Persamaan Diferensial Pertemuan X

Bab IV. PD Order Tinggi - Nonhomogen Koefisien Konstan

Nikenasih B - Eminugroho RS

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

nikenasih@uny.ac.id
eminugroho@uny.ac.id

Overview

1. Solusi Umum
2. Metode Koefisien Tak Tentu

PD Nonhomogen

Pada pertemuan ini, akan dicari solusi dari PD order tinggi nonhomogen dengan koefisien konstan.

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x). \tag{1}$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstanta real dan $F(x) \neq 0$.
Solusi umum dari PD 1 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y = y_c + y_p$$

dengan
y_c adalah solusi komplementer (solusi umum bagian homogen),
y_p adalah solusi khusus.

Metode yang digunakan

Untuk mendapatkan solusi umum dari PD nonhomogen 1, pada perkuliahan ini akan digunakan 2 metode yaitu

1. Metode Koefisien Tak Tentu
   dengan menebak y_p berdasarkan bagian kanan PD nonhomogen, $F(x)$.
2. Metode Variasi Parameter
   dengan menebak y_p berdasarkan solusi umum bagian homogennya, y_c.

Pada pertemuan ini, akan dibahas metode Koefisien tak tentu untuk F fungsi eksponensial, polinomial dan sinusoidal. Untuk memahaminya, perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1

Perhatikan PD berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x}. \tag{2}$$

Bentuk homogen dari PD 2 adalah

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \tag{3}$$

Karena y_c adalah solusi bagian homogen dari PD maka y_c merupakan solusi dari PD 3. Solusi mencari PD homogen koefisien konstan telah dipelajari di pertemuan sebelumnya yaitu dengan menggunakan persamaan karakteristik. Persamaan karakteristik untuk PD 3 adalah

$$\begin{aligned} m^2 - 2m - 3 &= 0 \\ (m-3)(m+1) &= 0 \\ m = 3 \quad \text{atau} \quad m = -1 & \end{aligned}$$

Jadi, $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

lanjutan

Selanjutnya akan dicari y_p. Untuk mencari solusi khusus PD nonhomogen, metode koefisien tak tentu menebak nilai y_p berdasarkan ruas kanan PD nonhomogen, $F(x)$. Pada PD 2, $F(x) = 2e^{4x}$. Tebakan awal nilai y_p yang digunakan berbentuk

$$y_p = Ae^{4x}.$$

Akan dicari apakah ada nilai A sehingga tebakan y_p tersebut benar merupakan solusi khusus. Ingat, jika y_p merupakan solusi khusus, maka haruslah memenuhi PD 2. Turunan pertama dan kedua dari y_p adalah

$$y_p' = 4Ae^{4x} \quad \text{dan} \quad y_p" = 16Ae^{4x}.$$

Substitusikan pada PD 2 diperoleh

$$16Ae^{4x} - 2 \cdot 4Ae^{4x} - 3 \cdot Ae^{4x} = 2e^{4x}$$

Persamaan ini bernilai benar untuk $A = \frac{2}{5}$. Jadi, nilai y_p agar menjadi solusi khusus adalah $y_p = \frac{2}{5}e^{4x}$. Akibatnya, solusi umum dari PD 2 adalah

$$y = c_1e^{3x} + c_2d^{-x} + \frac{2}{5}e^{4x}.$$

Contoh 2

Bandingkan contoh berikut ini.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x}. \tag{4}$$

Ruas kiri pada PD 4 mempunyai bentuk yang sama dengan PD 2, akibatnya bentuk homogennya juga sama sehingga solusi bagian homogen diperoleh

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}.$$

Selanjutnya, karena bentuk ruas kanan PD adalah $2e^{3x}$, diambil $y_p = Be^{3x}, y_p' = 3Be^{3x}$, dan $y_p'' = 9Be^{3x}$. Substitusikan tebakan serta turunannya pada PD 4 maka diperoleh

$$9Be^{3x} - 2 \cdot 3Be^{3x} - 3 \cdot Be^{3x} = 2e^{3x}.$$

atau

$$0 = 2e^{3x}.$$

lanjutan

Persamaan terakhir ini tidak dipenuhi untuk semua nilai real x. Mengapa?
Perhatikan kembali solusi homogen dari PD 4. Diketahui bahwa e^{3x} merupakan salah satu anggota basis solusi homogennya. Akibatnya, tebakan $y_p = Be^{3x}$ tentu saja menghasilkan solusi homogen pula. Misalkan

$$y_p = Bxe^{3x}$$

Turunan pertama dan keduanya adalah

$$y_p' = 3Bxe^{3x} + Be^{3x} \quad \text{dan} \quad y_p'' = 9Bxe^{3x} + 6Be^{3x}.$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan pada PD 4 diperoleh

$$9Bxe^{3x} + 6Be^{3x} - 2 \cdot \left(3Bxe^{3x} + Be^{3x}\right) - 3Bxe^{3x} = 2e^{3x}$$
$$4Be^{3x} = 2e^{3x} \rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

lanjutan

Darisini diperoleh bahwa $y_p = Bxe^{3x}$ merupakan solusi khusus dari PD 4 untuk $B = \frac{1}{2}$. Jadi, solusi umum dari PD 4 adalah

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{3x}. \end{aligned}$$

Dari contoh PD 2 dan PD 4, apa yang dapat Anda simpulkan dari y_c dan y_p jika $F(x)$ merupakan fungsi eksponensial?
Selanjutnya, perhatikan contoh pada slide berikutnya untuk menebak solusi khusus y_p pada fungsi polinomial.

Contoh 3

Perhatikan contoh berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x. \tag{5}$$

Solusi umum bagian homogen PD 5 adalah

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Misalkan tebakan awal untuk solusi khususnya adalah $y_p = Cx$, maka

$$y_p' = C \quad \text{dan} \quad y_p" = 0.$$

Akibatnya jika disubstitusikan pada PD 5 diperoleh

$$0 - 2 \cdot C - 3 \cdot Cx = x.$$

Darisini didapatkan prasyarat bahwa C harus memenuhi $-2C = 0$ dan $-3C = 1$. Hal ini tidak mungkin dipenuhi untuk bilangan real C berapapun sehingga tebakan gagal.

lanjutan

Dimisalkan tebakan untuk solusi khususnya adalah

$$y_p = Cx + D,$$

dimana $y_p' = C$ dan $y_p" = 0$. Substitusikan kembali pada PD 5 maka diperoleh

$$0 - 2 \cdot C - 3 \cdot (Cx + D) = x.$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa $-3C = 1$ dan $-2C - 3D = 0$. Hal ini dipenuhi untuk nilai $C = -\frac{1}{3}$ dan $D = \frac{2}{9}$. Jadi, solusi khusus yang memenuhi adalah $y_p = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$. Akibatnya, solusi umum dari PD 5 adalah

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Latihan.

Coba gunakan analisa kalian untuk menebak solusi khusus dari PD

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x^2.$$

Contoh 4

Selanjutnya, akan dianalisa tebakan solusi khusus untuk kasus fungsi sinusoidal. Perhatikan contoh berikut.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2\sin x. \tag{6}$$

Misalkan tebakan awal dari PD 6 adalah

$$y_p = E\sin x.$$

Substitutikan tebakan awal pada PD 6 maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} -E\sin x - 2\cdot(E\cos x) - 3\cdot E\sin x &= 2\sin x, \\ -4E\sin x - 2E\cos x &= 2\sin x. \end{aligned}$$

Dari persamaan ini diperoleh syarat bahwa nilai E harus memenuhi $-4E = 2$ dan $-2E = 0$ yang tidak mungkin keduanya dipenuhi. Jadi, tebakan gagal.

Karena di ruas kiri pada akhir persamaan muncul bentuk cos, tebakan berikutnya yaitu

$$y_p = E\sin x + F\cos x,$$

yang berakibat $y_p' = E\cos x - F\sin x$ dan $y_p" = -E\sin x - F\cos x$. Substitusikan pada PD 6 maka diperoleh

$$(-E\sin x - F\cos x) - 2(E\cos x - F\sin x) - 3(E\sin x + F\cos x) = 2\sin x,$$
$$(-4E + 2F)\sin x + (-2E - 4F)\cos x = 2\sin x.$$

Jadi, nilai E dan F harus memenuhi persamaan

$$-4E + 2F = 2$$
$$-2E - 4F = 0.$$

Nilai yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah $E = -\frac{2}{5}$ dan $F = \frac{1}{5}$. Jadi, solusi umum dari PD 6 adalah

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x.$$

Contoh 5

Rangkuman Contoh 1 sampai Contoh 4 dapat dilihat dari tabel berikut.

Contoh No.	y_c	$F(x)$	y_p	UC Set
1	$c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$	$2e^{4x}$	$\frac{2}{5}e^{4x}$	$\{e^{4x}\}$
2	$c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$	$2e^{3x}$	$\frac{1}{2}xe^{3x}$	$\{xe^{3x}\}$
3	$c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$	x	$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$	$\{x,1\}$
4	$c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$	$2\sin x$	$-\frac{2}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x$	$\{\sin x,\cos x\}$

dengan *UC set(S)* adalah basis untuk solusi khususnya.
Pada Contoh 2 ditunjukkan bahwa ketika $F(x)$ dibentuk dari basis solusi homogen, maka tebakan nilai y_p perlu disesuaikan. Pada contoh 3 dan 4 ditunjukkan bahwa basis tebakan nilai y_p adalah basis $F(x)$ beserta turunannya. Selanjutnya, basis untuk $F(x)$ disebut dengan *UC function*.

UC set Akhir

Dimisalkan UC set awal adalah basis untuk tebakan awal sebelum mempertimbangkan basis solusi homogennya.

- suatu PD mempunyai UC function $F(x) = x^3$, maka UC set awalnya adalah
$$S = \{x^3, x^2, x, 1\}.$$
- suatu PD mempunyai UC function $F(x) = \sin 2x$, maka UC set awalnya adalah
$$S = \{\sin 2x, \cos 2x\}.$$
- suatu PD mempunyai UC function $F(x) = xe^{2x}$, maka UC set awalnya adalah
$$S = \{xe^{2x}, e^{2x}\}.$$
- suatu PD mempunyai UC function $F(x) = x \sin x$, maka UC set awalnya adalah

Ringkasan 1

Secara umum, tebakan awal untuk UC set pada Metode Koefisien Tak Tentu dinyatakan dalam tabel berikut.

	UC function	*UC set*
1	x^n	$\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, 1\}$
2	e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
3	$\sin(bx+c)$ or $\cos(bx+c)$	$\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
4	$x^n e^{ax}$	$\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, x^{n-2}e^{ax}, \dots, xe^{ax}, e^{ax}\}$
5	$x^n \sin(bx+c)$ or $x^n \cos(bx+c)$	$\{x^n \sin(bx+c), x^n \cos(bx+c), x^{n-1}\sin(bx+c), x^{n-1}\cos(bx+c), \dots, x\sin(bx+c), x\cos(bx+c), \sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
6	$e^{ax}\sin(bx+c)$ or $e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$
7	$x^n e^{ax}\sin(bx+c)$ or $x^n e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{x^n e^{ax}\sin(bx+c), x^n e^{ax}\cos(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\sin(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\cos(bx+c), \dots, xe^{ax}\sin(bx+c), xe^{ax}\cos(bx+c), e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$

Figure: Tabel UC Set

UC set akhir

Ingat bahwa apabila UC set merupakan solusi dari bagian homogen dari PD, maka UC set perlu disesuaikan. Misalkan UC set yang telah disesuaikan disebut UC set akhir.
Perhatikan contoh PD berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2e^x.$$

UC set awal dari PD tersebut adalah

$$S = \{x^2e^x, xe^x, e^x\}$$

Akan tetapi, karena basis solusi homogen dari PD adalah $\{e^x, e^{2x}\}$ maka UC set awal perlu disesuaikan lagi sehingga pada UC set awal tidak muncul basis solusi homogen. UC set akhri dari PD adalah

$$S = \{x^3e^x, x^2e^x, xe^x\}$$

contoh 5

Misalkan diketahui PD

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^x.$$

UC set awal dari PD tersebut adalah

$$S = \{x^2e^x, xe^x, e^x\}.$$

Akan tetapi, karena basis solusi homogen dari PD adalah $\{e^x, xe^x\}$, maka UC set akhirnya adalah

$$S = \{x^4e^x, x^3e^x, x^2e^x\}.$$

Latihan Soal

1. Tentukan solusi umum untuk PD nonhomogen berikut menggunakan metode koefisien tak tentu.
    1. $y'' - 2y' - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}$
    2. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$
    3. $y'' + 2y' + 2y = 5\sin 2x$
2. Tentukan basis solusi homogen, UC set awal dan UC set akhir dari PD nonhomogen berikut ini.
    1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = xe^x$
    2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$

The End