan 3 liter/detik dan air dalam wadah dikeluarkan dengan kecepatan yang sama. Tentukan banyaknya garam setiap saat dalam wadah.

Suatu tangki mula-mula berisi 200 liter larutan yang mengandung 100 gram garam. Larutan lain yang mengandung garam dengan konsentrasi 1 gram/liter masuk kedalam tangki dengan laju 4 liter/menit dan bercampur dengan sempurna kemudian campuran itu keluar dengan laju 4 liter/menit.

- 1 Formulasikan masalah tersebut.
- 2 Tentukan banyaknya garam setiap saat.

Jika $Q(t)$ merupakan jumlah, kuantitas atau kualitas sesuatu pada saat t , maka pernyataan 'Perubahan Q proporsional terhadap Q ' dapat ditulis dengan

$$\frac{dQ}{dt} = kQ, \quad Q \geq 0.$$

dengan k disebut sebagai konstanta proporsionalitas. Lebih lanjut lagi, jika $k > 0$ maka disebut pertumbuhan sementara untuk $k < 0$ disebut dengan peluruhan.

The End