Persamaan Diferensial Pertemuan IX

Bab IV. PD Order Tinggi

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

Definisi

Definition

Persamaan Diferensial Biasa Order-n dengan x variabel independen dan y variabel dependen adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x).$$

dengan $a_0(x) \neq 0$.

Untuk $F(x) = 0$, maka PD dapat direduksi menjadi bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0.$$

dan disebut dengan **PD linear order-*n* homogen**. Sebaliknya, jika $F(x) \neq 0$ maka PD disebut nonhomogen.

Contoh

Example

Persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x$$

merupakan PD Linear order-2 nonhomogen.

Example

Persamaan

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 5y = 0.$$

merupakan PD Linear order-3 homogen.

PD Homogen

Definition

Diberikan fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Bentuk kombinasi linear dari fungsi-fungsi tersebut adalah

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n.$$

Untuk PD Homogen, berlaku teorema superposisi sebagai berikut.

Theorem

Jika $f_1, f_2, \ldots, f_n$ solusi dari PD homogen maka kombinasi linearnya juga merupakan solusi dari PD homogen tersebut.

Bukti :
Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ solusi dari PD

$$\sum^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}y}{x^{n-i}} = 0.$$

lanjutan

maka berlaku

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i} f_j}{dx^{n-i}} = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Akan ditunjukkan bahwa $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ juga merupakan solusi, atau

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)}{dx^{n-i}} = 0.$$

Karena turunan merupakan operator linear, maka berlaku

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)}{dx^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} \left\{ a_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{d^{n-i}(c_j f_j)}{dx^{n-i}} \right\}.$$

lanjutan

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left\{a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{d^{n-i}(c_jf_j)}{dx^{n-i}}\right\} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\frac{d^{n-i}(c_jf_j)}{dx^{n-i}} \\ &= \sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\frac{d^{n-i}(f_j)}{dx^{n-i}}\end{aligned}$$

Dari 1, maka diperoleh

$$\sum_{i=0}^{n}\left\{a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{d^{n-i}(c_jf_j)}{dx^{n-i}}\right\} = \sum_{j=1}^{n}c_j\cdot 0 = 0.$$

Terbukti bahwa kombinasi linearnya juga merupakan solusi.

Contoh 1

Diketahui bahwa $\sin x$ dan $\cos x$ merupakan solusi dari PD

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Tunjukkan bahwa $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ juga merupakan solusi PD untuk sebarang bilangan real c_1 dan c_2.

Jawab :

Karena

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(c_1 \sin x + c_2 \cos x)}{dx^2} = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$$

maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = (-c_1 \sin x - c_2 \cos x) + (c_1 \sin x + c_2 \cos x) = 0.$$

Terbukti

Contoh 2

Perhatikan bahwa e^x, e^{-x} dan e^{2x} adalah solusi dari PD

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Tunjukkan bahwa kombinasi linearnya juga merupakan solusi.

Jawab :

Misalkan kombinasi linearnya adalah $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$ untuk sebarang bilangan real c_1, c_2 dan c_3. Darisini diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c_1e^x - c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= c_1e^x + c_2e^{-x} + 4c_3e^{2x}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= c_1e^x - c_2e^{-x} + 8c_3e^{2x}. \end{aligned}$$

Darisini diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &- 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y \\
&= \{c_1e^x - c_2e^{-x} + 8c_3e^{2x}\} - 2\{c_1e^x + c_2e^{-x} + 4c_3e^{2x}\} \\
&- \{c_1e^x - c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x}\} + 2\{c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}\} \\
&= (c_1 - 2c_1 - c_1 + 2c_1)e^x + (-c_2 - 2c_2 + c_2 + 2c_2)e^{-x} \\
&+ (8c_3 - 8c_3 + 2c_3 + 2c_3)e^{2x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terbukti.

Bebas Linear

Sebelum mempelajari solusi umum, perhatikan definisi **bebas linear** berikut.

Definition

n buah fungsi $f_1, f_2, \cdots, f_n$ disebut **bebas linear** pada $a \leq x \leq b$ jika hubungan

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

untuk semua x pada interval dipenuhi hanya untuk

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Lebih lanjut lagi, jika terdapat $c_i \neq 0$ yang memenuhi hubungan tersebut maka fungsi-fungsi tersebut dikatakan **bergantung linear**.

Contoh 3

- Fungsi x dan $2x$ adalah dua fungsi yang bergantung linear karena terdapat $c_1 = -2$ dan $c_2 = 1$ sedemikian sehingga

$$c_1(x) + c_2(2x) = 0.$$

- Fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ adalah dua fungsi yang bebas linear karena

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$$

  hanya berlaku untuk $c_1 = c_2 = 0$.
- Fungsi e^x, e^{2x} dan $3e^x$ merupakan tiga fungsi yang bergantung linear karena terdapat $c_1 = -3, c_2 = 0$ dan $c_3 = 1$ sedemikian sehingga

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 3e^x = 0.$$

Bagaimana cara mengidentifikasinya???

Wronskian

Diberikan kombinasi linear dari n fungsi yang hasilnya adalah nol sebagai berikut:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0.$$

Darisini diperoleh bahwa turunan pertama sampai ke-$n-1$ persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned}
c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) &= 0. \\
c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \cdots + c_n f_n''(x) &= 0. \\
&\cdots \\
c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Bentuk lain

Jika dinyatakan dalam operasi perkalian matriks maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ & \cdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Menurut sifat perkalian pada matriks, vektor kolom c bernilai nol jika matriks koefisiennya invertibel atau determinannya tak nol. Jadi, jika

$$det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ & \cdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \neq 0$$

maka ke-n fungsi tersebut bebas linear.

Wronksian

Definition

Diberikan n buah fungsi yaitu $f_1, f_2, \cdots, f_n$ yang mempunyai turunan sampai ke-$n-1$ pada interval $a \leq x \leq b$. Determinan matriks

$$W(f_1, f_1, \cdots, f_n) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ & \cdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x). \end{bmatrix}$$

disebut **Wronskian** dari n fungsi tersebut.

Jadi, n buah fungsi dikatakan bebas linear jika hanya jika wronskian fungsi tersebut bernilai tak nol.

Teorema berikut berkaitan dengan solusi umum PD linear homogen Order-n.

Solusi umum

Theorem

PD linear homogen order-n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0.$$

selalu memiliki n buah fungsi yang saling bebas linear. Lebih lanjut lagi, solusi umum PD tersebut adalah kombinasi linear dari n fungsi yang bebas linear tersebut.

Definition

Jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ adalah n-solusi bebas linear dari PD linear homogen order-n pada interval $a \leq x \leq b$, maka n fungsi tersebut disebut **basis solusi** dari persamaan diferensial.

Contoh 4

Sebagai contoh, $\sin x$ dan $\cos x$ keduanya merupakan solusi PD

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

dan saling bebas linear. Akibatnya, solusi umum dari PD tersebut adalah

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Contoh lainnya, karena e^x, e^{-x} dan e^{2x} merupakan solusi PD

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

dan saling bebas linear, maka solusi umum dari PD adalah

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}.$$

Latihan

1. Perhatikan persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

   1. Buktikan bahwa e^x dan e^{3x} merupakan solusi PD.
   2. Apakah e^x dan e^{3x} saling bebas linear?
   3. Tentukan solusi umum PD tersebut.

2. Tunjukkan bahwa x, x^2 dan x^4 adalah solusi dari PD

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

   Selanjutnya, tunjukkan bahwa ketiganya bebas linear kemudian tentukan solusi umum dari PD tersebut.

Reduksi Order

Teorema berikut digunakan untuk mencari solusi nontrivial lain dari suatu PD order tinggi jika diketahui salah satu solusinya.

Theorem

Misalkan f adalah solusi nontrivial dari PD linear homogen order-n, maka transformasi $y = fv$ dapat mereduksi PD order-n menjadi PD baru order-$(n-1)$ dengan variabel dependen $w = dv/dx$.

Pembuktian untuk $n = 2$. Diberikan f solusi dari PD

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Selanjutnya, didefinisikan $y = fv$ untuk suatu v fungsi atas x. Darisini diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dv}{dx} + f'(x)v$$

lanjutan

dan

$$\frac{d^y}{dx^2} = f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + 2f'(x)\frac{dv}{dx} + f''(x)v.$$

Substitusikan pada PD maka diperoleh

$$a_0(x)\left(f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + 2f'(x)\frac{dv}{dx} + f''(x)v\right) + a_1(x)\left(f(x)\frac{dv}{dx} + f'(x)v\right) + a_2(x)\left(f(x)v\right) = 0.$$

atau ekuivalen dengan

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} + \left[a_0(x)f''(x) + a_1(x)f'(x)a_2(x)f(x)\right]v = 0.$$

lanjutan

Karena f merupakan solusi, maka

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} = 0.$$

Misalkan $w = \frac{dv}{dx}$ maka diperoleh

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)\right]w = 0.$$

yang merupakan PD orde satu separable.

$$\frac{1}{w}dw = -\left[2\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right]dx$$

Darisini didapatkan

$$w = \frac{ce^{\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}}{[f(x)]^2}$$

lanjutan

karena $w = dv/dx$, maka

$$v = \int \frac{ce^{\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}}{[f(x)]^2}dx.$$

sehingga solusi PD yang lain adalah

$$y = fv = f(x)\int \frac{ce^{\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}}{[f(x)]^2}dx.$$

Lebih lanjut lagi akan ditunjukkan bahwa kedua solusi tersebut bebas linear.

Misalkan kedua solusi tersebut adalah f dan g, dengan $g = fv$.
Wronskian dari kedua fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned} W(f,g) &= det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} \\ &= det \begin{bmatrix} f(x) & f(x)v \\ f'(x) & f'(x)v + f(x)v \end{bmatrix} \\ &= [f(x)]^2 v \neq 0. \end{aligned}$$

Contoh

Diketahui $y = x$ adalah salah satu solusi dari PD

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Tentukan solusi lain yang bebas linear dengan solusi yang diketahui.

The End