Persamaan Diferensial Pertemuan X

Bab IV. PD Order Tinggi - Koefisien Konstan

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

Definisi

Definition

Persamaan Diferensial Biasa Order-n dengan x variabel independen dan y variabel dependen adalah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x).$$

dengan $a_0(x) \neq 0$.

Untuk $F(x) = 0$, maka PD dapat direduksi menjadi bentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0.$$

dan disebut dengan **PD linear order-n homogen**. Sebaliknya, jika $F(x) \neq 0$ maka PD disebut nonhomogen.

Homogen - Koefisien Konstan

Pada pertemuan ini, akan dicari solusi dari PD order tinggi homogen dengan koefisien konstan.

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \tag{1}$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstanta real.
Perhatikan persamaan-persamaan berikut

$$\frac{dy}{dx} = my, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 y, \ \ldots\ , \quad \frac{d^k y}{dx^k} = m^k y.$$

Fungsi apakah yang memenuhi persamaan-persamaan tersebut?

Fungsi eksponensial

Fungsi yang memenuhi persamaan-persamaan tersebut adalah fungsi eksponensial yaitu

$$y = e^{mx}.$$

Akibatnya, jika $y = e^{mx}$ merupakan solusi dari Pers. 1 maka diperoleh

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0.$$

Faktorkan maka didapatkan

$$\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n\right) e^{mx} = 0.$$

Selanjutnya karena $e^{mx} \neq 0$ untuk setiap x, maka nilai m sedemikian sehingga $y = e^{mx}$ merupakan solusi harus memenuhi persamaan

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0. \tag{2}$$

Pers. 2 kemudian disebut dengan **Persamaan Karakteristik**.

Kasus I, akar berlainan

Pers. 2 merupakan bentuk persamaan suku banyak berderajat-n.

Kasus I. akar real berlainan

Misalkan akar-akar pers. 2 merupakan n bilangan berlainan

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

maka diperoleh n solusi berbeda pula yaitu

$$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_n x}.$$

Untuk mengetahui apakah n solusi ini saling bebas linear, digunakan determinan matriks wronskiannya.

$$W = det \begin{bmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} & \ldots & e^{m_n x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} & \ldots & m_n e^{m_n x} \\ \ldots & & & \\ m_1^{n-1} e^{m_1 x} & m_2^{n-1} e^{m_2 x} & \ldots & m_n^{n-1} e^{m_n x} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Solusi

Theorem

Untuk PD orde-n linear homogen koefisien konstan pada Pers 1. Jika persamaan karakteristiknay mempunyai n solusi yang berlainan, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, maka solusi untuk PD linear orde-n dengan adalah

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sebarang konstanta real.

Sebagai contoh,
Tentukan solusi dari PD berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Misalkan solusinya adalah $y = e^{mx}$, maka persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \leftrightarrow (m-1)(m-2) = 0.$$

Lanjutan

Jadi, akar-akar persamaan karakteristiknya

$$m = 1 \quad \text{dan} \quad m = 2,$$

yang berakibat solusi dari PD adalah $y = e^x$ dan $y =^{2x}$. Karena

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^2x \end{bmatrix} \neq 0$$

maka solusi umum dari PD tersebut adalah $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Contoh

Tentukan solusi umum dari PD berikut :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari PD tersebut adalah

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0.$$
$$(m+1)(m-2)(m-3) = 0.$$

Jadi, solusi persamaan karakteristiknya adalah

$$m = -1, m = 2, \text{ dan } \quad m = 3.$$

Akibatnya solusi dari PD tersebut adalah

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_2e^{3x}.$$

Kasus II, akar kembar

Untuk mencari solusi PD jika terdapat akar kembar, perhatikan contoh berikut.

Example

Tentukan solusi dari PD berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

Akar dari persamaan karakteristik untuk PD tersebut adalah $m = 3$ saja, sehingga baru diperoleh satu solusi PD yaitu $y_1 = e^{3x}$. Solusi lain yang bebas linear dapat dicari menggunakan metode reduksi order. Misalkan

$$y_2 = e^{3x}v$$

maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}v + e^{3x}v', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}v + 6e^{3x}v' + e^{3x}v''.$$

Substitusikan pada PD maka didapatkan

$$9e^{3x}v + 6e^{3x}v' + e^{3x}v'' - 6(3e^{3x}v + e^{3x}v') + 9(e^{3x}v) = 0.$$

atau

$$e^{3x}v'' = 0 \quad \rightarrow \quad v(x) = cx + c_0.$$

Jadi, solusi lain dari PD adalah $y_2 = (cx + c_0)e^{3x}$. Dengan wronskian dapat ditunjukkan bahwa kedua solusi ini saling bebas linear. Akibatnya, solusi umum dari PD adalah

$$y = c_1 e^{3x} + c_2(cx + c_0)e^{3x} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Basis solusi untuk PD dengan akar kembar tersebut adalah $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$.

Teorema

Theorem

Diberikan PD 1.

1. *Jika akar persamaan karakteristik m muncul sebanyak k kali, maka solusi umum yang bersesuaian dengan akar ini adalah*

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{mx}.$$

2. *Jika akar-akar yang lain merupakan akar yang berlainan $m_{k+1}, \ldots, m_n$ maka solusi umum dari PD 1 adalah*

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

3. *Jika akar-akar yang lain juga terdapat akar kembar, maka solusi umum yang bersesuaian dengan akar ini dinyatakan ekuivalen dengan cara bagian 1.*

Contoh

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0.$$

Persamaan karakteristik untuk PD adalah

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$$

dan mempunyai akar-akar 3,3,-2. Jadi, solusi umum PD tersebut adalah

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + c_3 e^{-2x}.$$

Contoh

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$$

dengan akar-akar persamaan yaitu 2,2,2,-1. Jadi, solusi umum dari PD tersebut adalah

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + c_4e^{-x}.$$

Kasus III, Akar kompleks

Misalkan terdapat akar karakteristik dari persamaan karakteristik untuk Pers. 1 yang bernilai kompleks yaitu $m_{1,2} = a \pm bi$, maka solusi yang berkaitan dengan akar kompleks tersebut adalah

$$y_1 = k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x}.$$

Menurut rumus Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ Akibatnya, y_1 dapat pula dinyatakan dalam bentuk

$$y_1 = e^{ax}\left(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx\right)$$

Selanjutnya, menurut kasus II, diperoleh teorema berikut:

Theorem

Jika $a + bi$ dan $a - bi$ merupakan akar karakteristik yang berulang k-kali, maka solusi yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} y_2 = e^{ax}[&(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) \sin bx \\ &+(c_{k+1} + c_{k+2} x + \cdots + c_{2k} x^{k-1}) \cos bx] \end{aligned}$$

Contoh

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 + 1 = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $m = 0 \pm i$. Jadi, solusi umum dari PD adalah

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Contoh

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 - 6m + 25 = 0$$

dengan akar-akar $3 \pm 4i$. Jadi, solusi umumnya adalah

$$y = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x).$$

Contoh

Example

Tentukan solusi umum dari PD berikut:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0$$

dan akar-akarnya adalah $1+2i, 1+2i, 1-2i, 1-2i$. Karena terdapat akar kompleks kembar, maka solusinya adalah

$$y = e^x\left[(c_1 + c_2x)\sin 2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x\right].$$

The End